Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 , *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 11–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:52:08

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА И ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В L_2

С. Б. Вакарчук

Точные неравенства типа Джексона, полученные Л. В. Тайковым в пространстве L_2 и содержащие наилучшее приближение и модуль непрерывности первого порядка, обобщены на модули непрерывности k -го порядка ($k = 2, 3, \dots$). Найдены также точные значения n -поперечников классов функций $F(k, r, \Phi)$ и $\mathcal{F}_k^r(h)$, являющихся обобщением рассмотренных Тайковым классов $F(1, r, \Phi)$ и $\mathcal{F}_1^r(h)$.

Библиография: 14 названий.

1. Через $L_2 = L_2([0, 2\pi])$ обозначим пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\mathcal{T}_{n-1}$ есть подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n - 1$. Известно, что для произвольной функции $f(x) \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx,$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &= \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \} \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1) \quad \{1\}$$

где $S_{n-1}(f, x)$ есть частная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f(x)$, а $\rho_j^2(f) \stackrel{\text{def}}{=} a_j^2(f) + b_j^2(f)$. Модуль непрерывности k -го порядка функции $f(x) \in L_2$ обозначим через

$$\omega_k(f, t) = \sup \{ \|\Delta_h^k f(\cdot)\| : |h| \leq t \},$$

где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh)$. Под L_2^r ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^0 = L_2$) понимаем множество функций $f(x) \in L_2$, у которых производные $(r - 1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка принадлежат пространству L_2 .

При решении задач теории аппроксимации в L_2 , связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона

$$E_{n-1}(f) \leq \chi \cdot n^{-r} \omega_k \left(f^{(r)}, \frac{t}{n} \right), \quad t > 0,$$

где $f(x) \in L_2^r$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$), рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных χ . Для компактного изложения некоторых результатов, полученных ранее, введем следующее обозначение:

$$\chi_{n,r,k,p,s,m}(\Psi, t) \stackrel{\text{df}}{=} \sup \left\{ \frac{n^{2r-p} E_{n-1}^2(f)}{(\int_0^t \omega_k^s(f^{(r)}, x) \Psi(x) dx)^m} : f(x) \in L_2^r, f(x) \not\equiv \text{const} \right\}, \quad (2) \quad \{2\}$$

где $n, k \in \mathbb{N}$; $r, p \in \mathbb{Z}_+$; $s, m \in (0, \infty)$. Величины вида (2) в разное время изучали Н. И. Черных [1] ($\chi_{n,r,1,1,2,1}(\Psi, \pi/n)$, где $\Psi(x) = \sin nx$; $\chi_{n,0,k,0,2,1}(\Psi, 2\pi/n)$, где $\Psi(x) = \sin(nx/2) + (\sin nx)/2$), Л. В. Тайков [2] ($\chi_{n,r,1,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) \equiv 1$; $0 < t \leq \pi/(2n)$) и [3] ($\chi_{n,r,k,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) \equiv 1$; $0 < t \leq \pi/n$), А. А. Лигун [4] ($\chi_{n,r,k,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) \geq 0$; $0 < t \leq \pi/n$), В. В. Шалаев [5] ($\chi_{n,r,k,k,2/k,k}(\Psi, \pi/n)$, где $\Psi(x) = \sin nx$; при $k = 1$ имеем соответствующий результат из [1]), Х. Юссеф [6] ($\chi_{n,r,1,0,2,1}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) = \sin(\pi x/t)$; $0 < t \leq \pi/n$), М. Г. Есмаганбетов [7] ($\chi_{n,r,k,0,s,2/s}(\Psi, t)$, где $\Psi(x) = \sin^\gamma(\beta x/t)$, $0 < s \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq rs - 1$, $0 < \beta \leq \pi$; $0 < t \leq \pi/n$).

Экстремальные характеристики, в определенном смысле аналогичные (2), в пространстве L_2 рассматривались и другими авторами (см., например, [8]–[12]).

