Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Бандалиев, Двухвесовые неравенства для сверточных операторов в пространстве Лебега, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2773>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:33:04

УДК 517.518

ДВУХВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СВЕРТОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

Р. А. Бандалиев

В работе доказана теорема об ограниченности оператора свертки в весовом пространстве Лебега с ядром, удовлетворяющим некоторому варианту условия Хёрмандера.

Библиография: 13 названий.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ и $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Предположим, что ω – положительная, измеримая и вещественная функция, заданная в $\mathbb{R}^n$, т.е. является весовой функцией. Через $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

В случае, когда $p = \infty$, норма в пространстве $L_{\infty,\omega}(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{L_{\infty,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

При $\omega = 1$ получается невесовое пространство L_p , т.е. $L_{p,1}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$.

Говорят, что $f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, если $f \in L_p(F)$ на любом замкнутом ограниченном множестве $F \subset \mathbb{R}^n$.

Предположим, что $K: \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$, $K \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_0^n)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условиям

- 1) $K(tx) \equiv K(tx_1, \dots, tx_n) = t^{-n} K(x)$ для любых $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_0^n$;
- 2) $\int_{|x|=1} K(x) d\sigma(x) = 0$;
- 3) $\int_0^1 \frac{w(t)}{t} dt < \infty$, где $w(t) = \sup_{|\xi-\eta| \leq t} |K(\xi) - K(\eta)|$ при $|\xi| = |\eta| = 1$.

Для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим следующий сингулярный интеграл:

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|x-y| > \varepsilon} K(x-y)f(y) dy = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y) dy, \quad (1) \quad \{1\}$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения и $\varepsilon > 0$ – некоторое число.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть ядро K сингулярного интеграла (1) удовлетворяет условиям 1)–3). Предположим, что $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Тогда сингулярный интеграл существует для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ и имеет место неравенство

$$\|Tf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где $C > 0$ не зависит от f .

Эта теорема была доказана в работе Кальдерона–Зигмунда [1] и носит название теоремы Кальдерона–Зигмунда.

Далее, в работе [2] Хёрмандер, наложив на ядро сингулярного интеграла (1) более слабое ограничение, а именно,

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C, \quad (2) \quad \{2\}$$

где $K \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_0^n)$, $C > 0$ – постоянная, не зависящая от y , заменяя условие 3) на условие (2), при выполнении условий 1), 2) доказал теорему 1 для сингулярных интегралов с ядрами, удовлетворяющими условию (2). Это условие связано с условием 3) и при выполнении этого условия имеет место неравенство (2) (см. [3]).

С другой стороны, сингулярные интегралы, ядра которых не удовлетворяют условию Хёрмандера (2), рассматриваются обширно (например, осцилляционные и другие сингулярные интегралы) (см. [4]).

Предположим, что $K \in L_2(\mathbb{R}^n)$ – некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$(K1) \quad \|\hat{K}\|_{\infty} \leq C;$$

$$(K2) \quad |K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n};$$

$$(K3) \quad \text{существуют функции } A_1, \dots, A_m \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_0^n) \text{ и } \Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_m\} - \text{конечное семейство существенно ограниченных функций в } \mathbb{R}^n \text{ таких, что } |\det[\phi_j(y_i)]|^2 \in RH_{\infty}(\mathbb{R}^{nm}), \quad y_i \in \mathbb{R}^n, \quad i, j = 1, \dots, m;$$

$$(K4) \quad \text{для фиксированного } \gamma > 0 \text{ и для любого } |x| > 2|y| > 0,$$

$$\left| K(x-y) - \sum_{i=1}^m A_i(x) \phi_i(y) \right| \leq C \frac{|y|^{\gamma}}{|x-y|^{n+\gamma}}, \quad (3) \quad \{3\}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, $\hat{K}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} K(x) dx$ – преобразование Фурье функции K . Вообще говоря, функции A_i , ϕ_i , $i = 1, \dots, m$, определенные в $\mathbb{R}_0^n$, являются комплекснозначными.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что каждое ядро, удовлетворяющее условию (3), удовлетворяет также условию

$$\int_{|x|>2|y|} \left| K(x-y) - \sum_{i=1}^m A_i(x) \phi_i(y) \right| dx \leq C \quad \text{при} \quad |x| > 2|y|. \quad (4) \quad \{4\}$$

Действительно, интегрируя обе части неравенства (3) по множеству $|x| > 2|y|$, используя неравенство $|x-y| \geq |x|/2$ и переходя к сферическим координатам, получим

$$\int_{|x|>2|y|} \left| K(x-y) - \sum_{i=1}^m A_i(x) \phi_i(y) \right| dx \leq C |y|^{\gamma} \int_{2|y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\gamma}} = C.$$

Поэтому условие (4) является более слабым ограничением на ядро K , чем условие (3).

