Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Пулькина, Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 435–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:41:44

УДК 517.95

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Л. С. Пулькина

В этой статье рассмотрена смешанная задача для гиперболического уравнения с граничным условием Неймана и нелокальным интегральным условием. Обосновано утверждение о существовании единственного обобщенного решения поставленной задачи. Доказательство единственности базируется на полученной в работе априорной оценке во введенном функциональном пространстве, а существование обобщенного решения доказано методом Галеркина.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим для уравнения

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

в области

$$\mathcal{D} = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$$

задачу с начальными данными Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0, t) = 0, \quad (3)$$

и нелокальным условием

$$\int_0^l u(x, t) dx = 0, \quad (4)$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы и удовлетворяют условиям согласования:

$$\int_0^l \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^l \psi(x) dx = 0;$$

$a(x, t) > 0$ в области $\mathcal{D}$.

Заметим, что однородность условий (3), (4) не ограничивает общности. Действительно, если $u_x(0, t) = \mu(t)$, $\int_0^l u(x, t) dx = \lambda(t)$, то введя новую неизвестную функцию $\tilde{u} = u - W$, где

$$W(x, t) = \left(x - \frac{l}{2}\right)\mu(t) + \frac{1}{l}\lambda(t),$$

придем к задаче для уравнения $\mathcal{L}u = F(x, t)$, где $F = f - \mathcal{L}W$, с начальными данными

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \left(x - \frac{l}{2}\right)\mu(0) + \frac{1}{l}\lambda(0), \quad \Psi(x) = \psi(x) - \left(x - \frac{l}{2}\right)\mu'(0) + \frac{1}{l}\lambda'(0)$$

и однородными условиями (3), (4).

Интегральные условия вида (4) встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [1], процессов распространения тепла [2], [3], процесса влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4].

Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений были ранее рассмотрены в работах [5]–[7]. В [5] изучена смешанная задача для однородного уравнения колебаний струны с классическими начальными данными и нелокальными условиями, содержащими как интегралы от искомого решения, так и его граничные значения. В [7] получено представление решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны с граничным условием Дирихле и интегральным условием (4). В [6] рассмотрена смешанная задача для уравнения (1) с условиями (2)–(4), но для случая $c(x, t) \equiv 0$. Заметим, что в этом случае, а также если $c_x(x, t) \equiv 0$, задачу (1)–(4) можно свести к смешанной задаче с локальными граничными условиями. Действительно, интегрируя (1) по x от 0 до l , считая $u(x, t)$ решением поставленной задачи, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^l u \, dx - a(l, t)u_x(l, t) + a(0, t)u_x(0, t) = \int_0^l f(x, t) \, dx,$$

и в силу условий (3), (4)

$$a(l, t)u_x(l, t) = - \int_0^l f(x, t) \, dx.$$

В предлагаемой работе доказано существование единственного обобщенного решения задачи (1)–(4) для $c(x, t) \not\equiv 0$, $c_x(x, t) \not\equiv 0$. В этом случае интегральное условие нельзя заменить граничным.

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0^2(\mathcal{D}) &= \left\{ u(x, t) : u \in C^2(\overline{\mathcal{D}}), \quad u_x(0, t) = 0, \quad \int_0^l u(x, t) \, dx = 0 \right\}, \\ \tilde{C}_T^2(\mathcal{D}) &= \left\{ v(x, t) : v \in C^2(\overline{\mathcal{D}}), \quad v(x, T) = 0, \quad \int_0^l v(x, t) \, dx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Замыкание этих пространств по норме

$$\|u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})}^2 = \int_0^T \int_0^l \left[u^2 + \left(\int_x^l u(\xi, t) \, d\xi \right)^2 + \left(\int_x^l u_t(\xi, t) \, d\xi \right)^2 \right] dx \, dt$$

обозначим соответственно $\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$, $\widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$.

Введем понятие обобщенного решения. Пусть $u(x, t)$ – классическое решение задачи (1)–(4).

