Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, С. В. Тихонов, Типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается только в инъективные $\mathbb{R}^n$ -действия, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 925–930

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:23:24

ТИПИЧНОЕ $\mathbb{Z}^n$ -ДЕЙСТВИЕ ВКЛАДЫВАЕТСЯ ТОЛЬКО В ИНЪЕКТИВНЫЕ $\mathbb{R}^n$ -ДЕЙСТВИЯ

В. В. Рыжиков, С. В. Тихонов

В работе изучаются действия групп $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{R}^n$ автоморфизмами пространства Лебега. Доказывается, что типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается только в инъективные действия $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Дается простое доказательство того, что типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие не вкладывается в $\mathbb{R}$ -действие.

Библиография: 6 названий.

Введение. Множество $\mathcal{H}$ автоморфизмов (обратимых сохраняющих меру преобразований) пространства Лебега, снабженное метрикой

$$d(T, S) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} (\mu(TA_i \triangle SA_i) + \mu(T^{-1}A_i \triangle S^{-1}A_i)),$$

является полным метрическим пространством (здесь $T, S \in \mathcal{H}$, а $\{A_i\}$ – счетный набор множеств, порождающий всю σ -алгебру борелевских множеств).

Пусть $\mathcal{H}^{(n)}$ – множество всех $\mathbb{Z}^n$ -действий автоморфизма пространства Лебега. В $\mathcal{H}^{(n)}$ зададим метрику, которая делает его полным сепарабельным пространством, а именно,

$$d(T, S) = \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{2^{i_1 + \dots + i_n}} d(T^{(i_1, \dots, i_n)}, S^{(i_1, \dots, i_n)}).$$

Через $\mathcal{F}^{(n)}$ обозначим множество непрерывных $\mathbb{R}^n$ -действий, т.е. непрерывных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathcal{H}$, сохраняющих групповую структуру. $\mathbb{R}$ -действия называются также *непрерывными потоками*. Элементы $\mathcal{F}^{(n)}$ записываются как $\{g^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^n}$ (иногда, просто g). Метрика

$$D(g, h) = \sup_{\alpha \in [-1, 1]^n} d(g^\alpha, h^\alpha)$$

делает $\mathcal{F}^{(n)}$ полным сепарабельным пространством.

Пусть T – некоторое $\mathbb{Z}^m$ -действие. Будем говорить, что оно *вкладывается* в $\mathbb{R}^n$ -действие g , если существуют такие моменты времени (т.е. элементы $\mathbb{R}^n$) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, что $g^{\alpha_1} = T_1, \dots, g^{\alpha_m} = T_m$. В этой работе мы изучаем возможность вложения типичного $\mathbb{Z}^m$ -действия в $\mathbb{R}^n$ -действия. Напомним, что всюду плотное множество типа G_δ

Работа выполнена в рамках программы “Ведущие научные школы” РФ, грант № НШ-457.2003.1.

(счетное пересечение открытых) называется *массивным*; множество, содержащее массивное, называется *существенным*; и дополнение к существенному множеству называется *тощим*. *Аналитическим* называется непрерывный образ борелевского множества. Более подробно – см. [1]. Говорят, что свойство *типично*, если оно выполняется для элементов существенного множества, и *нетипично*, если выполняется только на элементах тощего множества.

Следующее утверждение, доказанное в [2], показывает, что круг типичных и нетипичных свойств достаточно обширен.

ДИНАМИЧЕСКАЯ АЛЬТЕРНАТИВА. *Аналитическое подмножество $\mathcal{K}^{(n)}$, инвариантное относительно сопряжений, является либо существенным, либо тощим.*

$\mathbb{R}^n$ -действие h называется *инъективным*, если отображение $\gamma \mapsto h^\gamma$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathcal{K}$ является инъективным. Это эквивалентно тому, что для $\gamma \neq 0$ имеем $h^\gamma \neq I$.

Де Сэм Лазаро и де ла Рю [3] доказали, что типичные преобразования вкладываются в поток. Этот поток, очевидно, инъективен, и все его ненулевые элементы слабо перемешивают (напомним, что типичное преобразование слабо перемешивает).

Степин и Еременко [4] показали, что типичное преобразование вкладывается в континуум потоков (ответ на вопрос Рохлина в [5]).

Де Сэм Лазаро и де ла Рю поставили вопросы о типичности вложения $\mathbb{Z}^2$ -действия в поток и вложения преобразования в инъективное $\mathbb{R}^n$ -действие.

Оба эти вопроса были решены Тихоновым в [6]: на первый вопрос ответ отрицателен, на второй положителен. В [5] был поставлен вопрос о возможности вложения $\mathbb{Z}^n$ -действия в неинъективное $\mathbb{R}^n$ -действие в типичном случае.

