Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Вязовская, Н. С. Пупашенко, О нормирующем множителе обобщенного ядра Джексона, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 20–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2775>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:51:09

УДК 517.518.82

О НОРМИРУЮЩЕМ МНОЖИТЕЛЕ ОБОБЩЕННОГО ЯДРА ДЖЕКСОНА

М. С. Вязовская, Н. С. Пупашенко

Рассматривается вопрос о значении нормирующего множителя

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2k} dt$$

для обобщенного ядра Джексона $J_{n,k}(t)$. Получены явная формула

$$\gamma_{n,k} = 2 \sum_{p=0}^{[k-\frac{k}{n}]} (-1)^p \binom{2k}{p} \binom{k(n+1)-np-1}{k(n-1)-np}$$

и представление

$$\gamma_{n,k} = \sqrt{\frac{24}{\pi}} \cdot \frac{(n-1)^{2k-1}}{\sqrt{2k-1}} \left[1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2k-1} + \omega(n,k) \right],$$

где

$$|\omega(n,k)| < \frac{4}{(2k-1)\sqrt{\ln(2k-1)}} + \sqrt{12\pi} \cdot \frac{k^{\frac{3}{2}}}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{2k-2}.$$

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В теории приближений хорошо известно обобщенное ядро Джексона (см. монографии по теории аппроксимации [1]–[7] и др.)

$$J_{n,k}(t) = \frac{1}{\gamma_{n,k}} \left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2} \right)^{2k},$$

в котором

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2k} dt.$$

Хорошо известно (см. [8]), что

$$c_1(k)n^{2k-1} \leq \gamma_{n,k} \leq c_2(k)n^{2k-1},$$

где $c_1(k)$, $c_2(k)$ — постоянные, зависящие от k .

Ввиду важности ядра $J_{n,k}$ для приложений возникает вопрос о более точной оценке значения $\gamma_{n,k}$ для различных n и k .

В данной работе в пункте 2 доказана

ТЕОРЕМА 1. Значение $\gamma_{n,k}$ равно удвоенному коэффициенту при $x^{k(n-1)}$ в многочлене $(1+x+\dots+x^{n-1})^{2k}$.

С помощью теоремы 1 получено равенство

$$\gamma_{n,k} = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor k - \frac{k}{n} \rfloor} (-1)^p \binom{2k}{p} \binom{k(n+1) - np - 1}{k(n-1) - np}.$$

В пункте 3 доказана следующая оценка для $\gamma_{n,k}$.

ТЕОРЕМА 2. Для всех $n, k \geq 2$ имеет место равенство

$$\gamma_{n,k} = \sqrt{\frac{24}{\pi}} \cdot \frac{(n-1)^{2k-1}}{\sqrt{2k-1}} \left[1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2k-1} + \omega(n, k) \right], \quad (1) \quad \{1\}$$

где

$$|\omega(n, k)| < \frac{4}{(2k-1)\sqrt{\ln(2k-1)}} + \sqrt{12\pi} \cdot \frac{k^{\frac{3}{2}}}{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{2k-2}.$$

2. Явная формула для $\gamma_{n,k}$. Всюду далее $\sharp A$ означает количество элементов множества A . Обозначим

$$\zeta_{i_1, \dots, i_m} := \left\{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \{-1, 1\}^m \mid \sum_{j=1}^m \xi_j i_j = 0 \right\}.$$

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1. Имеет место равенство

$$\gamma_{n,k} = 2 \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} n^{k-m} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n - i_j) \sharp \zeta_{i_1, \dots, i_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2k} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(n + 2 \sum_{p=1}^{n-1} (n-p) \cos pt \right)^k dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} n^{k-m} 2^m \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n - i_j) \cos i_j t dt \\ &= 2 \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} n^{k-m} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n - i_j) \cdot \frac{2^{m-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^m \cos i_j t dt. \end{aligned}$$

С помощью индукции по m находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^m \cos i_j t dt = \frac{1}{2^m} \sum_{\xi \in \{-1, 1\}^m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \left(\sum_{j=1}^m \xi_j i_j \right) t dt.$$

Поэтому из равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax dx = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 2\pi, & \text{если } a = 0, \end{cases}$$

следует, что

$$\frac{2^{m-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^m \cos i_j t \, dt = \sharp \zeta_{i_1, \dots, i_m}.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заметим, что $\sharp \zeta_{i_1, \dots, i_m}$ равно свободному члену в выражении

$$(x^{i_1} + x^{-i_1}) \dots (x^{i_m} + x^{-i_m}).$$

Тогда из леммы 1 вытекает, что $\frac{1}{2} \gamma_{n,k}$ равно свободному члену в выражении

