Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Коняев, Построение точного решения некоторых сингулярно возмущенных задач для линейных ОДУ со степенным погранслоем, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 950–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:28:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНСЛОЕМ

Ю. А. Коняев

В отличие от ранее известных результатов [1]–[4], в заметке показана возможность построения точного решения задачи Коши со степенным пограничным слоем в удобной для последующего анализа квазирегулярной форме, когда сингулярность решения, определяющая структуру погранслоя, выписывается в замкнутой аналитической форме, а остальные компоненты решения зависят от малого параметра регулярным образом.

Данная работа посвящена анализу сингулярно возмущенных задач указанного класса и (первые) аналогу соответствующих тихоновских систем:

$$\begin{cases} (t + \varepsilon)\dot{x} = A_{11}(t)x + A_{12}(t)z; & x(0, \varepsilon) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{z} = A_{21}(t)x + A_{22}(t)z; & z(0, \varepsilon) = z_0, \quad z \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

где

$$A_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{ijk} t^k, \quad |t| < 1 + 2\delta, \quad \delta > 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Напомним, что начальные и краевые задачи для усеченных ($z = 0$, $A_{12}(t) \equiv 0$) систем вида (1а) (т.е. первой из двух систем в (1)) ранее были изучены в работе [1], в которой с помощью первого и второго итерационного процесса было построено только асимптотическое представление решения. Следует отметить, что в отличие от сингулярно возмущенных задач с экспоненциальным погранслоем (см., например, [2]–[4], когда при $\varepsilon = 0$ понижается порядок дифференциального уравнения) в сингулярно возмущенных задачах со степенным погранслоем при $\varepsilon = 0$ исходное дифференциальное уравнение приобретает ту или иную особенность, не меняя своего порядка.

Аналоги малоизученного класса задач со степенным погранслоем встречаются в ряде прикладных задач аэро- и гидродинамики, приводящих, в частности, к уравнению Лайтхилла [1], [3]

$$(t + \varepsilon y)\dot{y} + q(t)y = f(t), \quad y(1, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, 1].$$

Рассмотрение начнем с сингулярно возмущенной усеченной задачи (1а) в предположении, что матричная функция $A(t) = A_{11}(t)$ является аналитической при $|t| < 1 + 2\delta$, $\delta > 0$, т.е. матричный ряд $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^k$ сходится абсолютно и равномерно по некоторой норме в указанной области. С помощью замены $t + \varepsilon = \tau$ задача (1а) преобразуется к виду

$$\tau \frac{dx}{d\tau} = A(\tau - \varepsilon)x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(-\varepsilon)}{k!} \tau^k \right) x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(\varepsilon) \tau^k \right) x, \quad x(\varepsilon, \varepsilon) = x_0, \quad (2)$$

где последний ряд сходится абсолютно и равномерно при $|\tau| < 1 + \delta$ и каждый из матричных рядов $A_k(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{kj} \varepsilon^j$ будет сходиться при $|\varepsilon| < \delta$.

Система (1а) близка к известному классу систем с простой особенностью $t\dot{x} = A(t)x$, рассмотренных, например, в работах [5], [6], в которых доказаны

ТЕОРЕМА 1. Пусть матричная функция $A(t) = \sum_0^\infty A_k t^k$ аналитична при $|t| < t^0$, и пусть функциональный векторный ряд $x(t) = \sum_0^\infty x_k t^k$ формально удовлетворяет системе $t\dot{x} = A(t)x$. Тогда этот ряд сходится при $|t| < t^0$ и представляет собой решение данной системы.

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условий теоремы 1, если спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы $A(0)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то решение системы $t\dot{x} = A(t)x$ может быть представлено в виде $x = H(t)t^{A(0)}C$, где матричный ряд

$$H(t) = \sum_0^\infty H_k t^k,$$

коэффициенты которого определяются с помощью рациональных операций над коэффициентами матрицы $A(t) = \sum_0^\infty A_k t^k$, является аналитическим в той же области $|t| < t^0$.