Целью данного сообщения является распространение основных результатов работы [2], полученных Тайковым для модуля непрерывности первого порядка, на произвольные модули непрерывности k -го порядка ($k = 2, 3, \dots$). Развитие подхода, предложенного автором в [12], позволило решить эту задачу.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < t \leq \pi/(2n)$. Тогда для любых чисел $n, k \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\chi_{n,r,k,0,2/k,k}(1, t) = \left\{ \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \right\}^k. \quad (3) \quad \{3\}$$

Если $0 < t \leq \pi/n$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(nt)^{2k} n^{2r}} &\leq \sup \left\{ \frac{E_{n-1}^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)}, t)} : f(x) \in L_2^r, f(x) \not\equiv \text{const} \right\} \\ &\leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2} \right)^k. \end{aligned} \quad (4) \quad \{4\}$$

2. Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые понятия и определения. Пусть $\mathbb{B}$ – единичный шар в L_2 ; Q – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 ; $\Lambda_n \subset L_2$ – n -мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n ; $\mathfrak{F}: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n ; $\mathfrak{F}^\perp: L_2 \rightarrow \Lambda_n$ – непрерывный

оператор линейного проектирования L_2 на подпространство Λ_n . Величины

$$\begin{aligned} b_n(Q; L_2) &= \sup\{\sup\{\varepsilon > 0: \varepsilon\mathbb{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\}: \Lambda_{n+1} \subset L_2\}, \\ d_n(Q; L_2) &= \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\|: g \in \Lambda_n\}: f \in Q\}: \Lambda_n \subset L_2\}, \\ \delta_n(Q; L_2) &= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \Im f\|: f \in Q\}: \Im L_2 \subset \Lambda_n\}: \Lambda_n \subset L_2\}, \\ d^n(Q; L_2) &= \inf\{\sup\{\|f\|: f \in Q \cap \Lambda^n\}: \Lambda^n \subset L_2\}, \\ \Pi_n(Q; L_2) &= \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \Im^\perp f\|: f \in Q\}: \Im^\perp L_2 \subset \Lambda_n\}: \Lambda_n \subset L_2\} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *коломоговским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками*. Так как L_2 является гильбертовым пространством, справедливы следующие соотношения между перечисленными величинами (см., например, [13], [14]):

$$b_n(Q; L_2) \leq d^n(Q; L_2) \leq d_n(Q; L_2) = \delta_n(Q; L_2) = \Pi_n(Q; L_2). \quad (5) \quad \{5\}$$

Всюду далее под $\Phi(t)$, $0 \leq t < \infty$, понимаем непрерывную монотонно возрастающую функцию, обращающуюся в нуль в точке $t = 0$. Рассмотрим классы

$$F(k, r, \Phi) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ f(x) \in L_2^r: \int_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau \leq \Phi(t) \quad \forall t > 0 \right\},$$

где $k, r \in \mathbb{N}$. Тайков показал [2], что при выполнении ограничений

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{2}{\pi - 2} \begin{cases} nt - \sin nt, & \text{если } 0 < t \leq \pi/n, \\ 2nt - \pi, & \text{если } t \geq \pi/n, \end{cases} \quad (6) \quad \{6\}$$

справедливы равенства

$$d_{2n-1}(F(1, r, \Phi); L_2) = n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7) \quad \{7\}$$

Функция $\Phi_*(t) = t^{\pi/(\pi-2)}$ является примером мажоранты, удовлетворяющей условиям (6).

Для $r, k \in \mathbb{N}$ и $h > 0$ полагаем

$$\mathcal{F}_k^r(h) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ f(x) \in L_2^r: \int_0^h \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau \leq 1 \right\}.$$

В [2] было показано, что если натуральное число n удовлетворяет условию $nh \leq \pi/2$, то

$$d_{2n-1}(\mathcal{F}_1^r(h), L_2) = n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{1/2}. \quad (8) \quad \{8\}$$

Следующие теоремы обобщают результаты (7) и (8) на классы $F(k, r, \Phi)$ и $\mathcal{F}_k^r(h)$, где $k = 2, 3, \dots$, соответственно.