В настоящей работе мы даем простое доказательство того, что типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие не вкладывается в поток, а также доказываем, что типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие не вкладывается в неинъективные $\mathbb{R}^n$ -действия.

1. Нетипичность вложения $\mathbb{Z}^2$ -действия в $\mathbb{R}$ -действие. Непрерывное отображение *сохраняет типичность*, если образ и полный прообраз всякого существенного множества существенен.

Отображение $w: (T, S) \mapsto (T, S^{-1})$ сохраняет типичность (здесь мы используем способ задания $\mathbb{Z}^n$ -действия с помощью его образующих $h = (h^{(1,0,\dots,0)}, \dots, h^{(0,\dots,0,1)}) = (h_1, \dots, h_n)$). Поскольку $w = w^{-1}$, достаточно показать, что полный прообраз существенного множества существенен. Далее заметим, что можно ограничиться лишь массивными множествами. Действительно, в каждом существенном множестве есть массивное, и если его полный прообраз содержит существенное множество, то и сам является существенным. Массивное множество есть счетное пересечение открытых и всюду плотных множеств. Свойства открытости и плотности сохраняются отображением w . Значит, полный прообраз массивного множества массивен.

Аналогично доказывается следующая

ЛЕММА 1. *Для любого набора $b = (b_1, \dots, b_n)$ из $+1$ и -1 отображение*

$$\{h^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \mapsto \{h^{\alpha b}\}_{\alpha \in \mathbb{R}^n}$$

сохраняет типичность.

Растяжением потока g назовем поток вида $\{g^{r\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ для любого $r \neq 0$.

ЛЕММА 2. Типичное $\mathbb{Z}^2$ -действие не вкладывается более, чем в один поток с точностью до растяжения, и такой поток должен быть инъективным.

Лемма доказана в [6]. Она позволяет классифицировать $\mathbb{Z}^2$ -действия по тому, как они вкладываются в поток.

Пусть образующие действия (T, S) вкладываются в поток $\{h^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ в моменты времени α_1 и α_2 соответственно. Назовем действие *положительным*, если $\alpha_1\alpha_2 > 0$, *отрицательным*, если $\alpha_1\alpha_2 < 0$, и *нулевым*, если $\alpha_1\alpha_2 = 0$. Положительность и отрицательность действия, вообще говоря, зависят от выбранного потока, однако не меняются, если поток растянуть. Если поток неинъективен, то действие может оказаться одновременно и положительным, и отрицательным. Через J^+ , J^- и J^0 обозначим соответственно множества положительных, отрицательных и нулевых (относительно каких-нибудь потоков) $\mathbb{Z}^2$ -действий. Очевидно, множество J^0 тощее (оно состоит из действий, одна образующая которых – тождественное преобразование).

ЛЕММА 3. Множество J^+ аналитично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непрерывное отображение

$$P: \{h^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^2} \mapsto (h^{(1,0)}, h^{(0,1)})$$

из $\mathcal{F}^{(2)}$ в $\mathcal{H}^{(2)}$. Образ множества

$$G = \{\{h^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^2} \mid \exists \beta \in \mathbb{R}, \beta < 0: h^{(1,\beta)} = I\}$$

состоит из тех $\mathbb{Z}^2$ -действий, образующие которых вкладываются в некоторый поток $\{h^{(0,\gamma)}\}_{\gamma \in \mathbb{R}}$ в моменты 1 и $-\beta$ (для некоторого $\beta < 0$). Значит, все такие действия лежат в J^+ . Обратно, если $T = g^{\alpha_1}$, $S = g^{\alpha_2}$ для некоторого потока $\{g^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ и $\alpha_1\alpha_2 > 0$, то пара (T, S) вкладывается в $\mathbb{R}^2$ -действие $\{g^{\gamma\alpha_1+\beta\alpha_2}\}_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2}$, имеющее тождественное отображение в момент времени $(1, -\alpha_1/\alpha_2)$. Таким образом, $P(G) = J^+$, и нам достаточно показать, что G – борелевское множество. Дополнение к множеству G можно представить в виде

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \{h^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}^2} \mid \forall \beta \in \left[-k, -\frac{1}{k}\right]: h^{(1,\beta)} \neq I \right\}.$$

Все множества в этом пересечении открыты: это следует из того, что если $h^{(1,\beta)} \neq I$, то $D(h^{(1,\beta)}, I) > \varepsilon > 0$ для $\beta \in [-k, -1/k]$.

Следовательно, дополнение к G есть G_δ -множество, а само G – множество типа F_σ .