Отметим, что условия (K1)–(K4) были наложены в работе [4], а условие (4) было рассмотрено в работе [5]. Например, при $m = 1$, $A_1(x) = K(x)$, $\phi_1(y) \equiv 1$ из условия (4) получается условие Хёрмандера (2). Отметим, что в этом смысле условие (4) является обобщением условия Хёрмандера (2).

Существуют еще другие, а именно, условия, которые сильнее, чем условие (2) (см. [6], [7]).

ПРИМЕР. Рассмотрим ядро

$$K(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0.$$

Эта функция удовлетворяет условиям (K1)–(K4). Действительно, так как

$$\widehat{K}(\xi) = \begin{cases} 2\pi, & |\xi| \leq 1, \\ \pi, & \xi = \pm 1, \\ 0, & |\xi| > 1, \end{cases}$$

получим, что $\|K\|_\infty = 2\pi$ и условие (K1) выполняется. Очевидно, что $|\sin x/x| \leq 1/|x|$.

Теперь покажем, что выполняется условие (K3). Используя равенство $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, выберем функции A_j и ϕ_j , $j = 1, 2$, следующим образом:

$$A_1(x) = \frac{e^{ix}}{2ix}, \quad A_2(x) = -\frac{e^{-ix}}{2ix}, \quad \phi_1(y) = e^{-iy}, \quad \phi_2(y) = e^{iy}, \quad m = 2.$$

Заметим, что $|A_1(x)| = |A_2(x)| = 1/(2|x|) \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}_0)$. Далее,

$$\det[\phi_j(y_i)] = \begin{vmatrix} e^{-iy_1} & e^{-iy_2} \\ e^{iy_1} & e^{iy_2} \end{vmatrix} = e^{-i(y_1-y_2)} - e^{i(y_1-y_2)},$$

где $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $|\det[\phi_j(y_i)]|^2 = |1 - e^{2i(y_1-y_2)}| = 4\sin^2(y_1 - y_2)$ и, применяя теорему о среднем значении, вычислим следующий интеграл:

$$\frac{1}{|B|} \int_B \sin^2(y_1 - y_2) dy_1 dy_2 = C \geq C \sup_B \sin^2(y_1 - y_2),$$

где B – произвольный шар в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат, $(y_1, y_2) \in B$ и $0 \leq C \leq 1$. А это и означает, что $4\sin^2(y_1 - y_2) \in RH_\infty(\mathbb{R}^2)$. Теперь проверим условие (K4). Так как $|x| > 2|y|$, то $|x - y| \leq |x| + |y| \leq \frac{3}{2}|x|$. Поэтому имеем

$$\left| \frac{\sin(x - y)}{x - y} - \sum_{i=1}^m A_i(x) \phi_i(y) \right| dx = |\sin(x - y)| \left| \frac{1}{x - y} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{|y|}{|x||x - y|} \leq \frac{2}{3} \frac{|y|}{|x - y|^2},$$

т.е. при $\gamma = 1$ условие (K4) выполняется.

Но функция $K(x) = \sin x/x$ не удовлетворяет условиям 1), 2) и условию Хёрмандера (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4]. Говорят, что положительная, измеримая и локально суммируемая функция *удовлетворяет обратному условию Гёльдера* RH_∞ , или $g \in RH_\infty(\mathbb{R}^n)$, если

$$0 < \sup_{x \in B} g(x) \leq C \frac{1}{|B|} \int_B g(x) dx,$$

где B – произвольный шар с центром в нуле и $C > 0$ – постоянная, не зависящая от B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [8]. Говорят, что локально интегрируемая весовая функция ν принадлежит $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_B \left(|B|^{-1} \int_B \nu(x) dx \right) \left(|B|^{-1} \int_B \nu(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$ и $p' = p/(p-1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что из условия $RH_\infty(\mathbb{R}^n)$ следует хорошо известное обратное неравенство Гёльдера:

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B g(x)^{1+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C \left(\int_B g(x) dx \right)$$

для любого $\varepsilon > 0$. А это условие, как известно, характеризует условие $A_p(\mathbb{R}^n)$ (см. [6; с. 403]).