ТЕОРЕМА 2. Если мажоранта $\Phi(t)$ удовлетворяет ограничениям (6), то для любых натуральных чисел n, k и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место следующие равенства:

$$p_{2n-1}(F(k, r, \Phi); L_2) = p_{2n}(F(k, r, \Phi); L_2) = n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2}, \quad (9) \quad \{9\}$$

где $p_m(\cdot)$ – любой из перечисленных выше m -поперечников.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых натуральных чисел n, k и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$p_{2n-1}(F(k, r, \Phi_*); L_2) = p_{2n}(F(k, r, \Phi_*); L_2) = \frac{n^{-r-k/(\pi-2)}}{(\pi-2)^{k/2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pi k/(2(\pi-2))},$$

где $p_m(\cdot)$ – любой из m -поперечников, рассмотренных ранее.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k, r, n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ и выполнено условие $nh \leq \pi/2$. Тогда

$$p_{2n-1}(\mathcal{F}_k^r(h), L_2) = p_{2n}(\mathcal{F}_k^r(h), L_2) = n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{k/2}, \quad (10) \quad \{1\}$$

где $p_m(\cdot)$ – любой из рассмотренных ранее m -поперечников.

3. Доказательство теоремы 1. В силу определения гильбертова пространства L_2 и свойств тригонометрической системы, для произвольной функции $f(x) \in L_2$ запишем

$$\|\Delta_h^k f^{(r)}(\cdot)\|^2 = 2^k \sum_{j=1}^{\infty} j^{2r} \rho_j^2(f) (1 - \cos jh)^k. \quad (11) \quad \{1\}$$

В силу (1) получим

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f) \cos jh = \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^{2-2/k}(f) \rho_j^{2/k}(f) (1 - \cos jh). \quad (12) \quad \{1\}$$

Применив к правой части равенства (12) рассуждения из работы [5], а именно, используя неравенство Гёльдера для числовых рядов, а также учитывая (11) и определение модуля непрерывности k -го порядка, имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f) - \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f) \cos jh &\leq E_{n-1}^{2-2/k}(f) \left\{ \frac{1}{n^{2r}} \sum_{j=n}^{\infty} j^{2r} \rho_j^2(f) (1 - \cos jh)^k \right\}^{1/k} \\ &\leq E_{n-1}^{2-2/k}(f) \frac{\omega_k^{2/k}(f^{(r)}, h)}{2n^{2r/k}}. \end{aligned} \quad (13) \quad \{1\}$$

Проинтегрировав соотношение (13) по h в пределах от 0 до t и умножив затем обе части полученного неравенства на величину $1/t$, запишем

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{j=n}^{\infty} \rho_j^2(f) \frac{\sin jt}{jt} + \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2r/k}t} \int_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, h) dh. \quad (14) \quad \{1\}$$

Поскольку при $0 < nt \leq \pi/2$ справедливо равенство [2]

$$\max_{nt \leq \tau} \frac{|\sin \tau|}{\tau} = \frac{\sin nt}{nt}, \quad (15) \quad \{1\}$$

из (14), (15) и (1) имеем

$$E_{n-1}^2(f) \leq \frac{\sin nt}{nt} E_{n-1}^2(f) + \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2r/k}t} \int_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, h) dh. \quad (16) \quad \{1\}$$

Из (16) следует оценка сверху

$$E_{n-1}^2(f) \leq n^{-2r} \left\{ \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \right\}^k \left(\int_0^t \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, h) dh \right)^k. \quad (17) \quad \{17\}$$

Используя (2) и (17), запишем

$$\chi_{n,r,k,0,2/k,k}(1, t) \leq \left\{ \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \right\}^k. \quad (18) \quad \{18\}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим в L_2^r функцию $f_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos nx$. Поскольку $E_{n-1}(f_0) = 1$ и

$$\omega_k(f_0^{(r)}, h) = 2^{k/2} n^r (1 - \cos nh)^{k/2}, \quad (19) \quad \{19\}$$

где $0 < h \leq \pi/n$, то с учетом (2) имеем

$$\chi_{n,r,k,0,2/k,k}(1, t) \geq \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f_0)}{\left(\int_0^t \omega_k^{2/k}(f_0^{(r)}, h) dh \right)^k} = \left\{ \frac{n}{2(nt - \sin nt)} \right\}^k. \quad (20) \quad \{20\}$$

Сопоставив оценки сверху (18) и снизу (20), получим требуемое равенство (3).