Рассмотрим оператор

$$\ell v = \int_x^l (\xi - x) v(\xi, t) d\xi, \quad v(x, t) \in \tilde{C}_T^2(\mathcal{D}).$$

Умножим обе части (1) на ℓv и проинтегрируем по области $\mathcal{D}$. Полученное равенство преобразуем, интегрируя слева по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l u_{tt} \int_x^l (\xi - x) v d\xi dx dt &= \int_0^T \int_x^l (\xi - x) v d\xi \int_x^l u_{tt} d\xi|_0^l dt \\ &- \int_0^T \int_0^l \int_x^l u_{tt} d\xi \int_x^l v d\xi dx dt = \int_0^T \int_x^l (\xi - x) v d\xi \int_x^l u_{tt} d\xi|_0^l dt \\ &- \int_0^l \int_x^l u_t d\xi \int_x^l v d\xi|_0^T dx + \int_0^l \int_x^l u_t d\xi \int_x^l v_t d\xi dx dt, \\ \int_0^T \int_0^l (au_x)_x \int_x^l (\xi - x) v d\xi dx dt &= \int_0^T au_x \int_x^l (\xi - x) v d\xi|_0^l dt \\ &+ \int_0^T \int_0^l au_x \int_x^l v d\xi dx dt \\ &= \int_0^T au_x \int_x^l (\xi - x) v d\xi|_0^l dt + \int_0^T au \int_x^l v d\xi|_0^l dt \\ &- \int_0^T \int_0^l a_x u \int_x^l v d\xi dx dt + \int_0^T \int_0^l auv dx dt, \\ \int_0^T \int_0^l cu \int_x^l (\xi - x) v d\xi dx dt &= - \int_0^T c \int_x^l u d\xi \int_x^l (\xi - x) v d\xi|_0^l dt \\ &+ \int_0^T \int_0^l c_x \left(\int_x^l u d\xi \right) \ell v dx dt - \int_0^T \int_0^l c \int_x^l u d\xi \int_x^l v d\xi dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\int_0^l u dx = 0$, $u_x(0, t) = 0$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $v(x, T) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l \left[\int_x^l u_t d\xi \int_x^l v_t d\xi - auv - c \int_x^l u d\xi \int_x^l v d\xi + a_x u \int_x^l v d\xi + c_x \int_x^l u d\xi \ell v \right] dx dt \\ = \int_0^T \int_0^l f \ell v dx dt - \int_0^l \int_x^l \psi d\xi \int_x^l v(\xi, 0) d\xi dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что все слагаемые, входящие в (5), имеют смысл и для функций $u \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$, $v(x, t) \in \widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$. Из определения пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$ видно, что если $u \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$, то $\int_x^l u_t d\xi \in L_2(\mathcal{D})$. Но тогда $\int_x^l u d\xi \in H^1(\mathcal{D})$, а функции из H^1 имеют след, принадлежащий L_2 . Будем понимать первое из условий Коши в следующем смысле: $\int_x^l u(\xi, 0) d\xi = \int_x^l \varphi(\xi) d\xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным решением задачи (1)–(4) будем называть функцию $u(x, t) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$, удовлетворяющую для всех $v(x, t) \in \mathcal{H}_T(\mathcal{D})$ тождеству (5) и начальному условию*

$$\int_x^l u(\xi, 0) d\xi = \int_x^l \varphi(\xi) d\xi. \quad (6)$$

2. Единственность решения.

ТЕОРЕМА 1. Если $0 < a_0 \leq a(x, t) \leq A_0$, $|a_x, a_t, a_{xx}| \leq A_1$, $0 \leq c_0 \leq c(x, t) \leq C_0$, $|c_x, c_t| \leq C_1$, то существует не более одного обобщенного решения задачи (1)–(4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x, t) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$ – обобщенное решение задачи (1)–(4) с $f(x, t) = 0$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$. Покажем, что тогда $u(x, t) \equiv 0$ в $\mathcal{D}$.