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} n^{k-m} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n - i_j) (x^{i_j} + x^{-i_j}) := B.$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} B &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} n^{k-m} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) (x^i + x^{-i}) \right)^m \\ &= \left(n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) (x^i + x^{-i}) \right) \right)^k. \end{aligned}$$

Теперь требуемый результат следует из равенств

$$\begin{aligned} n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) (x^i + x^{-i}) \right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=-i}^i x^p \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{-i} \frac{1 - x^{2i+1}}{1 - x} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{-i}}{1 - x} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1}{x^{n-1}} \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \right)^2 = (1 + x + \dots + x^{n-1})^2 \frac{1}{x^{n-1}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место равенство*

$$\gamma_{n,k} = 2 \sum_{p=0}^{\lfloor k - \frac{k}{n} \rfloor} (-1)^p \binom{2k}{p} \binom{k(n+1) - np - 1}{k(n-1) - np}. \quad (2) \quad \{2\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right)^{2k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2k + m - 1}{m} x^m, \quad x \in (-1, 1).$$

Поэтому $\forall x \in (-1; 1)$ имеем

$$\begin{aligned} (1 + x + \dots + x^{n-1})^{2k} &= \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \right)^{2k} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right)^{2k} (1 - x^n)^{2k} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{2k + i - 1}{i} x^i \sum_{p=0}^{2k} \binom{2k}{p} (-x^n)^p. \end{aligned}$$

Теперь (2) следует из теоремы 1.

Приведем значения $\gamma_{n,k}$ для малых k :

k	$\gamma_{n,k}$
$k = 1$	$2n$
$k = 2$	$\frac{4}{3}n^3 + \frac{2}{3}n$
$k = 3$	$\frac{11}{10}n^5 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{2}{5}n$
$k = 4$	$\frac{302}{315}n^7 + \frac{4}{9}n^5 + \frac{14}{45}n^3 + \frac{2}{7}n$
$k = 5$	$\frac{15619}{18144}n^9 + \frac{175}{432}n^7 + \frac{247}{864}n^5 + \frac{1025}{4536}n^3 + \frac{2}{9}n$
$k = 6$	$\frac{655177}{831600}n^{11} + \frac{809}{2160}n^9 + \frac{961}{3600}n^7 + \frac{3197}{15120}n^5 + \frac{479}{2700}n^3 + \frac{2}{11}n$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n,k}}{2} &= \# \left\{ \xi \in \{0, \dots, n-1\}^{2k} \mid \sum_{j=1}^{2k} \xi_j = k(n-1) \right\} \\ &= \# \left\{ \xi \in \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, 1 \right\}^{2k} \mid \sum_{j=1}^{2k} \xi_j = k \right\}. \end{aligned}$$

3. Доказательство теоремы 2. Нам понадобятся следующие вспомогательные факты. Обозначим

$$\varphi(z) = \frac{\sin z/2}{z/2}.$$

Имеет место следующее утверждение

ЛЕММА 2. *При $|z| \leq 3$ имеем*

$$\ln \varphi(z) = S_2 z^2 + S_4 z^4 + \beta(z) z^6,$$

где $S_2 = -1/24$, $S_4 = -1/2880$, а $|\beta(z)| \leq 0.00011$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложение $\ln \varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \right) &= \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} - 1 \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} - 1 \right)^3 \cdot \alpha \\ &= -\frac{z^2}{4 \cdot 3!} + \frac{z^4}{16 \cdot 5!} - \frac{z^6 \cdot \theta_1}{64 \cdot 7!} - \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{4 \cdot 3!} + \frac{z^4 \cdot \theta_2}{16 \cdot 5!} \right)^2 + \frac{\alpha}{3} \left(\frac{z^2 \cdot \theta_3}{4 \cdot 3!} \right)^3 \\ &= -\frac{z^2}{24} - \frac{z^4}{2880} + z^6 \left(-\frac{\theta_1}{64 \cdot 7!} + \frac{\theta_2}{64 \cdot 3! \cdot 5!} + \frac{\theta_3^3 \cdot \alpha}{3 \cdot 24^3} \right) + \frac{z^8 \cdot \theta_2^2}{2 \cdot (16 \cdot 5!)^2} \\ &= -\frac{z^2}{24} - \frac{z^4}{2880} + z^6 \left(-\frac{\theta_1}{64 \cdot 7!} + \frac{\theta_2}{64 \cdot 3! \cdot 5!} + \frac{\theta_3^3 \cdot \alpha}{3 \cdot 24^3} + \frac{z^2 \cdot \theta_2^2}{2 \cdot (16 \cdot 5!)^2} \right), \end{aligned}$$