Перейдем к доказательству соотношения (4). Для этого проинтегрируем дважды неравенство (13) – вначале по переменной h в пределах от 0 до τ , а затем по переменной τ в пределах от 0 до t . В результате этого будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} E_{n-1}^2(f) &\leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2} \rho_j^{2-2/k}(f) \rho_j^{2/k}(f) (1 - \cos jt) \\ &\quad + \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2r/k}} \int_0^t \int_0^{\tau} \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, h) dh d\tau. \end{aligned} \quad (21) \quad \{21\}$$

Применив, с учетом (1), неравенство Гёльдера к числовому ряду в соотношении (21), а затем произведя в повторном интеграле процедуру интегрирования по частям для более рациональной формы его записи, получим

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} E_{n-1}^2(f) &\leq \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{n^2} \left\{ \frac{1}{n^{2r}} \sum_{j=n}^{\infty} j^{2r} \rho_j^2(f) (1 - \cos jt)^k \right\}^{1/k} \\ &\quad + \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2r/k}} \int_0^t (t - \tau) \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau \\ &\leq \frac{E_{n-1}^{2-2/k}(f)}{2n^{2+2r/k}} \left\{ \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, t) + n^2 \int_0^t (t - \tau) \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$t^{2k} E_{n-1}^2(f) \leq \frac{1}{n^{2(r+k)}} \left\{ \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, t) + n^2 \int_0^t (t - \tau) \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau \right\}^k. \quad (22) \quad \{22\}$$

Для произвольной функции $f(x) \in L_2^r$, $f(x) \not\equiv \text{const}$, из (22) получим

$$t^{2k} E_{n-1}^2(f) \leq \frac{1}{n^{2(r+k)}} \omega_k^2(f^{(r)}, t) \left(1 + \frac{(nt)^2}{2} \right)^k.$$

Следовательно,

$$\frac{E_{n-1}^2(f)}{\omega_k^2(f^{(r)}, t)} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2} \right)^k. \quad (23) \quad \{23\}$$

Для рассмотренной ранее функции $f_0(x) = \cos nx$ при $0 < t \leq \pi/n$ в силу (19) имеем

$$\omega_k^2(f_0^{(r)}, t) = 2^{2k} n^{2r} \sin^{2k} \left(\frac{nt}{2} \right) \leq n^{2r} (nt)^{2k}.$$

Тогда

$$\frac{E_{n-1}^2(f_0)}{\omega_k^2(f_0^{(r)}, t)} \geq \frac{1}{(nt)^{2k} n^{2r}}. \quad (24) \quad \{24\}$$

Двойное неравенство (4), обобщающее соответствующий результат Тайкова [2] на модуль непрерывности k -го порядка $\omega_k(f^{(r)}, t)$, $k = 2, 3, \dots$, получаем из (23), (24), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Полагая в (17) $t = \pi/(2n)$, для произвольной функции $f(x) \in F(k, r, \Phi)$ запишем

$$E_{n-1}(f) \leq n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right\}^{k/2}. \quad (25) \quad \{25\}$$

Используя (5) и (25), получим оценки сверху для рассмотренных в п. 2 n -поперечников

$$\begin{aligned} p_{2n}(F(k, r, \Phi); L_2) &\leq p_{2n-1}(F(k, r, \Phi); L_2) \leq d_{2n-1}(F(k, r, \Phi); L_2) \\ &\leq E_{n-1}(F(k, r, \Phi)) \leq n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right\}^{k/2}, \end{aligned} \quad (26) \quad \{26\}$$

где $E_{n-1}(\mathcal{M}) = \sup\{E_{n-1}(f) : f(x) \in \mathcal{M}\}$, $\mathcal{M}$ – произвольный класс функций из L_2 .