Возьмем произвольное $\tau \in [0, T]$ и рассмотрим функцию

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x, \eta) d\eta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Определенная таким образом функция принадлежит $\widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$. Подставим ее в тождество (5), где $f = \varphi = \psi = 0$. Так как $v_t(x, t) = -u(x, t)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l \int_x^l u_t d\xi \int_x^l v_t d\xi dx dt &= - \int_0^\tau \int_0^l \int_x^l u_t d\xi \int_x^l u d\xi dx dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^l \left(\int_0^\tau u(\xi, \tau) d\xi \right)^2 dx, \\ \int_0^T \int_0^l a u v dx dt &= - \int_0^\tau \int_0^l a v_t v dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l a(x, 0) v^2(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t v^2 dx dt, \\ \int_0^T \int_0^l c \int_x^l u d\xi \int_x^l v d\xi dx dt &= - \int_0^\tau \int_0^l c \int_x^l v_t d\xi \int_x^l v d\xi dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l c \left(\int_0^\tau v(\xi, 0) d\xi \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l c_t \left(\int_x^l v d\xi \right)^2 dx dt, \\ \int_0^T \int_0^l a_x u \int_x^l v d\xi dx dt &= \int_0^\tau \int_0^l a_{xx} \int_x^l u d\xi \int_x^l v d\xi dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a_x v \int_x^l u d\xi dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом, если $u(x, t)$ – решение однородной задачи (1)–(4), то

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\left(\int_x^l u(\xi, \tau) d\xi \right)^2 + a(x, 0) v^2(x, 0) + c(x, t) \left(\int_x^l v(\xi, 0) d\xi \right)^2 \right] dx \\ = \int_0^\tau \int_0^l \left(a_{xx} \int_x^l u d\xi \int_x^l v d\xi - a_x v \int_x^l u d\xi + c_x \int_x^l u d\xi \int_x^l (\xi - x) v d\xi \right) dx dt \\ - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l \left(a_t v^2 + c_t \left(\int_x^l v d\xi \right)^2 \right) dx dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Подынтегральное выражение первого слагаемого в правой части (7) оценим с помощью неравенства Коши и заметим, что

$$\int_x^l (\xi - x) v d\xi = \int_x^l \int_\xi^l v(\xi', t) d\xi' d\xi.$$

Тогда в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\left(\int_x^l \int_\xi^l v \, d\xi' \, d\xi \right)^2 \leq l \int_0^l \left(\int_\xi^l v \, d\xi' \right)^2 d\xi,$$

и мы получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[\left(\int_x^l u(\xi, \tau) \, d\xi \right)^2 + a(x, 0)v^2(x, 0) + c(x, 0) \left(\int_x^l v(\xi, 0) \, d\xi \right)^2 \right] dx \\ & \leq \int_0^\tau \int_0^l \left[(a_{xx}^2 + |c_t| + l^2) \left(\int_x^l v \, d\xi \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + (a_x^2 + c_x^2 + |a_t|)v^2 + 2 \left(\int_x^l u \, d\xi \right)^2 \right] dx \, dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем функцию $w(x, t) = \int_0^t u(x, \eta) \, d\eta$. Тогда $v(x, t) = w(x, \tau) - w(x, t)$, $v(x, 0) = w(x, \tau)$, $v^2(x, t) \leq 2w^2(x, \tau) + 2w^2(x, t)$ и неравенство (8) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[\left(\int_x^l u(\xi, \tau) \, d\xi \right)^2 + a_0 v^2(x, 0) + c_0 \left(\int_x^l v(\xi, 0) \, d\xi \right)^2 \right] dx \, dt \\ & \leq M \int_0^\tau \int_0^l \left[\left(\int_x^l w(\xi, t) \, d\xi \right)^2 + w^2(x, t) + \left(\int_x^l u(\xi, t) \, d\xi \right)^2 \right] dx \, dt \\ & \quad + M\tau \int_0^l \left[\left(\int_x^l w(\xi, \tau) \, d\xi \right)^2 + w^2(x, \tau) \right] dx, \end{aligned}$$