ТЕОРЕМА 1. Множество $\mathbb{Z}^2$ -действий, которые вкладываются в поток, является тощим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что множество $J^+ \cap J^-$ содержит лишь действия, вкладываемые как минимум в два потока, или действия, вкладываемые в неинъективный поток, а значит, является тощим. Множество J^+ аналитично и инвариантно относительно сопряжений, значит, оно либо существенное, либо тощее. Заметим, что $J^+ = w(J^-)$. Отображение w сохраняет типичность, поэтому J^+ и J^- тощие или существенные одновременно. Поскольку пересечение $J^+ \cap J^-$ есть тощее множество, реализуется первый вариант. Тогда множество $\mathbb{Z}^2$ -действий, вкладываемых в поток, содержится в объединении трех тощих множеств J^+ , J^- и J^0 .

2. Типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается только в инъективные $\mathbb{R}^n$ -действия. Вектор γ , $\gamma \neq 0$, назовем *тождественным* (относительно $\mathbb{R}^n$ -действия h), если $h^\gamma = I$, и назовем, для краткости, *перемешивающим*, если h^γ — слабо перемешивающее преобразование. Вектор γ перемешивает тогда и только тогда, когда перемешивают все вектора вида $a\gamma$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ЛЕММА 4. Пусть v — произвольный вектор, представимый в виде линейной комбинации тождественных. Тогда он не перемешивает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, где $b_1, \dots, b_n$ — тождественные вектора, и все коэффициенты этого разложения ненулевые. Вектор v перемешивает в том и только том случае, если перемешивают все вектора

$$\alpha(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

лежащие с ним в одном направлении. Выбрав $\alpha = 1/\alpha_1$, получаем, что v перемешивает тогда и только тогда, когда перемешивает вектор

$$c = b_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} b_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} b_n.$$

Очевидно, что c и $v_2 = c - b_1$ перемешивают или не перемешивают одновременно (они соответствуют одному и тому же преобразованию). Таким образом, перемешивание вектора v эквивалентно перемешиванию для некоторого вектора v_2 , также представимого в виде линейной комбинации тождественных векторов, но уже меньшего их количества. Продолжая описанную выше процедуру, получим, что перемешивание вектора v эквивалентно перемешиванию для некоторого вектора v_{n-1} , представимого в виде

$$v_{n-1} = \beta b_n, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Но этот вектор не перемешивает, так как имеет одинаковое направление с неперемешивающим тождественным вектором.

Перенумеруем произвольным образом квадранты в $\mathbb{R}^n$. Через F_i обозначим множество всех $\mathbb{Z}^n$ -действий, вкладываемых в неинъективные $\mathbb{R}^n$ -действия, таких, что в i -ом квадранте есть ненулевой тождественный вектор.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3.

ЛЕММА 5. Множество F_i аналитично для всех i .

Все множества F_i инвариантны относительно сопряжений, а также переводятся друг в друга с помощью преобразования, сохраняющего типичность. Следовательно, они либо существенные, либо тощие одновременно.

Для $\mathbb{R}^n$ -действия h через $h_1, \dots, h_n$ обозначим его *образующие*, т.е. потоки

$$\{h^{(\alpha, 0, \dots, 0)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}, \quad \dots, \quad \{h^{(0, \dots, 0, \alpha)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$$

соответственно. Само действие h будем иногда записывать как $(h_1, \dots, h_n)$.

ЛЕММА 6. Все неинъективные действия, в которые вкладывается типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие $(T_1, \dots, T_n)$, представимы в виде

$$\{h^{\sum_{i=1, \dots, n} r_i \alpha_i}\}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n},$$

для некоторых ненулевых векторов $r_1, \dots, r_n$ и $\mathbb{R}^m$ -действия h без тождественных направлений такого, что

$$T_1 = h_1, \quad \dots, \quad T_n = h_n.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1 в [6].