Для получения оценок снизу перечисленных в п. 2 n -поперечников рассмотрим в $\mathcal{T}_n \cap L_2$ шар

$$\mathbb{B}_{2n+1} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq n^{-r} \left(\frac{n}{\pi - 2} \Phi \left(\frac{\pi}{2n} \right) \right)^{k/2} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $F(k, r, \Phi)$. Для этого нам понадобится неравенство [3]

$$\omega_k^2(T_n^{(r)}, t) \leq 2^k n^{2r} (1 - \cos nt)_*^k \|T_n\|^2, \quad (27) \quad \{27\}$$

где $(1 - \cos nt)_* \stackrel{\text{df}}{=} \{1 - \cos nt, \text{ если } 0 \leq t \leq \pi/n; 2, \text{ если } t \geq \pi/n\}$; $T_n(x)$ – произвольный тригонометрический полином из подпространства $\mathcal{T}_n$.

Пусть $0 < t \leq \pi/n$. Используя определение класса $F(k, r, \Phi)$, первое неравенство из ограничения (6) и соотношение (27), для любого полинома $T_n(x) \in \mathbb{B}_{2n+1}$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^t \omega_k^{2/k}(T_n^{(r)}, \tau) d\tau &\leq 2n^{2r/k} \|T_n\|^{2/k} \int_0^t (1 - \cos n\tau) d\tau \\ &\leq \frac{2}{\pi - 2} (nt - \sin nt) \Phi \left(\frac{\pi}{2n} \right) \leq \Phi(t). \end{aligned} \quad (28) \quad \{28\}$$

Пусть $\pi/n \leq t$. На основании аналогичных соображений и второго неравенства из ограничения (6) для произвольного полинома $T_n(x) \in \mathbb{B}_{2n+1}$ запишем

$$\begin{aligned} \int_0^t \omega_k^{2/k}(T_n^{(r)}, \tau) d\tau &\leq 2n^{2r/k} \|T_n\|^{2/k} \left(2t - \frac{\pi}{n}\right) \\ &\leq \frac{2}{\pi - 2} (2nt - \pi) \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(t). \end{aligned} \quad (29) \quad \{29\}$$

Из (28), (29) следует включение $\mathbb{B}_{2n+1} \subset F(k, r, \Phi)$. Используя (6) и определение бернштейновского n -поперечника, имеем

$$\begin{aligned} p_{2n}(F(k, r, \Phi); L_2) &\geq b_{2n}(F(k, r, \Phi); L_2) \geq b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2) \\ &\geq n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2}. \end{aligned} \quad (30) \quad \{30\}$$

Сопоставляя неравенства (26) и (30), получим соотношения (9), чем и завершим доказательство теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполнены условия теоремы 2, то имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sup\{|a_n(f)| : f(x) \in F(k, r, \Phi)\} &= \sup\{|b_n(f)| : f(x) \in F(k, r, \Phi)\} \\ &= n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, проведем рассуждения для коэффициентов $b_n(f)$. Учитывая, что

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x) - S_{n-1}(f, x)] \sin nx \, dx$$

и используя неравенство Коши–Буняковского, а также (1) и (26), получим оценку сверху

$$\sup\{|b_n(f)| : f(x) \in F(k, r, \Phi)\} \leq E_{n-1}(F(k, r, \Phi)) \leq n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2}.$$

Для нахождения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_1(x) \stackrel{\text{df}}{=} n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2} \sin nx.$$

Из доказательства теоремы 2 следует, что $f_1(x)$ принадлежит шару $\mathbb{B}_{2n+1}$, а значит является элементом класса $F(k, r, \Phi)$. Тогда

$$\sup\{|b_n(f)| : f(x) \in F(k, r, \Phi)\} \geq |b_n(f_1)| = n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2}.$$

Сравнив оценки сверху и снизу, получаем

$$\sup\{|b_n(f)| : f(x) \in F(k, r, \Phi)\} = n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2}.$$

Следствие 2 доказано.