где $M = 2 \max\{(a_{xx}^2 + |c_t| + l^2), (a_x^2 + c_x^2 + |a_t|), 1\}$. Воспользуемся теперь произвольным выбором τ . Обозначим $\nu = \min\{a_0, c_0\}$. Если $\tau \in [0, \nu/(2M)]$, то $\nu - M\tau \geq \nu/2$. Обозначим $m = \min\{1, \nu/2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & m \int_0^l \left[\left(\int_x^l u(\xi, \tau) \, d\xi \right)^2 + w^2(x, \tau) + \left(\int_x^l w(\xi, \tau) \, d\xi \right)^2 \right] dx \\ & \leq M \int_\tau \int_0^l \left[\left(\int_x^l u(\xi, t) \, d\xi \right)^2 + w^2(x, t) + \left(\int_x^l w(\xi, t) \, d\xi \right)^2 \right] dx \, dt \end{aligned} \quad (9)$$

и из леммы 7.1 [8] следует, что

$$m \int_0^l \left[\left(\int_x^l u(\xi, \tau) \, d\xi \right)^2 + w^2(x, \tau) + \left(\int_x^l w(\xi, \tau) \, d\xi \right)^2 \right] dx = 0$$

для $\tau \in [0, \nu/(2M)]$. Но тогда для этих значений τ $\int_x^l u(\xi, \tau) \, d\xi = 0$ для всех $x \in [0, l]$, поэтому и $u(x, \tau) = 0$, $x \in [0, l]$, $\tau \in [0, \nu/(2M)]$. Повторяя рассуждения для $t \in [\nu/(2M), \nu/M]$, убедимся, что $u(x, t) = 0$ и на этом промежутке, а через конечное число шагов $u(x, t) = 0$ в $\mathcal{D}$.

3. Существование решения. Для доказательства существования решения применим метод Галеркина. Предварительно получим неравенство, которое понадобится для доказательства основной теоремы.

ЛЕММА. Если $f \in L_2(\mathcal{D})$, $\varphi, \psi \in L_2(0, l)$, коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям теоремы 1, то существует постоянная $C > 0$ такая, что для решения $u(x, t) \in \tilde{C}_0^2(\mathcal{D})$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l u^2(x, \tau) dx + \int_0^l \left(\int_x^l u(\xi, \tau) d\xi \right)^2 dx + \int_0^l \left(\int_x^l u_t(\xi, \tau) d\xi \right)^2 dx \\ & \leq \tilde{C} (\|f\|_{L_2(D)}^2 + \|\varphi\|_{L_2(0, l)}^2 + \|\psi\|_{L_2(0, l)}^2). \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор

$$\ell(u_t) = \int_x^l (\xi - x) u_t(\xi, t) d\xi.$$

Преобразуем скалярное произведение $-2(\mathcal{L}u, \ell(u_t))_{L_2(\mathcal{D}_\tau)}$, где $\mathcal{D}_\tau = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < \tau \leq T\}$:

$$-2(\mathcal{L}u, \ell(u_t))_{L_2(D_\tau)} = -2 \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt} - (au_x)_x + cu) \ell(u_t) dx dt = \sum_{i=1}^3 I_i.$$

Проинтегрируем I_1 по частям сначала по x , а затем по t . Принимая во внимание, что $\int_0^l u dx = 0$ и $u_t(x, 0) = \psi(x)$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^\tau \int_0^l u_{tt} \int_x^l (x - \xi) u_t d\xi dx dt \\ &= -2 \int_0^\tau \int_x^l (x - \xi) u_t d\xi \int_x^l u_{tt} d\xi \Big|_0^l dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l u_t d\xi \int_x^l u_{tt} d\xi dx dt \\ &= 2 \int_0^l \left(\int_x^l u_t d\xi \right)^2 \Big|_0^\tau dx - 2 \int_0^\tau \int_0^l \int_x^l u_t d\xi \int_x^l u_{tt} d\xi dx dt, \end{aligned}$$