где $\theta_i \in [-1; 1]$, $i = 1, \dots, 3$, а $\alpha = z_0^{-3}$, где $z_0 \in [\sin(z/2)/(z/2); 1]$. Легко видеть, что из $|z| \leq 3$ следует, что $\sin(z/2)/(z/2) > 0.66$, откуда $\alpha < 3.48$. Поэтому

$$\left| -\frac{\theta_1}{64 \cdot 7!} + \frac{\theta_2}{64 \cdot 3! \cdot 5!} + \frac{\theta_3^3 \cdot \alpha}{3 \cdot 24^3} + \frac{z^2 \cdot \theta_2^2}{2 \cdot (16 \cdot 5!)^2} \right| < 0.00011,$$

что и требовалось доказать.

Зафиксируем $p \in \mathbb{N}$ и обозначим

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right)^p - e^{S_2 z^2} \left(1 + \frac{S_4 z^4}{p} \right) \right| dz.$$

ЛЕММА 3. *Имеет место оценка*

$$I \leq \frac{22}{p\sqrt{\ln p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что для любого $K > 0$

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{|z| > \sqrt{K \ln p}} \left| \varphi \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right|^p dz + \int_{|z| > \sqrt{K \ln p}} \left| e^{S_2 z^2} \left(1 + \frac{S_4 z^4}{p} \right) \right| dz \\ &\quad + \int_{|z| \leq \sqrt{K \ln p}} \left| \left(\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right)^p - e^{S_2 z^2} \left(1 + \frac{S_4 z^4}{p} \right) \right| dz =: I_A + I_B + I_C. \end{aligned}$$

Положим $K = 24$ и оценим каждый из полученных интегралов:

$$\begin{aligned} I_A &= \sqrt{p} \cdot \int_{|z| > \sqrt{\frac{24 \ln p}{p}}} |\varphi(z)|^p dz = \sqrt{p} \cdot \int_{|z| > \sqrt{\frac{24 \ln p}{p}}} \left| \frac{\sin z/2}{z/2} \right|^p dz \\ &\leq 2 \left(\sqrt{p} \int_{\sqrt{\frac{24 \ln p}{p}}}^4 (e^{-\frac{y^2}{24}})^p dy + \sqrt{p} \int_4^{\infty} \left(\frac{2}{z} \right)^p dz \right) \\ &\leq 2 \int_{\sqrt{24 \ln p}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{24}} dy + \frac{2\sqrt{p}}{(p-1)2^{p-1}} \\ &\leq 2 \int_{\sqrt{24 \ln p}}^{\infty} e^{-\frac{y \cdot \sqrt{24 \ln p}}{24}} dy + \frac{2\sqrt{p}}{(p-1)2^{p-1}} \leq \frac{3}{p\sqrt{\ln p}}, \\ I_B &= \int_{|z| > \sqrt{K \ln p}} e^{-\frac{1}{24} z^2} dz + \frac{2S_4}{p} \left(\int_{\sqrt{K \ln p}}^{\infty} z^4 e^{-\frac{1}{24} z^2} dz \right) \\ &\leq \int_{\sqrt{K \ln p}}^{\infty} e^{-\frac{1}{24} z \sqrt{24 \ln p}} dz \left(2 + \frac{6}{20p} \right) + \frac{\sqrt{24}(\ln p)^{\frac{3}{2}}}{5p^2} + \frac{3 \cdot \sqrt{24}(\ln p)^{\frac{1}{2}}}{10p^2} \\ &\leq \frac{1}{p\sqrt{\ln p}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2\sqrt{6}(\ln p)^2}{p} + \frac{3\sqrt{6} \ln p}{p} + \frac{3}{20\sqrt{6}p} \right) \leq \frac{2}{p\sqrt{\ln p}}. \end{aligned}$$