5. Доказательство теоремы 3. Используя определение класса $\mathcal{F}_k^r(h)$, а также соотношения (5) и (17), имеем

$$\begin{aligned} p_{2n}(\mathcal{F}_k^r(h), L_2) &\leq p_{2n-1}(\mathcal{F}_k^r(h), L_2) \leq d_{2n-1}(\mathcal{F}_k^r(h), L_2) \\ &\leq E_{n-1}(\mathcal{F}_k^r(h)) \leq n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{k/2}. \end{aligned} \quad (31) \quad \{33\}$$

Для нахождения оценок снизу n -поперечников класса $\mathcal{F}_k^r(h)$ рассмотрим в $\mathcal{T}_n \cap L_2$ шар

$$\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq n^{-r} \left(\frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right)^{k/2} \right\}.$$

Для произвольного полинома $T_n(x) \in \widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}$ при $0 < nh \leq \pi/2$ из (27) получим

$$\int_0^h \omega_k^{2/k}(T_n^{(r)}, \tau) d\tau \leq 2n^{2r/k} \|T_n\|^{2/k} \left(h - \frac{1}{n} \sin nh \right) \leq 1. \quad (32) \quad \{33\}$$

Учитывая определение класса $\mathcal{F}_k^r(h)$ и неравенство (32), имеем $\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1} \subset \mathcal{F}_k^r(h)$. Используя (5) и определение бернштейнговского n -поперечника, запишем

$$p_{2n}(\mathcal{F}_k^r(h), L_2) \geq b_{2n}(\mathcal{F}_k^r(h), L_2) \geq b_{2n}(\widetilde{\mathbb{B}}_{2n+1}, L_2) \geq n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{k/2}. \quad (33) \quad \{33\}$$

Требуемые равенства (10) следуют из сравнения между собой соотношений (31) и (33), чем и завершается доказательство теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда

$$\sup\{|a_n(f)| : f(x) \in \mathcal{F}_k^r(h)\} = \sup\{|b_n(f)| : f(x) \in \mathcal{F}_k^r(h)\} = n^{-r} \left\{ \frac{n}{2(nh - \sin nh)} \right\}^{k/2},$$

где натуральное число n удовлетворяет неравенству $n \leq \pi/(2h)$.

Доказательство данного утверждения не приводится, поскольку повторяет рассуждения, имевшие место при получении следствия 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [2] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.
- [3] Л. В. Тайков, “Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **25**:2 (1979), 217–223.
- [4] А. А. Лигун, “Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **24**:6 (1978), 785–792.
- [5] В. В. Шалаев, “О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков”, *Укр. матем. ж.*, **43**:1 (1991), 125–129.
- [6] Х. Юсеф, “О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 ”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Калининский гос. ун-т, Калинин, 1988, 100–114.

- [7] М. Г. Есмаганбетов, “Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона”, *Матем. заметки*, **65**:6 (1999), 816–820.
- [8] С. Б. Вакарчук, “О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников”, *Матем. заметки*, **70**:3 (2001), 334–345.
- [9] С. Б. Вакарчук, “О наилучших полиномиальных приближениях 2π -периодических функций и точных значениях n -поперечников функциональных классов в пространстве L_2 ”, *Укр. матем. ж.*, **54**:12 (2002), 1603–1615.
- [10] С. Н. Васильев, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами”, *Докл. РАН*, **385**:1 (2002), 11–14.
- [11] А. И. Степанец, А. С. Сердюк, “Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p ”, *Укр. матем. ж.*, **54**:1 (2002), 106–124.
- [12] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. ж.*, **56**:11 (2004), 1458–1466.
- [13] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.
- [14] А. Pinkus, *n -Widths in Approximation Theory*, Springer, Berlin, 1985.

С. Б. Вакарчук

Академия таможенной службы Украины

г. Днепропетровск

E-mail: academy@amsu.dnp.ukrpack.net

Поступила в редакцию

09.03.2005

Исправленный вариант

25.12.2005