Прежде чем воспользоваться аналогами теорем 1 и 2, с помощью невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon| < 1$ замены

$$x = S_0(\varepsilon)y, \quad S_0^{-1}(\varepsilon)A_0(\varepsilon)S_0(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon)$$

преобразуем начальную задачу (1а) к более удобной для дальнейших операций форме:

$$\tau \dot{y} = B(\tau, \varepsilon)y, \quad y(\varepsilon, \varepsilon) = y_0(\varepsilon), \quad (3)$$

где

$$B(\tau, \varepsilon) = S_0^{-1}(\varepsilon)A(\tau, \varepsilon)S_0(\varepsilon) = \sum_0^\infty B_k(\varepsilon)\tau^k, \quad B_0(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\},$$

$$|\tau| < 1 + \delta, \quad |\varepsilon| < \delta.$$

При наличии у матрицы $A(0)$ простых собственных значений $\{\lambda_{0j}\}_1^n$, удовлетворяющих условию $\sigma_{jk} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, построение матрицы $S(\varepsilon)$ и указанного преобразования сводится к решению спектральной задачи

$$A_0(\varepsilon)S(\varepsilon) = S(\varepsilon)\Lambda_0(\varepsilon),$$

где матрица $S(\varepsilon)$ состоит из соответствующих собственных вектор-столбцов $\{S_j(\varepsilon)\}_1^n$ возмущенной матрицы $A_0(\varepsilon)$. Предельное ($\varepsilon = 0$) соотношение $A_0(0)S(0) = S(0)\Lambda(0)$ в этом случае всегда существует и предполагается известным.

При этом спектр $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ матрицы $A_0(\varepsilon)$ при достаточно малых $|\varepsilon| < 1$ в силу $\sigma_{jk} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ будет удовлетворять условиям

$$\sigma_{jk}(\varepsilon) \equiv \lambda_j(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Известный ранее алгоритм [7], [8] построения собственных значений $\lambda_j(\varepsilon)$ и, тем более, соответствующих собственных векторов $S_j(\varepsilon)$ возмущенной матрицы $A(\varepsilon)$ весьма нетривиален и вызывает значительные трудности при его реализации. В работе [9] с помощью аппарата диагональных и бездиагональных матриц эта проблема решена достаточно просто для многомерного ($\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$) возмущения матрицы $A(\varepsilon) = \sum_0^\infty A_k \varepsilon^k$ (в том числе и для матрицы A_0 произвольной жордановой структуры).

Для удобства дальнейшего изложения для произвольных диагональных и бездиагональных квадратных матриц введем обозначения:

$$A = \{a_{jk}\}_1^n, \quad \overline{A} = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}, \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A}.$$

Основные моменты изложенного в [9] алгоритма в простейшем случае одномерного возмущения ($\varepsilon \in \mathbb{R}^1$) сводятся к следующему. С помощью замены $S(\varepsilon) = S(0)H(\varepsilon)$ перейдем от матричного уравнения $A_0(\varepsilon)S(\varepsilon) = S(\varepsilon)\Lambda_0(\varepsilon)$ к более удобному для последующего анализа соотношению

$$B(\varepsilon)H(\varepsilon) = H(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon),$$

$$\left(B(\varepsilon) = S_0^{-1}A(\varepsilon)S_0 = \sum_0^\infty B_k \varepsilon^k, \quad B_0(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon), \quad H(\varepsilon) = E + \sum_1^\infty \overline{\overline{H}}_k \varepsilon^k \right).$$

Приравнивание в полученном равенстве матричных коэффициентов при одинаковых степенях ε позволяет получить набор однотипных алгебраических матричных уравнений вида

$$\Lambda_0 \overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k \Lambda_0 = \Lambda_k - P_k, \quad k \geq 1;$$

$$P_1 = B_1, \quad P_k = B_k + \sum_{j=1}^{k-1} (B_j \overline{\overline{H}}_{k-j} - \overline{\overline{H}}_{k-j} \Lambda_j), \quad k > 1.$$