и тогда

$$I_1 = \int_0^l \left(\int_x^l u_t(\xi, t) d\xi \right)^2 dx - \int_0^l \left(\int_x^l u_t(\xi, 0) d\xi \right)^2 dx.$$

Проинтегрируем I_2 два раза по x :

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_0^\tau \int_0^l (au_x)_x \int_x^l (\xi - x) u_t d\xi dx dt \\ &= 2 \int_0^\tau au_x \int_x^l (\xi - x) u_t d\xi \Big|_0^l dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l au_x \int_x^l u_t d\xi dx dt \\ &= 2 \int_0^\tau au \int_x^l u_t d\xi \Big|_0^l dt - 2 \int_0^\tau \int_0^l a_x u \int_x^l u_t d\xi dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l auu_t dx dt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее слагаемое по t , получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^l a(x, \tau) u^2(x, \tau) dx - \int_0^l a(x, 0) u^2(x, 0) dx \\ &\quad - 2 \int_0^\tau \int_0^l a_x u \int_x^l u_t d\xi dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a_t u^2 dx dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} -2(\mathcal{L}u, \ell u)_{L_2} = & \int_0^l \left(a(x, \tau) u^2(x, \tau) + \left(\int_x^l u_t(\xi, \tau) d\xi \right)^2 \right) dx \\ & - \int_0^\tau \int_0^l a_t u^2 dx dt - 2 \int_0^\tau \int_0^l a_x u \int_x^l u_t d\xi dx dt \\ & - 2 \int_0^\tau \int_0^l cu \int_x^l (\xi - x) u_t d\xi dx dt \\ & - \int_0^l \left(a(x, 0) u^2(x, 0) + \left(\int_x^l u_t(\xi, 0) d\xi \right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что $u(x, t)$ – решение задачи (1)–(4), перепишем последнее равенство так:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left(a(x, \tau) u^2(x, \tau) + \left(\int_x^l u_t(\xi, \tau) d\xi \right)^2 \right) dx \\ & = \int_0^\tau \int_0^l a_t(x, t) u^2(x, t) dx dt + \int_0^l \left(a(x, 0) \varphi^2(x) + \left(\int_x^l \psi(\xi) d\xi \right)^2 \right) dx \\ & \quad + 2 \int_0^\tau \int_0^l a_x u \int_x^l u_t d\xi dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l cu \int_x^l (\xi - x) u_t d\xi dx dt \\ & \quad - 2 \int_0^\tau \int_0^l f(x, t) \int_x^l (\xi - x) u_t d\xi dx dt. \end{aligned}$$

Применив теперь неравенства Коши к последним трем интегралам правой части этого равенства и учитывая, что

$$\left(\int_x^l (\xi - x) u_t d\xi \right)^2 = \left(\int_x^l \int_\xi^l u_t(\xi', t) d\xi' d\xi \right)^2 \leq \int_0^l \left(\int_x^l u d\xi \right)^2 dx,$$

откуда

$$\int_0^\tau \int_0^l \left(\int_x^l (\xi - x) u_t d\xi \right)^2 dx dt \leq l \int_0^\tau \int_0^l \left(\int_x^l u_t d\xi \right)^2 dx dt,$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned} & m \int_0^l \left[u^2(x, \tau) + \left(\int_x^l u_t(\xi, \tau) d\xi \right)^2 \right] dx \\ & \leq M \int_0^\tau \int_0^l \left[u^2 + \left(\int_x^l u_t(\xi, t) d\xi \right)^2 \right] dx dt \\ & \quad + \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt + l \int_0^l \psi^2(\xi) dx + A_0 \int_0^l \varphi^2(x) dx, \end{aligned} \quad (11)$$