Предположим, что функция K удовлетворяет условиям (K1)–(K4). Для $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ определим сверточный оператор, порожденный ядром K :

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) dy. \quad (5) \quad \{5\}$$

Для сверточного оператора (5) доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 [4]. Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ и предположим, что ядро сверточного оператора (5) удовлетворяет условиям (K1)–(K4). Тогда имеет место неравенство

$$\|Tf\|_{L_{p,w}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где $C > 0$ не зависит от f .

Отметим, что в невесовом случае при отсутствии условия (K2) и если заменить условие (3) на условие (4), теорема 2 была доказана в [5].

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $u(t)$ и $v(t)$ – положительные функции, определенные на $(0, \infty)$.

1. Для справедливости неравенства

$$\int_0^\infty u(t) \left| \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \right|^p dt \leq C_1 \int_0^\infty v(t) |\varphi(t)|^p dt \quad (6) \quad \{6\}$$

с постоянной C_1 , не зависящей от φ , необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^t v(\tau)^{1-p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

2. Для справедливости неравенства

$$\int_0^\infty u(t) \left| \int_t^\infty \varphi(\tau) d\tau \right|^p dt \leq C_2 \int_0^\infty v(t) |\varphi(t)|^p dt \quad (7) \quad \{7\}$$

с постоянной C_2 , не зависящей от φ , необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t u(\tau) d\tau \right) \left(\int_t^\infty v(\tau)^{1-p'} d\tau \right)^{p-1} < \infty.$$

Отметим, что теорема 3 была доказана в работах [9]–[11].

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\beta \geq 1$, $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ – радиальная функция, т.е. $\varphi(x) = \varphi(|x|)$, и пусть u, u_1 – положительные неубывающие (невозрастающие) функции, определенные на $(0, \infty)$. Предположим, что $\omega = u\varphi$, $\omega_1 = u_1\varphi$ и весовая пара (ω, ω_1) удовлетворяет следующему условию:

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{-1-n(p-1)} d\tau \right) \left(\int_0^{t/2} \omega(\tau)^{1-p'} \tau^{n-1} d\tau \right)^{p-1} < \infty, \quad (8) \quad \{8\}$$

$$\left(\sup_{t>0} \left(\int_0^{t/2} \omega_1(\tau) \tau^{n-1} d\tau \right) \left(\int_t^\infty \omega(\tau)^{1-p'} \tau^{-1-n(p'-1)} d\tau \right)^{p-1} < \infty \right). \quad (9) \quad \{9\}$$

Тогда существует положительная постоянная C такая, что для любого $t > 0$ имеет место следующее неравенство:

$$u_1(\beta t) \leq C u(t) \quad \left(u_1\left(\frac{t}{\beta}\right) \leq C u(t) \right).$$

Лемма 1 доказана в работе [12].

Основные результаты.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$, ядро K сверточного оператора (5) удовлетворяет условиям (K1)–(K4). Предположим, что u, u_1 – положительные неубывающие функции на $(0, \infty)$, $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ – радиальная функция, $\omega = u\varphi$ и $\omega_1 = u_1\varphi$.

Если весовая пара (ω_1, ω) удовлетворяет условию (8), то существует $C > 0$ такое, что для любого $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \omega_1(|x|) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(|x|) dx. \quad (10) \quad \{10\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (10) сначала доказывается для тех неубывающих функций, для которых имеет место следующее представление:

$$u_1(t) = u_1(0) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau,$$

где $u_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} u_1(t)$ и $\psi(t)$ – неотрицательная функция на $(0, \infty)$.

Действительно, для неубывающих на $(0, +\infty)$ функций $u_1(t)$ существует последовательность абсолютно непрерывных функций $\varphi_n(t)$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = u_1(t)$ п.в., $\varphi_n(t) \leq u_1(t)$, $\varphi_n(0) = u_1(0)$, функции $\varphi_n(t)$ не убывают и, кроме того, $\varphi_n(t) = \int_0^t \psi_n(\tau) d\tau + \varphi_n(0)$, где $\psi_n(t)$ – неотрицательные функции на $(0, \infty)$. Отсюда с применением теоремы Фату получается справедливость оценки (10) для неубывающих функций (см. [12], [13]).