ТЕОРЕМА 2. Типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается только в инъективные действия $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{F}$ – множество тех $\mathbb{Z}^n$ -действий, которые вкладываются в неинъективные $\mathbb{R}^n$ -действия. Покажем, что оно тощее. В случае $n = 1$ это утверждение следует из того, что слабоперемешивающие преобразования вкладываются только в инъективные потоки. Пусть, в случае $n = k - 1$ утверждение доказано, докажем его для $n = k$. По предположению индукции $\mathbb{R}^n$ -действие, в которое вложено типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие не имеет тождественных преобразований в координатных гиперплоскостях (кроме нулевого момента времени). Это следует из факта, доказанного в [5]: множество тех $\mathbb{Z}^n$ -действий, некоторые m , $m \leq n$, образующих которых порождают $\mathbb{Z}^n$ -действие, лежащее в тощем подмножестве $\mathcal{K}^{(m)}$, само тощее. Действительно, каждая координатная гиперплоскость соответствует какому-либо $\mathbb{Z}^{n-1}$ -действию, и лишь тощее множество последних неинъективно. Предположим, что множество $\hat{F}$ является существенным. Тогда множество F тех элементов $\hat{F}$, которые вкладываются только в $\mathbb{R}^n$ -действия, не имеющие тождественных преобразований в координатных гиперплоскостях, также существенно. Оно является объединением всех F_i . Поэтому, если бы F_i для каждого i были тощими, то F тоже было бы тощим. По предположению это не так. Значит, все F_i существенны и их пересечение тоже. Тогда типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие вкладывается в неинъективные $\mathbb{R}^n$ -действия с тождественными векторами во всех квадрантах. Рассмотрим одно такое действие со слабо перемешивающими образующими. По лемме 6 все неинъективные действия, в которые вкладывается типичное $\mathbb{Z}^n$ -действие $(T_1, \dots, T_n)$ представимы в виде

$$\{h^{\sum_{i=1, \dots, n} r_i \alpha_i}\}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n},$$

для некоторых ненулевых векторов $r_1, \dots, r_n$ и $\mathbb{R}^m$ -действия h без тождественных направлений такого, что $T_1 = h_1^1, \dots, T_n = h_n^1$.

Пусть L – линейное пространство, порожденное тождественными векторами в пространстве $\mathbb{R}^m$ – времени $\mathbb{R}^m$ -действия $(h_1, \dots, h_m)$. По лемме 4 L не содержит перемешивающих векторов. Из того факта, что действие $(h_1, \dots, h_n)$ неинъективно, следует, что для некоторых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, имеем

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0) \in L.$$

Пересечение L и $\mathbb{R}^n$ есть линейное подпространство без перемешивающих векторов. Размерность этого пересечения меньше, чем n , и в нем нет координатных прямых. Дополним его до гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ с сохранением последнего свойства. Обозначим через V одно из двух полупространств, на которые эта гиперплоскость разбивает пространство. Каждая координатная прямая разбивается гиперплоскостью пополам. Тогда V содержит какой-нибудь квадрант W . Покажем, что любой ненулевой вектор $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ из этого квадранта не может быть тождественным для $\mathbb{R}^n$ -действия, содержащего T .

Рассмотрим любое неинъективное действие

$$g = \{(h^{r_1 \alpha_1}, h^{r_2 \alpha_2}, \dots, h^{r_n \alpha_n})\}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n}$$

такое, что $h^{r_i} = T_i$ для $i = 1, \dots, n$ и $g^{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = I$. Заметим, что каждый вектор r_i представляется как сумма $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i -м месте, и некоторого тождественного вектора q_i . Из неинъективности действия $(h^{r_1}, h^{r_2}, \dots, h^{r_n})$ следует, что для некоторых чисел $\beta_1, \dots, \beta_n$ имеем

$$\beta_1((1, 0, \dots, 0) + q_1) + \beta_2((0, 1, 0, \dots, 0) + q_2) + \dots + \beta_n((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) + q_n) \in L,$$

откуда

$$(\beta_1, \dots, \beta_n, 0, \dots, 0) \in L,$$

что противоречит выбору $(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Значит, ненулевые тождественные вектора не могут лежать во всех квадрантах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно было бы обойтись без (громоздкой в доказательстве) леммы 6, если бы удалось кратко доказать, что в типичном случае существует $\mathbb{R}^n$ -действие с конечным числом слабо перемешивающих направлений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [2] Glasner E., King J. L. A zero-one law for dynamical properties // Contemp. Math. 1998. V. 215. P. 231–242.
- [3] de la Rue T., de Sam Lasaro J. Une transformation générique peut être insérée dans un flot // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 2003. V. 39. №1. P. 121–134.
- [4] Степин А. М., Еременко А. Типичное сохраняющее меру преобразование имеет обширный централизатор // Докл. РАН. 2004. Т. 394. №6. С. 739–742.
- [5] Рохлин В. А. Избранные вопросы метрической теории динамических систем // УМН. 1949. Т. 30. №2. С. 57–128.
- [6] Тихонов С. В. Вложение действий евклидовой решетки в потоки с многомерным временем // Матем. сб. 2006. Т. 391. №1. С. 26–28.

(В.В. Рыжиков) Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
(С.В. Тихонов) Российский государственный
торгово-экономический университет, Москва
E-mail: vryz@mech.math.msu.su, tikhonov@mail.ru

Поступило
17.11.2005