откуда последовательно и однозначно определяются все диагональные Λ_m и бездиагональные $\overline{\overline{H}}_m$, $m \geq 1$, матрицы, и при этом

$$\Lambda_m = \overline{P}_m, \quad \overline{\overline{H}}_m = \{h_{jkm}\}, \quad j \neq k, \quad h_{jkm} = \frac{p_{jkm}}{\sigma_{jk}}, \quad j, k = \overline{1, n}, \quad m \geq 1.$$

Решение задачи (3) с учетом теоремы 2 будем искать в виде

$$y = H(\tau, \varepsilon) \tau^{\Lambda_0(\varepsilon)} C(\varepsilon), \quad H(\tau, \varepsilon) = E + \sum_1^\infty H_k(\varepsilon) \tau^k;$$

при этом матрицы $B(\tau, \varepsilon)$, $H(\tau, \varepsilon)$ и $\Lambda_0(\varepsilon)$ удовлетворяют матричному уравнению

$$\tau \dot{H} = B(\tau, \varepsilon) H - H \Lambda_0(\varepsilon),$$

имеющему в силу теоремы 1 единственное решение вида

$$H(\tau, \varepsilon) = E + \sum_1^\infty H_k(\varepsilon) \tau^k.$$

Для нахождения коэффициентов $H_k(\varepsilon)$ приравняем в указанном матричном уравнении коэффициенты при одинаковых степенях τ и в результате получим набор простых алгебраических матричных уравнений

$$m H_m(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon) \overline{\overline{H}}_m(\varepsilon) - \overline{\overline{H}}_m(\varepsilon) \Lambda_0(\varepsilon) + Q_m(\varepsilon),$$

$$Q_m(\varepsilon) = B_m(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{m-1} B_j(\varepsilon) H_{m-j}(\varepsilon), \quad Q_1(\varepsilon) = B_1(\varepsilon), \quad m \geq 2,$$

откуда последовательно и однозначно определяются все диагональные $\overline{\overline{H}}_m(\varepsilon)$ и бездиагональные $\overline{\overline{H}}_m(\varepsilon)$, $m \geq 1$, матрицы; при этом

$$\overline{\overline{H}}_m(\varepsilon) = \frac{\overline{Q}_m(\varepsilon)}{m}, \quad \overline{Q}_m(\varepsilon) = \{q_{jkm}(\varepsilon)\}, \quad \overline{\overline{H}}_m(\varepsilon) = \{h_{jkm}(\varepsilon)\}, \quad h_{jkm}(\varepsilon) = -\frac{q_{jkm}(\varepsilon)}{\sigma_{jk}(\varepsilon) - m},$$

$$\sigma_{jk}(\varepsilon) \equiv \lambda_{0j}(\varepsilon) - \lambda_{0k}(\varepsilon), \quad j \neq k, \quad m \geq 1, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Таким образом, при достаточно малых $|\varepsilon| \ll 1$ с учетом проведенных преобразований решение исходной задачи Коши (1а) может быть представлено в виде

$$x = S_0(\varepsilon) H(t + \varepsilon, \varepsilon) (t + \varepsilon)^{\Lambda_0(\varepsilon)} C,$$

где постоянный вектор C однозначно определяется начальным условием $x(0, \varepsilon) = x^0$, позволяя получить окончательный ответ

$$x = S_0(\varepsilon) H(t + \varepsilon, \varepsilon) \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(\varepsilon)} H^{-1}(\varepsilon, \varepsilon) S_0^{-1}(\varepsilon) x_0,$$

где все сингулярности полученного решения, отражающие структуру степенного погранслоя, полностью определяются матричной функцией

$$\left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(0)} = \text{diag} \left\{ \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{\lambda_{01}(0)}, \dots, \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{\lambda_{0n}(0)} \right\}.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. Если спектр $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ матрицы $A(-\varepsilon) = A_0(\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (9) и для спектра $\{\lambda_{0j}(0)\}_1^n$ матрицы $A(0)$ справедливы неравенства $\operatorname{Re} \lambda_j(0) \leq 0$, $j = \overline{1, n}$, то сингулярно возмущенная задача Коши (1а) при достаточно малых $0 < \varepsilon < 1$ однозначно разрешима, ее точное решение ограничено на отрезке $[0, 1]$ и может быть представлено в квазирегулярной форме.