Для оценки I_C заметим, что из леммы 2 следует

$$\begin{aligned} \left(\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right)^p &= \exp \left\{ S_2 z^2 + \frac{z^4}{p} S_4 + \frac{z^6}{p^2} \beta \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right\} \\ &= \exp \{ S_2 z^2 \} \exp \left\{ \frac{z^4}{p} S_4 + \frac{z^6}{p^2} \beta \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right\} \\ &= \exp \{ S_2 z^2 \} \left(\frac{z^4}{p} S_4 + \frac{z^6}{p^2} \beta \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) + \left(\frac{z^4}{p} S_4 + \frac{z^6}{p^2} \beta \left(\frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right)^2 \gamma(z) \right), \end{aligned}$$

где $\gamma(z) < 1/2$. Теперь, так как $\sqrt{24 \ln p/p} < 3$, из леммы 2 окончательно получаем

$$\begin{aligned} I_C &= \int_{|z| \leq \sqrt{24 \ln p}} \left(\frac{z^6}{p^2} \beta\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right) + \left(\frac{z^4}{p} S_4 + \frac{z^6}{p^2} \beta\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right) \right)^2 \gamma(z) \right) \\ &\leq 2.2 \frac{(\ln p)^{\frac{7}{2}}}{p^2} + 0.03 \frac{(\ln p)^{\frac{9}{2}}}{p^2} + 0.3 \frac{(\ln p)^{\frac{11}{2}}}{p^3} + 0.9 \frac{(\ln p)^{\frac{13}{2}}}{p^4} \\ &\leq 2.2 \frac{(\ln p)^{\frac{7}{2}}}{p^2} + 0.3 \frac{(\ln p)^{\frac{9}{2}}}{p^2}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\frac{2.2(\ln p)^{\frac{7}{2}}}{p^2} + \frac{0.3(\ln p)^{\frac{9}{2}}}{p^2} \leq \frac{17}{p\sqrt{\ln p}},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Пусть

$$M = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{2k-1}) \in [0; 1]^{2k-1} \mid \sum_{j=1}^{2k-1} x_j \in [k-1; k] \right\},$$

а $V(M)$ – объем тела M . Имеет место

ЛЕММА 4. *Справедлива оценка*

$$\left| (n-1)^{2k-1} V(M) - \frac{\gamma_{n,k}}{2} \right| \leq 6k \cdot n^{2k-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \left(\frac{l_1}{n-1}, \dots, \frac{l_{2k-1}}{n-1} \right) \mid l_j = 0, \dots, n-1 \right\} - \text{решетка в кубе } [0; 1]^{2k-1}, \\ L^* &= \left\{ \left(\frac{l_1}{n-1}, \dots, \frac{l_{2k}}{n-1} \right) \mid l_j = 0, \dots, n-1 \right\} - \text{решетка в кубе } [0; 1]^{2k}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{n,k}}{2} &= \# \left\{ \xi \in L^* \mid \sum_{j=1}^{2k} \xi_j = k \right\} \\ &= \# \left\{ \xi \in L^* \mid \sum_{j=1}^{2k-1} \xi_j \in [k-1; k], \quad \xi_{2k} = k - \sum_{j=1}^{2k-1} \xi_j \right\} \\ &= \# \left\{ \xi \in L \mid k-1 \leq \sum_{j=1}^{2k} \xi_j \leq k \right\} =: N, \end{aligned}$$

т.е. $\gamma_{n,k}/2 = \#(L \cap M)$. Обозначим для $l \in L$

$$B_l := \prod_{j=1}^{2k-1} \left[\frac{l_j}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}; \frac{l_j}{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \right].$$

Для $x \in [0; 1]^{2k-1}$ обозначим $\xi(x)$ ближайшую к x точку решетки L . Тогда $|\xi_i(x) - x_i| \leq 1/(2(n-1))$, откуда, при $x \in M$

$$k-1 - \frac{2k-1}{2(n-1)} \leq \sum_{j=1}^{2k-1} \xi_j(x) \leq k + \frac{2k-1}{2(n-1)},$$

а при $x \in [0; 1]^{2k-1} \setminus M$

$$k - \frac{2k-1}{2(n-1)} \leq \sum_{j=1}^{2k-1} \xi_j(x) \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{2k-1} \xi_j(x) \leq k-1 + \frac{2k-1}{2(n-1)}.$$

Тогда $[0; 1]^{2k-1} \cap (\bigcup_{\xi \in N_-} B_\xi) \subset M \subset \bigcup_{\xi \in N_+} B_\xi$, где

$$N_+ = \left\{ \xi \in L \mid k-1 - \frac{2k-1}{2(n-1)} \leq \sum_{j=1}^{2k-1} \xi_j \leq k + \frac{2k-1}{2(n-1)} \right\},$$

$$N_- = \left\{ \xi \in L \mid k-1 + \frac{2k-1}{2(n-1)} \leq \sum_{j=1}^{2k-1} \xi_j \leq k - \frac{2k-1}{2(n-1)} \right\}.$$