где $m = \min\{1, a_0\}$, $M = \max\{2A_1^2, 1 + 2l\}$. Теперь, используя лемму 7.1 ([3]), имеем

$$\begin{aligned} & m \int_0^l \left[u^2(x, \tau) + \left(\int_x^l u_t(\xi, \tau) d\xi \right)^2 \right] dx \\ & \leq e^{\frac{M}{m}T} [\|f\|_{L_2(\mathcal{Q})}^2 + A_0 \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2 + l \|\psi\|_{L_2(0,l)}^2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Положив здесь $\tilde{C} = \frac{M_1}{m} \exp(MT/m)$, где $M_1 = \max\{1, A_0, l\}$, получим неравенство (10).

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x, t) \in L_2(\mathcal{D})$, $\varphi(x), \psi(x) \in L_2(0, l)$ и выполняются условия теоремы 1, то обобщенное решение задачи (1)–(4) существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0, l)$ замыкание множества

$$\widetilde{C}_0^2[0, l] = \left\{ w(x) \in C^2[0, l], \quad w_x(0) = 0, \quad \int_0^l w(x) dx = 0 \right\}$$

по норме

$$\|w\|_{\widetilde{\mathcal{H}}_0(0, l)}^2 = \int_0^l \left(w^2 + \left(\int_x^l w d\xi \right)^2 \right) dx.$$

Так как по определению $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0, l)$ в нем всюду плотно множество $\widetilde{C}_0^2[0, l]$, которое является подпространством сепарабельного пространства $C^2[0, l]$, то можно выбрать систему линейно независимых функций $\{w_k(x)\}$ из $\widetilde{C}_0^2[0, l]$, полную в $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0, l)$.

Обозначим $\mathcal{H}_0^m(0, l)$ конечномерное подпространство пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_0(0, l)$ с базисом $\{w_k(x)\}_{k=1}^m$. Приближенное решение задачи (1)–(4), удовлетворяющее начальным условиям (2) с

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^m \varphi_k w_k(x), \quad \psi_m(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k w_k(x), \quad (13)$$

будем искать в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) w_k(x) \quad (14)$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_{mtt} - (au_{mx})_x + cu_m) \ell(w_k) dx = \int_0^l f \ell(w_k) dx; \quad (15)$$

кроме того, $d_k(0) = \varphi_k$, $d'_k(0) = \psi_k$, где φ_k, ψ_k – коэффициенты сумм (13), аппроксимирующих при $m \rightarrow \infty$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно в норме $L_2(0, l)$.

Интегрированием по частям преобразуем левую часть (15). Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m d_k''(t) \left(\int_x^l w_k(\xi) d\xi, \int_x^l w_l(\xi) d\xi \right)_{L_2(0, l)} \\ & + \sum_{k=1}^m d_k(t) \int_0^l \left(a(x, t) w_l(x) - a_x(x, t) \int_x^l w_l(\xi) d\xi \right) w_k(x) dx \\ & - \sum_{k=1}^m d_k(t) \int_0^l c(x, t) w_k(x) \int_x^l \int_\xi^l w_l(\eta) d\eta d\xi dx = f_k(t), \end{aligned} \quad (16)$$

где $f_k(t) = - \int_0^l f(x, t) w_k(x) dx$. Мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $d_k(t)$. Заметим, что из линейной независимости системы функций $w_k(x)$ следует линейная независимость функций $\int_x^l w_k(\xi) d\xi$. Действительно, если бы это было не так, то нашлись бы такие α_k , что

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \int_x^l w_k(\xi) d\xi = 0, \quad \sum_{k=1}^m \alpha_k^2 \neq 0.$$

Но для любого m

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \int_x^l w_k(\xi) d\xi = \int_x^l \sum_{k=1}^m \alpha_k w_k(\xi) d\xi = 0.$$

Так как последнее равенство выполняется для всех $x \in (0, l)$, то

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k w_k(\xi) d\xi = 0,$$

что противоречит линейной независимости функций $w_k(x)$.

