Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Гриншпон, Вполне транзитивные однородно сепарабельные абелевы группы, *Матем. заметки*, 1997, том 62, выпуск 3, 471–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:44:53

ВПОЛНЕ ТРАНЗИТИВНЫЕ ОДНОРОДНО СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

С. Я. Гриншпон

Абелеву группу G без кручения назовем *однородно сепарабельной*, если существует такое семейство $\mathbf{C}$ однородных прямых слагаемых этой группы, что каждое конечное множество элементов группы G можно вложить в прямое слагаемое этой группы, являющееся прямой суммой некоторых групп семейства $\mathbf{C}$. Будем говорить в этом случае, что семейство $\mathbf{C}$ задает однородную сепарабельность группы G .

Заметим, что однородно сепарабельными группами являются, в частности, вполне разложимые абелевы группы без кручения, сепарабельные абелевы группы без кручения, однородно разложимые абелевы группы.

При изучении вполне характеристических подгрупп абелевых групп G без кручения интерес представляют группы, в которых каждая вполне характеристическая подгруппа имеет вид $G[v] = \{g \in G \mid \chi(g) \geq v\}$, где v – некоторая характеристика, т.е. последовательность, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞ . Такие редуцированные группы без кручения были названы в [1] *χ -группами*. (Заметим, что при рассмотрении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения можно ограничиться редуцированными группами, так как ненулевая подгруппа S абелевой группы без кручения $A = R \oplus V$, где R и V – редуцированная и делимая части соответственно группы A , вполне характеристична в A тогда и только тогда, когда $S = R_1 \oplus V$, где R_1 – вполне характеристическая подгруппа группы R [1, лемма 3.3]). Всякая χ -группа является вполне транзитивной группой, т.е. группой, в которой для любых двух элементов x и y таких, что $\chi(x) \leq \chi(y)$ ($\chi(x), \chi(y)$ – характеристики элементов x и y соответственно) существует эндоморфизм φ со свойством $\varphi(x) = y$ [1, с. 63] (в [1] такие группы назывались *транзитивными* группами). Обратное в общем случае неверно.

В настоящей статье получена характеристизация вполне транзитивных однородно сепарабельных групп, в частности, установлено, что любая вполне транзитивная однородно сепарабельная группа является χ -группой.

Пусть a – некоторый элемент абелевой группы G без кручения, p – простое число. Обозначим через $h_p(a)$ p -высоту элемента a , а через $\chi(a)$, $t(a)$ – характеристику и тип этого элемента соответственно. Далее пусть Π – множество всех простых чисел, а $\pi(G) = \{p \in \Pi \mid pG \neq \{0\}\}$. Если G – однородная группа, то $t(G)$ будет означать тип группы G , т.е. тип всех ее ненулевых элементов. Пусть G – однородно разложимая абелева группа без кручения, т.е. $G = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где A_i – однородные группы. Если собрать вместе компоненты A_i одного и того же типа и взять их прямую сумму, то мы получим каноническое (наименьшее однородное [2, с. 212]) разложение $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$, где G_t – однородные группы различных типов t .

ТЕОРЕМА. Пусть G – однородно сепарабельная редуцированная группа, $\mathbf{C} = \{A_i\}_{i \in I}$ – семейство однородных абелевых групп без кручения, задающих однородную сепарабельность группы G , T – множество типов групп A_i ($i \in I$). Следующие условия эквивалентны:

- 1) G – вполне транзитивная группа;
- 2) если G_1 – однородно разложимое прямое слагаемое группы G и $G_1 = \bigoplus_{t \in T_1} G_t$ – его каноническое разложение, то все группы G_t вполне транзитивны и $\pi(G_{t_1}) \cap \pi(G_{t_2}) = \emptyset$ при $t_1 \neq t_2$ ($t_1, t_2 \in T_1$);
- 3) каждая группа A_i ($i \in I$) вполне транзитивна и $\pi(A_{i_1}) \cap \pi(A_{i_2}) = \emptyset$, если $t(A_{i_1}) \neq t(A_{i_2})$;
- 4) группа G – однородно разложимая группа, причем $G_t = \{g \in G \mid t(g) = t\} \cup \{0\}$ – подгруппа группы G для всякого $t \in T$ и $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ – каноническое разложение группы G , в котором каждая группа G_t вполне транзитивна, и $\pi(G_{t_1}) \cap \pi(G_{t_2}) = \emptyset$ при $t_1 \neq t_2$ ($t_1, t_2 \in T$);
- 5) G – χ -группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1) и 2) доказана в [1, следствие 2.15]. Покажем 1) $\Rightarrow$ 3). Каждая группа A_i вполне транзитивна как прямое слагаемое вполне транзитивной группы [1, следствие 2.4]. Пусть $t(A_{i_1}) \neq t(A_{i_2})$ ($i_1, i_2 \in I$). Положим для определенности $t(A_{i_1}) \not\geq t(A_{i_2})$. Имеем $G = A_{i_1} \oplus B = A_{i_2} \oplus \mathbf{C}$. Пусть $0 \neq a \in A_{i_2}$, $a = a_1 + b$, где $a_1 \in A_{i_1}$, $b \in B$. Тогда если $a_1 \neq 0$, то $\chi(a) \leq \chi(a_1)$, чего быть не может, так как $t(A_{i_1}) \not\geq t(A_{i_2})$. Значит, $a_1 = 0$ и $A_{i_2} \subset B$. Имеем $B = A_{i_2} \oplus (\mathbf{C} \cap B)$ и поэтому $G = A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus (\mathbf{C} \cap B)$; $A_{i_1} \oplus A_{i_2}$ – однородно разложимая вполне транзитивная группа, следовательно, $\pi(A_{i_1}) \cap \pi(A_{i_2}) = \emptyset$ [1, предложение 2.12].

Установим 3) $\Rightarrow$ 4). Покажем вначале, что $G_t = \{g \in G \mid t(g) = t\} \cup \{0\}$ – подгруппа группы G ($t \in T$). Пусть $a_1, a_2 \in G_t$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Так как G – однородно сепарабельная группа и семейство групп $\{A_i\}_{i \in I}$ задает однородную сепарабельность этой группы, то a_1 и a_2 можно вложить в прямое слагаемое $A_{k_1} \oplus A_{k_2} \oplus \dots \oplus A_{k_s}$ группы G ($k_j \in I$, $j = \overline{1, s}$), причем можно считать, что для каждой группы A_{k_j} хотя бы один из элементов a_1, a_2 имеет в этой группе ненулевую координату. Хотя бы одно из слагаемых A_{k_j} ($j = \overline{1, s}$) имеет тип t , так как в противном случае из условия $\pi(A_{i_1}) \cap \pi(A_{i_2}) = \emptyset$ при $t(A_{i_1}) \neq t(A_{i_2})$ ($i_1, i_2 \in I$) имели бы $t(a_1) \neq t$ и $t(a_2) \neq t$. Пусть для определенности $t(A_{k_1}) = t$. Если для любого простого числа p $h_p(a_1) < \infty$, то в силу редуцированности группы G имеем $t(A_{k_j}) = t(A_{k_1})$, $j = \overline{2, s}$.

Пусть $\mathcal{P}(A_{k_1}) = \{p \mid p - \text{простое число и } pA_{k_1} = A_{k_1}\}$. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{P}(A_{k_1}) \neq \emptyset$. Покажем, что и в этом случае $t(A_{k_j}) = t(A_{k_1})$, $j = \overline{2, s}$. Предположим противное: пусть существует индекс k_l ($l = \overline{2, s}$) такой, что $t(A_{k_l}) \neq t(A_{k_1})$. Рассматривая элемент a_i ($i = 1, 2$), имеющий ненулевую координату в группе A_{k_l} , получаем, что существует такое простое число $p \in \mathcal{P}(A_{k_1})$, для которого $h_p(a_i) < \infty$, а это противоречит тому, что $t(a_i) = t(A_{k_1}) = t$.

Итак, $A_{k_1} \oplus A_{k_2} \oplus \dots \oplus A_{k_s}$ — однородная группа типа t . Значит, поскольку $a_1 - a_2 \in A_{k_1} \oplus A_{k_2} \oplus \dots \oplus A_{k_s}$, то $t(a_1 - a_2) = t$ и $a_1 - a_2 \in G_t$. Следовательно, $G_t = \{g \in G \mid t(g) = t\} \cup \{0\}$ — подгруппа группы G для любого $t \in T$. Понятно, что для всякого типа $t \in T$ $G_t \cap \sum_{t' \in T} G_{t'} = 0$. Значит, $\sum_{t \in T} G_t = \bigoplus_{t \in T} G_t$. Остается показать, что $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$.

Пусть $g \in G$, тогда элемент g вкладывается в прямое слагаемое группы G , разложимое в прямую сумму некоторых групп из семейства $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \{A_i\}_{i \in I}$). Каждая группа семейства $\mathbf{C}$ содержится в некоторой группе G_t , и поэтому $g \in \bigoplus_{t \in T} G_t$.