Оценим левую сторону неравенства (10). Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \omega_1(|x|) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \varphi(|x|) \left(u_1(0) + \int_0^{|x|} \psi(t) dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \varphi(|x|) u_1(0) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) \left(\int_0^{|x|} |Tf(x)|^p \psi(t) dt \right) dx = D_1 + D_2. \end{aligned}$$

Если $u_1(0) = 0$, то $D_1 = 0$. Однако если $u_1(0) > 0$, то по теореме 2 имеем

$$\begin{aligned} D_1 &= u_1(0) \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \varphi(|x|) dx \leq C_1 u_1(0) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \varphi(|x|) dx \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \varphi(|x|) u_1(|x|) dx \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \varphi(|x|) u(|x|) dx \\ &= C_2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(|x|) dx. \end{aligned}$$

Оценим D_2 . Используя теорему Фубини, получим

$$\begin{aligned} D_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \varphi(|x|) \left(\int_0^{|x|} \psi(t) dt \right) dx = \int_0^\infty \psi(t) \left(\int_{|x|>t} |Tf(x)|^p \varphi(|x|) dx \right) dt \\ &\leq C_3 \int_0^\infty \psi(t) \left(\int_{|x|>t} \left| \int_{|y|>\frac{t}{2}} K(x-y) f(y) dy \right|^p \varphi(|x|) dx \right) dt \\ &\quad + C_3 \int_0^\infty \psi(t) \left(\int_{|x|>t} \left| \int_{|y|\leq\frac{t}{2}} K(x-y) f(y) dy \right|^p \varphi(|x|) dx \right) dt = D_{21} + D_{22}. \end{aligned}$$

Снова используя теорему 2, лемму 1 и теорему Фубини, получим

$$\begin{aligned} D_{21} &\leq C_3 \int_0^\infty \psi(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y) \chi_{\{z: |z|>\frac{t}{2}\}}(y) dy \right|^p \varphi(|x|) dx \right) dt \\ &\leq C_4 \int_0^\infty \psi(t) \left(\int_{|x|>\frac{t}{2}} |f(x)|^p \varphi(|x|) dx \right) dt \\ &= C_4 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \varphi(|x|) \left(\int_0^{2|x|} \psi(t) dt \right) dx \\ &\leq C_4 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \varphi(|x|) u_1(2|x|) dx \leq C_5 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \varphi(|x|) u(|x|) dx \\ &= C_5 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(|x|) dx. \end{aligned}$$

Оценим теперь D_{22} . Если $|x| > t$ и $|y| \leq t/2$, $|x - y| \geq |x| - |y| \geq |x| - t/2 = |x|/2$, то

$$\begin{aligned} D_{22} &\leq C_6 \int_0^\infty \psi(t) \left(\int_{|x|>t} \varphi(|x|) \left(\int_{|y|\leq \frac{t}{2}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \right)^p dx \right) dt \\ &\leq C_7 \int_0^\infty \psi(t) \left(\int_{|x|>t} \frac{\varphi(|x|)}{|x|^{np}} dx \right) \left(\int_{|y|\leq \frac{t}{2}} |f(y)| dy \right)^p dt \\ &\leq C_7 \int_0^\infty \psi(2s) \left(\int_{|x|>2s} \frac{\varphi(|x|)}{|x|^{np}} dx \right) \left(\int_{|y|\leq s} |f(y)| dy \right)^p ds \\ &= C_8 \int_0^\infty \psi(2s) \left(\int_{2s}^\infty \varphi(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau \right) \left(\int_0^s t^{n-1} \left(\int_{|y|=1} |f(t\bar{y})| d\sigma(\bar{y}) \right) dt \right)^p ds. \end{aligned}$$

Кроме того, имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \psi(2s) \left(\int_{2s}^\infty \varphi(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau \right) ds &\leq \int_{2t}^\infty \psi(s) \left(\int_s^\infty \varphi(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau \right) ds \\ &= \int_{2t}^\infty \varphi(\tau) \tau^{n-np-1} \left(\int_{2t}^\tau \psi(s) ds \right) d\tau \leq \int_{2t}^\infty \varphi(\tau) u_1(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau \\ &\leq \int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \psi(2s) \left(\int_{2s}^\infty \varphi(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau \right) ds \right) \left(\int_0^{t/2} \omega^{1-p'}(\tau) \tau^{n-1} d\tau \right)^{p-1} \\ \leq \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega_1(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau \right) \left(\int_0^{t/2} \omega^{1-p'}(\tau) \tau^{n-1} d\tau \right)^{p-1} < \infty. \end{aligned}$$