В силу линейной независимости функций $\int_x^l w_k(\xi) d\xi$ определитель матрицы с элементами $(\int_x^l w_k(\xi) d\xi, \int_x^l w_l(\xi) d\xi)$ отличен от нуля, и система (16) может быть разрешена относительно старших производных и, стало быть, задача Коши для нее с данными $d_k(0) = \varphi_k$, $d'_k(0) = \psi_k$ имеет единственное решение. Таким образом, для любого m существует единственная функция $u_m(x, t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) w_k(x)$. Докажем теперь, что построенная последовательность $\{u_m(x, t)\}$ сходится и ее предел является искомым обобщенным решением задачи (1)–(4). Умножим (15) на $d'_k(t)$ и просуммируем от 1 до m . Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u_{mtt} - (au_{mx})_x + cu_m) \int_x^l (\xi - x) u_{mt}(\xi, t) d\xi dx \\ &= \int_0^l f(x, t) \int_x^l (\xi - x) u_{mt}(\xi, t) d\xi dx. \end{aligned}$$

Проинтегрируем теперь полученное тождество по t от 0 до τ и, используя вычисления, проделанные при доказательстве леммы, получим оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^l u_m^2(x, \tau) dx + \int_0^l \left(\int_x^l u_{mt}(\xi, \tau) d\xi \right)^2 dx \\ & \leq \tilde{C} (\|f\|_{L_2(\mathcal{D})}^2 + \|\varphi_m\|_{L_2(0, l)}^2 + \|\psi_m\|_{L_2(0, l)}^2). \end{aligned}$$

Так как

$$\|\varphi_m(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^m |\varphi_k|^2 \leq \|\varphi(x)\|_{L_2}^2, \quad \|\psi_m(x)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^m |\psi_k|^2 \leq \|\psi(x)\|_{L_2}^2,$$

интегрируя теперь обе части этого неравенства по t от 0 до T , получим

$$\|u_m\|_{\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{D})}^2 \leq C (\|f\|_{L_2(\mathcal{D})}^2 + \|\varphi\|_{L_2(0, l)}^2 + \|\psi\|_{L_2(0, l)}^2), \quad (17)$$

где $C = \tilde{C}T$. Из (17) следует ограниченность последовательности $u_m(x, t)$, и, следовательно, возможность выделить из нее слабо сходящуюся подпоследовательность, за которой мы сохраним прежнее обозначение, к некоторому элементу $u(x, t) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$.

Покажем, что $u(x, t)$ и есть искомое обобщенное решение, т.е. для любой функции $v(x, t) \in \widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$ $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (5) и начальному условию

$$\int_x^l u(x, 0) dx = \int_x^l \varphi(x) dx.$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \int_x^l \varphi_m dx - \int_x^l \varphi dx &= \int_x^l (\varphi_m - \varphi) dx \leq \sqrt{l} \left(\int_0^l (\varphi_m - \varphi)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{l} \|\varphi_m - \varphi\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

начальное условие в форме (6) выполняется.

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ всех линейных комбинаций функций $\theta(t)w_k(x)$, где

$$\theta(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T), \quad \theta(T) = 0.$$

Очевидно, что $\theta(t)w_k(x) \in \tilde{C}_T^2(\mathcal{D})$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Покажем сначала, что тождество (5) справедливо для любой функции $v(x, t) = \theta(t)w_k(x)$. Для этого умножим обе части (15) на $\theta(t)$ и проинтегрируем по $t \in [0, T]$. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^l \left(\int_x^l u_m t d\xi \int_x^l v_t d\xi - au_m v - c \int_x^l u_m d\xi \int_x^l v d\xi \right) dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_0^l \left(a_x u_m \int_x^l v d\xi + c_x \int_x^l u_m d\xi \ell v \right) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^l f \ell v dx dt + \int_0^l \psi_m \ell v|_{t=0} dx, \end{aligned}$$

откуда вытекает (5), так как при $m \rightarrow \infty$ $u_m \rightarrow u$ слабо в $\widetilde{\mathcal{H}}_0(\mathcal{D})$.