Описанный алгоритм несколько усложняется при его реализации для аналога неавтономных тихоновских систем вида (1) с подвижной особой точкой.

Предполагая, что в системе (1) все матричные функции $A_{jk}(t)$, $j, k = 1, 2$, аналитичны в области $|t| < 1 + 2\delta$, $\delta > 0$, после замены $\tau = t + \varepsilon$ получим задачу Коши:

$$\begin{cases} \tau \dot{x} = A_{11}(\tau, \varepsilon)x + A_{12}(\tau, \varepsilon)z, & x(\varepsilon, \varepsilon) = x_0, \\ \dot{z} = A_{21}(\tau, \varepsilon)x + A_{22}(\tau, \varepsilon)z, & z(\varepsilon, \varepsilon) = z_0, \end{cases}$$

где

$$A_{ij}(\tau - \varepsilon) = A_{ij}(\tau, \varepsilon) = \sum_0^\infty A_{ijk}(\varepsilon)\tau^k, \quad i, j = 1, 2, \quad k \geq 0,$$

которая после невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon| < 1$ замены

$$x = S_0(\varepsilon)y, \quad S_0^{-1}(\varepsilon)A_{11}(-\varepsilon)S_0(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}$$

(построение которой аналогично предыдущему), приводится к более удобной для последующего анализа начальной задаче:

$$\begin{cases} \tau \dot{y} = A(\tau, \varepsilon)y + B(\tau, \varepsilon)z, & y(\varepsilon, \varepsilon) = y_0, \\ \dot{z} = P(\tau, \varepsilon)y + Q(\tau, \varepsilon)z, & z(\varepsilon, \varepsilon) = z_0, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A(\tau, \varepsilon) &= \Lambda_0(\varepsilon) + \sum_1^\infty A_k(\varepsilon)\tau^k, & B(\tau, \varepsilon) &= \sum_0^\infty B_k(\varepsilon)\tau^k, \\ P(\tau, \varepsilon) &= \sum_0^\infty P_k(\varepsilon)\tau^k, & Q(\tau, \varepsilon) &= \sum_0^\infty Q_k(\varepsilon)\tau^k. \end{aligned}$$

Решение задачи (4) будем искать в виде

$$y = H(\tau, \varepsilon)\tau^{\Lambda_0(\varepsilon)}\overline{H}_0C \in \mathbb{R}^n, \quad z = \tau F(\tau, \varepsilon)\tau^{\Lambda_0(\varepsilon)}C \in \mathbb{R}^m$$

(здесь диагональная матрица $\overline{H}_0$ и постоянный вектор $\vec{C}$ определяются начальными условиями), при этом имеет место соотношение:

$$\begin{cases} \tau \dot{H}\overline{H}_0 = A(\tau, \varepsilon)H\overline{H}_0 - H\Lambda_0(\varepsilon)\overline{H}_0 + \tau B(\tau, \varepsilon)F, \\ \tau \dot{F} = P(\tau, \varepsilon)H\overline{H}_0 + \tau Q(\tau, \varepsilon)F - F(E + \Lambda_0(\varepsilon)). \end{cases} \quad (5)$$

Приравняв в (5) коэффициенты при одинаковых степенях τ и получим набор достаточно простых алгебраических матричных уравнений, последовательное решение которых позволяет найти все необходимые матрицы. Действительно, на первом шаге имеем уравнение

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon), \quad P_0(\varepsilon)\overline{H}_0 = F_0(\varepsilon)(E + \Lambda_0(\varepsilon)),$$

откуда находится $F_0(\varepsilon) = P_0(\varepsilon)\overline{H}_0(E + \Lambda_0(\varepsilon))^{-1}$.