Справедливость импликаций 4) $\implies$ 5) и 5) $\implies$ 1) вытекает соответственно из следствия 3.16 и предложения 2.1 работы [1].

Учитывая, что всякая абелева группа без кручения ранга 1 является вполне транзитивной группой, получаем такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G — редуцированная сепарабельная абелева группа без кручения, T — множество типов ее прямых слагаемых ранга 1. Следующие условия эквивалентны:

- 1) G — вполне транзитивная группа;
- 2) если G_1 — вполне разложимое прямое слагаемое конечного ранга группы G и $G_1 = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ — его разложение в прямую сумму групп ранга 1, то $\pi(B_{i_1}) \cap \pi(B_{i_2}) = \emptyset$ для $B_{i_1} \not\cong B_{i_2}$ ($i_1, i_2 = \overline{1, n}$);
- 3) для любых неизоморфных прямых слагаемых A и B ранга 1 группы G имеем $\pi(A) \cap \pi(B) = \emptyset$;
- 4) группа G — однородно разложимая группа, причем $G_t = \{g \in G \mid t(g) = t\} \cup \{0\}$ — подгруппа группы G для всякого $t \in T$ и $G = \bigoplus_{t \in T} G_t$ — каноническое разложение группы G , в котором каждая группа G_t вполне транзитивна, и $\pi(G_{t_1}) \cap \pi(G_{t_2}) = \emptyset$ при $t_1 \neq t_2$ ($t_1, t_2 \in T$);
- 5) G — χ -группа.

Заметим, что эквивалентность условий 1) и 2) показана в [1, следствие 2.16].

Следуя [3], назовем абелеву группу G без кручения группой типа $\mathcal{P}^+$, если для некоторого простого числа p она изоморфна $\mathbb{Z}_p$ — аддитивной группе всех целых p -адических чисел. Абелева группа G без кручения называется сепарабельной типа $\mathcal{P}^+$, если любое ее конечное множество элементов содержится в некотором прямом слагаемом группы G , равном прямой сумме групп типа $\mathcal{P}^+$ [3].

Сепарабельной группой типа $\mathcal{P}^+$ является, в частности, всякая редуцированная абелева группа без кручения, на которой можно задать структуру унитарного $\mathbb{Q}_p^*$ -модуля, где $\mathbb{Q}_p^*$ — кольцо целых p -адических чисел. Это вытекает из того, что всякий циклический подмодуль редуцированного $\mathbb{Q}_p^*$ -модуля G без кручения, порожденный элементом нулевой p -высоты, выделяется в G прямым слагаемым [4, с. 294], [5, с. 52].

Учитывая, что всякая группа $\mathbb{Z}_p$ вполне транзитивна [1, с. 64], получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – сепарабельная группа типа $\mathcal{P}^+$. Тогда

- 1) G – вполне транзитивная группа;
- 2) G – однородно разложимая группа, имеющая каноническое разложение $G = \bigoplus_{p \in \Pi_1} G_{(p)}$, где $\Pi_1 \subset \Pi$ и для всякого простого числа $p \in \Pi_1$ имеем $pG_{(p)} \neq G_{(p)}$ и $qG_{(p)} = G_{(p)}$ при $q \in \Pi$, $q \neq p$;
- 3) G – χ -группа.

Абелева группа A называется *f.i.-корректной*, если для всякой абелевой группы B из того, что $A \cong B'$, $B \cong A'$, где B' , A' – соответственно вполне характеристические подгруппы групп B и A , следует $A \cong B$ [6]. Так как всякая однородно разложимая вполне транзитивная абелева группа без кручения является *f.i.-корректной* [6, следствие 10], то получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. Всякая редуцированная вполне транзитивная однородно сепарабельная группа (в частности, сепарабельная группа типа $\mathcal{P}^+$ и вполне транзитивная сепарабельная группа без кручения) является *f.i.-корректной группой*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гриншпон С.Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. 1982. Т. 1. С. 56–92.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
3. Прохазка Л. // Comment. Math. Univ. Carolin. 1967. № 1. Р. 85–114.
4. Куликов Л.Я. // Тр. ММО. 1952. Т. 1. С. 247–326.
5. Kaplansky I. Infinite abelian groups. Michigan: Ann. Arbor, 1954.
6. Гриншпон С.Я. *f.i.-корректность абелевых групп без кручения* // Абелевы группы и модули. 1989. Т. 8. С. 65–79.

Томский государственный университет

Поступило
21.09.95