Покажем теперь, что $\mathcal{M}$ всюду плотно в $\widetilde{\mathcal{H}}_T(\mathcal{D})$. Для этого достаточно установить плотность $\mathcal{M}$ в $\tilde{C}_T^2(\mathcal{D})$. Множество $\mathcal{M}$ можно рассматривать как множество всех линейных комбинаций функций $\tilde{w}_k(x)\theta(t)$, где $\theta(t) \in C^1[0, T]$, $\theta(T) = 0$, $\tilde{w}_k(x)$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_0(0, l)$ в скалярном произведении $(f, g) = \int_0^l (fg + \int_x^l f d\xi \int_x^l g d\xi) dx$, полученный в результате ортонормирования системы функций $w_k(x)$.

Пусть $\eta(x, t)$ – произвольная функция из $\tilde{C}_T^2(\mathcal{D})$. Так как для любого $t \in [0, T]$ $\eta(x, t)$, $\eta_t(x, t) \in L_2(0, l)$, их можно разложить в метрике $L_2(0, l)$ в сходящиеся ряды Фурье:

$$\eta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) \tilde{w}_k(x), \quad \eta_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta'_k(t) \tilde{w}_k(x),$$

где

$$\eta_k(t) = \int_0^l \eta(x, t) \tilde{w}_k(x), \quad \eta'_k(t) = \int_0^l \eta_t(x, t) \tilde{w}_k(x);$$

при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k^2(t) + \eta'^2_k(t)) = \int_0^l (\eta^2(x, t) + \eta_t^2(x, t)) dx. \quad (18)$$

Обозначим через $\eta_N(x, t) = \sum_{k=1}^N \eta_k(t) \tilde{w}_k(x)$ частичную сумму ряда Фурье. Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \|\eta - \eta_N\|_{\mathcal{H}(0,l)}^2 + \left\| \int_x^l (\eta_t - \eta_{Nt}) d\xi \right\|_{L_2(0,l)}^2 \\ &= \int_0^l \left[(\eta - \eta_N)^2 + \left(\int_x^l (\eta - \eta_N) d\xi \right)^2 \right] dx + \int_0^l \left(\int_x^l (\eta_t - \eta_{Nt}) d\xi \right)^2 dx \\ &\leq (1+l)(\|\eta - \eta_N\|_{L_2(0,l)}^2 + \|\eta_t - \eta_{Nt}\|_{L_2(0,l)}^2) = (1+l) \sum_{k=1+N}^{\infty} (\eta_k^2(t) + \eta_k'^2(t)). \end{aligned}$$

В силу (18)

$$\sum_{k=1+N}^{\infty} (\eta_k^2(t) + \eta_k'^2(t)) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\|\eta - \eta_N\|_{\mathcal{H}(\mathcal{D})}^2 = \int_0^T \left(\|\eta - \eta_N\|_{L_2(0,l)}^2 + \left\| \int_x^l (\eta_t - \eta_{Nt}) d\xi \right\|_{L_2(0,l)}^2 \right) dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученная в лемме априорная оценка справедлива и для решения смешанной задачи для уравнения (1) с граничным условием Дирихле $u(0, t) = 0$ и нелокальным интегральным условием с весом

$$\int_0^l xu(x, t) dx = 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
- [2] Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. P. 155–160.
- [3] Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
- [4] Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 1. С. 72–81.
- [5] Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
- [6] Bouziani A. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques // Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. 1997. V. 8. P. 53–70.
- [7] Beilin S. Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions // Electronic J. of Diff. Equations. 2001. V. 76. P. 1–8.
- [8] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: ИЛ, 1961.