Зафиксировав первые $2k-2$ координат, из неравенств выше получим, что

$$\#N_+ \leq \#N + n^{2k-2}(2k-1) \quad \text{и} \quad \#N - n^{2k-2}(2k-1) \leq \#N_-,$$

откуда для объема $V(M)$ выполняются следующие оценки (для N_- необходимо отнять точки, лежащие на гранях куба $[0; 1]^{2k-1}$):

$$V(M) \geq \frac{\#N_-}{(n-1)^{2k-1}} - \frac{2(2k-1)}{n-1} \geq \frac{\#N}{(n-1)^{2k-1}} - \frac{6kn^{2k-2}}{(n-1)^{2k-1}}, \quad (3) \quad \{3\}$$

$$V(M) \leq \frac{1}{(n-1)^{2k-1}} \#N_+ \leq \frac{1}{(n-1)^{2k-1}} \#N + \frac{(2k-1)n^{2k-2}}{(n-1)^{2k-1}}. \quad (4) \quad \{4\}$$

Так как $\gamma_{n,k}/2 = \#N$, из неравенств (3) и (4) получаем утверждение леммы.

Рассмотрим независимые случайные величины ζ_j , равномерно распределенные на отрезке $[-1/2; 1/2]$. Заметим, что вероятность

$$P\left(\sum_{j=1}^{2k-1} \zeta_j \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$$

равна объему множества M . Для оценки полученной вероятности воспользуемся схемой доказательства граничной теоремы с уточнениями для случайных блужданий с непрерывным распределением (см. [9; теорема 5, с. 53]).

Характеристическая функция случайной величины ζ_j есть

$$\varphi(z) = \frac{\sin z/2}{z/2}.$$

Обозначим f_m плотность распределения случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \zeta_j.$$

ЛЕММА 5. Для всех x имеет место следующая оценка:

$$\left| f_m - \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6x^2} \left[1 + \frac{1}{m} Q_2(x) \right] \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{22}{m\sqrt{\ln m}},$$

где

$$Q_2(x) = -\frac{3}{8} + \frac{27}{5} x^2 - \frac{18}{5} x^4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ζ_j независимые одинаково распределенные величины, характеристическая функция $\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m \zeta_j$ равна

$$\varphi_m(z) = \left[\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{m}} \right) \right]^m,$$

где φ характеристическая функция величины ζ_j . Поэтому

$$f_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \left[\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{m}} \right) \right]^m dz.$$

Отсюда в силу леммы 3

$$\begin{aligned} & \left| f_m - \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6x^2} \left[1 + \frac{1}{m} Q_2(x) \right] \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{m}} \right) \right)^m - e^{S_2 z^2} \left(1 + \frac{1}{m} S_4 z^4 \right) \right] e^{-izx} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\varphi \left(\frac{z}{\sqrt{m}} \right) \right)^m - e^{S_2 z^2} \left(1 + \frac{1}{m} S_4 z^4 \right) \right| dz \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{22}{m\sqrt{\ln m}}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по отрезку $[-1/(2\sqrt{2k-1}); 1/(2\sqrt{2k-1})]$ оценку, полученную для плотности f_m , находим

$$P\left(\sum_{j=1}^{2k-1} \zeta_j \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \left(\frac{1}{(2k-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8(2k-1)^{\frac{3}{2}}} + \delta(2k-1) \right),$$

где

$$|\delta(p)| \leq \frac{4}{p^{\frac{3}{2}} \sqrt{\ln p}}.$$

Отсюда из леммы 4 следует соотношение (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что оценка выполняется для всех n, k , однако представляет интерес лишь для $n \gg k$, скажем при $n > k^3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [2] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977.
- [4] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.

- [5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [6] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960.
- [7] И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наукова думка, Киев, 1992.
- [8] С. Б. Стечкин, “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, *Изв. АН. СССР. Сер. матем.*, **15**:3 (1951), 219–242.
- [9] А. В. Скороход, Н. П. Слободянюк, *Предельные теоремы для случайных блужданий*, Наукова думка, Киев, 1970.

М. С. Вязовская

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

E-mail: viazovska@univ.kiev.ua

Поступила в редакцию

28.09.2005

Исправленный вариант

30.01.2006

Н. С. Пупашенко

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

E-mail: kito@univ.kiev.ua