Для величины D_{22} в силу последнего неравенства из неравенства (6) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi(2s) \left(\int_{2s}^\infty \varphi(\tau) \tau^{n-np-1} d\tau \right) \left(\int_0^s t^{n-1} \left(\int_{|y|=1} |f(t\bar{y})| d\sigma(\bar{y}) \right) dt \right)^p ds \\ \leq C_9 \int_0^\infty \omega(t) t^{n-1} \left(\int_{|y|=1} |f(t\bar{y})| d\sigma(\bar{y}) \right)^p dt \\ \leq C_{10} \int_0^\infty \omega(t) t^{n-1} \left(\int_{|y|=1} |f(t\bar{y})|^p d\sigma(\bar{y}) \right) dt = C_{10} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(|x|) dx. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 5. Пусть $1 < p < \infty$, ядро K сверточного оператора (5) удовлетворяет условиям (K1)–(K4). Предположим, что u, u_1 – положительные невозрастающие функции на $(0, \infty)$, $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ – радиальная функция, $\omega = u\varphi$ и $\omega_1 = u_1\varphi$.

Если весовая пара (ω_1, ω) удовлетворяет условию (9), то существует $C > 0$ такое, что для любого $f \in L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (10) сначала доказывается для тех невозрастающих функций, для которых имеет место следующее представление:

$$u_1(t) = u_1(+\infty) + \int_t^{\infty} \psi(\tau) d\tau,$$

где $u_1(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u_1(t)$ и $\psi(t)$ положительная функция на $(0, \infty)$.

Далее, используя теорему 2, лемму 1 для невозрастающих функций, неравенство (7) и повторяя процесс доказательства теоремы 4, получим теорему 5.

Отметим, что теоремы 4 и 5 в случае, когда $u = u_1 = 1$, другим методом были доказаны в [4].

Автор благодарен профессору В. С. Гулиеву и академику А. Д. Гаджиеву за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. P. Calderon, A. Zygmund, "On the existence of certain singular integrals", *Acta. Math.*, **88** (1952), 85–139.
- [2] L. Hormander, "Estimates for translation invariant operators in L^p spaces", *Acta. Math.*, **104** (1960), 93–140.
- [3] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [4] R. Trujillo-Gonzalez, "Weighted norm inequalities for singular integrals operators satisfying a variant of Hormander condition", *Comment. Math. Univ. Carolinae* **44**, **1** (2003), 137–152.
- [5] D. J. Grubb, C. N. Moore, "A variant of Hormander condition for singular integrals", *Colloq. Math.*, **73**:2 (1997), 165–172.
- [6] J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Studies, **116**, Amsterdam, 1985.
- [7] D. K. Watson, "Weighted estimates for singular integrals via Fourier transform estimates", *Duke Math. J.*, **60**:2 (1990), 389–399.
- [8] B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for Hardy maximal functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165** (1972), 207–226.
- [9] B. Muckenhoupt, "Hardy's inequality with weights", *Studia Math.*, **44**:1 (1972), 31–38.
- [10] G. Talenti, "Asservazioni sopra and classe disuguaglianze", *Rend. Sem. Math. e F is Milano*, 1969, 171–185.
- [11] G. Tomaselli, "A class of inequalities", *Bull Unione Math. Italy*, **2**:2 (1969), 622–631.
- [12] I. A. Aliev, A. D. Gadjev, "Weighted estimates for multidimensional singular integrals generated by the generalized shift operators", *Mat. sb.*, **183**:9 (1992), 45–66.
- [13] V. S. Guliyev, R. A. Bandaliyev, "Two-weight inequalities for integral operators in L_p -spaces of Banach-valued functions and their applications", *Tr. Mat. Inst. Steklova, Ross. Akad. Nauk*, **243** (2003), 194–212.

Р. А. Бандалиев

Институт математики и механики НАН Азербайджана
E-mail: szaman@yours.com

Поступила в редакцию

12.03.2004