На втором шаге получим однотипное матричное уравнение

$$\begin{cases} H_1(\varepsilon) = \Lambda_0(\varepsilon)\overline{H}_1(\varepsilon) - \overline{H}_1(\varepsilon)\Lambda_0(\varepsilon) + G_1(\varepsilon), \\ F_1(\varepsilon) = R_1(\varepsilon) - F_1(\varepsilon)(E + \Lambda_0(\varepsilon)), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} G_1(\varepsilon) &= (A_1(\varepsilon)\overline{H}_0 + B_0(\varepsilon)F_0(\varepsilon))\overline{H}_0^{-1} = \{g_{jk1}(\varepsilon)\}_1^n, \\ R_1(\varepsilon) &= (P_0(\varepsilon)H_1(\varepsilon) + P_1(\varepsilon)\overline{H}_0 + Q_1(\varepsilon)F_0(\varepsilon)), \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned}\overline{H}_1(\varepsilon) &= \overline{G}_1(\varepsilon), \quad \overline{\overline{H}}_1(\varepsilon) = \{h_{jk1}(\varepsilon)\}_1^n, \quad h_{jk1}(\varepsilon) = g_{jk1}(\varepsilon)/(1 - \sigma_{jk1}(\varepsilon)), \quad j \neq k; \\ F_1(\varepsilon) &= R_1(\varepsilon)(2E + \Lambda_0(\varepsilon))^{-1}, \quad R_1(\varepsilon) = (P_0(\varepsilon)H_1(\varepsilon) + P_1(\varepsilon))H_0 + Q_0(\varepsilon)F_0(\varepsilon).\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс (с учетом условия $\sigma_{jk}(\varepsilon) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), по аналогичной схеме однозначно определяем все компоненты матричных рядов (5), что дает возможность (возвращаясь к исходным переменным) записать точное решение для второй компоненты решения задачи (1):

$$z(t, \varepsilon) = F(t + \varepsilon, \varepsilon) \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(\varepsilon) + E} F^{-1}(\varepsilon, \varepsilon) z_0.$$

Аналогичным образом определяется и первая компонента решения задачи (1):

$$x(t, \varepsilon) = S(\varepsilon)H(t + \varepsilon, \varepsilon) \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(\varepsilon)} H^{-1}(\varepsilon, \varepsilon) S^{-1}(\varepsilon) x_0.$$

При этом постоянная диагональная матрица $\overline{H}_0$ определяется соотношением

$$\overline{H}_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-\Lambda_0(\varepsilon)} H^{-1}(\varepsilon, \varepsilon) S_0^{-1}(\varepsilon) x_0 \overline{Z}_0^{-1} F(\varepsilon, \varepsilon) \varepsilon^{\Lambda_0(\varepsilon) + E} = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где $\overline{Z}_0$ – постоянная квадратная диагональная матрица, соответствующая начальному вектору z_0 . Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 4. Если спектр $\{\lambda_j(\varepsilon)\}_1^n$ матрицы $A_{11}(-\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам $\operatorname{Re} \lambda_j(\varepsilon) \leq -1$, $j = \overline{1, n}$, $\det \overline{Z}_0 \neq 0$, то при выполнении условий

$$\sigma_{jk}(\varepsilon) \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{1, n}$$

и достаточно малых $0 < \varepsilon < 1$ сингулярно возмущенная задача Коши (1) однозначно разрешима, ее точное решение ограничено на отрезке $[0, 1]$ и может быть представлено в квазирегулярной форме.

В заключение отметим, что для сингулярно возмущенных начальных задач с подвижной особой точкой (1а) и (1) при выполнении вышеуказанных условий построены точные решения со степенным погранслоем, представимые в квазирегулярной форме, достаточно удобной как для качественного анализа, так и для численной реализации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов С. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 3. С. 525–572.
2. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
3. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
4. Сафонов В. Ф. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 3. С. 628–653.
5. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
6. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
7. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
9. Коняев Ю. А. Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений // Матем. сб. 1993. № 12. С. 133–144.

Российский университет дружбы народов

Поступило
02.12.2004
Исправленный вариант
28.06.2005