Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Драгилев, П. А. Чалов, О пространствах Фреше с безусловным базисом, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 29–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:09:27

УДК 513.88

О ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ С БЕЗУСЛОВНЫМ БАЗИСОМ

М. М. Драгилев, П. А. Чалов

Ненормируемое $\mathcal{F}$ -пространство, имеющее безусловный базис, не обязательно изоморфно обобщенному пространству Кёте.

Библиография: 23 названия.

Пусть X – отделимое локально выпуклое пространство (ЛВП) с определяющей системой преднорм $(|x|_p: x \in X, p \in \mathcal{P})$, $(x_n)_1^\infty \subset X$ – последовательность отличных от нуля элементов, ℓ – банахово пространство последовательностей $(t_n)_1^\infty$ комплексных чисел с безусловным базисом ортов $(e_n)_1^\infty$, $e_n = (\delta_{in})_{i=1}^\infty$, $n = 1, 2, \dots$, и с монотонной нормой $\|\cdot\|$, удовлетворяющей условию: $\|e_n\| = 1$, $n = 1, 2, \dots$ (сокращенно, $\ell \in \Lambda$).

Обобщенным пространством Кёте (ОПК) [1; § 3] называют векторное пространство

$$\ell((a_{pn})_{\mathcal{P}, \mathbb{N}}) \quad (= \ell((x_n)_{\mathbb{N}})) \quad (a_{pn} = |x_n|_p)$$

всех числовых последовательностей $(t_n)_1^\infty$ таких, что $(t_n a_{pn})_{n=1}^\infty \in \ell$ ($p \in \mathcal{P}$) с локально выпуклой топологией, задаваемой системой преднорм

$$|(t_n)_1^\infty|_p^* = \|(t_n a_{pn})_{\mathbb{N}}\|, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Последовательность ортов является в этом пространстве безусловным шаудеровским базисом. Если $(x_n)_1^\infty$ – базис в X и система преднорм

$$\left(|x|_p^* = |(t_n)_1^\infty|_p^*: x = \sum_n t_n x_n \in X, \quad p \in \mathcal{P} \right)$$

задает исходную топологию в X , то базис $(x_n)_1^\infty$ называют ℓ -абсолютным (или базисом типа ℓ). При этом пространство X изоморфно соответствующему ОПК: $X \simeq \ell((x_n)_{\mathbb{N}})$. Например, безусловный базис $(x_n)_1^\infty$ банахова пространства X является ℓ -абсолютным базисом, где $\ell \in \Lambda$ определяется соотношениями

$$\ell = \left\{ (t_n)_1^\infty: \sum_n t_n \frac{x_n}{\|x_n\|} = x \in X \right\}, \quad \|(t_n)_1^\infty\| = \|x\|.$$

Таким образом, каждое (бесконечномерное) банахово пространство с безусловным базисом изоморфно некоторому ОПК.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. Абсолютный шаудеровский базис в бочечном ЛВП имеет тип ℓ_1 .

2. Изоморфные ЛВП могут иметь ℓ -абсолютные базисы не совпадающих типов. Таковы, например, любые два не эквивалентные безусловные нормированные базиса в банаховом пространстве.

3. В ядерном $\mathcal{F}$ -пространстве, имеющем базис, все базисы абсолютны [2], а также ℓ -абсолютны при $\ell \in \Lambda$.

Как вытекает из [3]–[16] (см. также [1], [17]), существуют три и только три базисных типа – ℓ_1 , ℓ_2 и c_0 – обладающие свойством: в каждом бочечном ЛВП, имеющем ℓ -абсолютный базис, все безусловные шаудеровские базисы ℓ -абсолютны.

Ненормируемое ЛВП, в отличие от банахова пространства, может иметь безусловный базис, не являющийся ℓ -абсолютным. Например, последовательность координатных ортов $(e_n)_1^\infty$ образует безусловный базис в $\mathcal{F}$ -пространстве

$$\ell^{p+} = \left\{ (t_n)_1^\infty : \left(\sum_n |t_n|^{m_r} \right)^{\frac{1}{m_r}} = |(t_n)_1^\infty|_r < \infty, \quad m_1 > m_2 > \dots > m_r > \dots > p \right\},$$

но не является ℓ -абсолютным базисом ни при каком $\ell = (\ell, \|\cdot\|) \in \Lambda$. Действительно, в противном случае определяющая система норм $(|\cdot|_r)_1^\infty$ в ℓ^{p+} эквивалентна единственной норме $\|(t_n)_1^\infty\| = \|(t_n|e_n|_r)_1^\infty\|$ ($(t_n)_1^\infty \in \ell^{p+}$, $r = 1, 2, \dots$). Но ℓ^{p+} не нормируемо, поскольку не содержит ограниченной окрестности нуля. Мы покажем, что ℓ^{p+} вообще не имеет ℓ -абсолютного базиса.

Пусть X и $Y \subset X$ – банаховы пространства с единичными окрестностями нуля, соответственно, U и V . Как известно [18]–[20], n -поперечником по Бернштейну множества V (относительно U) называют число

$$b_n(V, U) = \sup_{X_n} \inf \left\{ \frac{\|x\|_U}{\|x\|_V} : x \in X_n, \quad x \neq 0 \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\sup$ берется по всем n -мерным подпространствам X_n пространства X . Точные значения относительных n -поперечников для стандартных окрестностей нуля вложенных координатных пространств Орлича вычислены в [21]. В частности, если U_r – единичная окрестность нуля в пространстве ℓ_{m_r} , $r = 1, 2, \dots$, то при любых $r_1 < r_2$ ($= m_{r_1} > m_{r_2} > p$) имеем

$$b_n(V, U) = \frac{1}{n^{1/m_{r_2} - 1/m_{r_1}}} \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим далее, что $\ell = (\ell, \|\cdot\|) \in \Lambda$ и $(x_n)_1^\infty$ – ℓ -абсолютный базис в ℓ^{p+} . Обозначим

$$V_s = \{(t_n)_1^\infty \in \ell^{p+} : \|(t_n|x_n|_s)_{n=1}^\infty\| = |(t_n)_1^\infty|_s^* \leq 1\}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Пользуясь тем, что определяющие системы окрестностей нуля $(U_r)_1^\infty$ и $(V_r)_1^\infty$ в ℓ^{p+} эквивалентны, выберем множества U_{r_1} , V_{s_1} , $U_{r_2} \neq U_{r_3}$, V_{s_2} , U_{r_4} так, чтобы каждое следующее поглощалось предыдущим. Тогда в силу монотонности поперечников $b_n(V, U)$ и по V , и по U справедлива оценка

$$b_n(V_{s_2}, V_{s_1}) \leq C b_n(U_{r_3}, U_{r_2}) = \frac{C}{n^{1/m_{r_3} - 1/m_{r_2}}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1) \quad \{1\}$$

с положительной постоянной C , не зависящей от n .

Покажем, что выполняется соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_k|_{s_1}}{|x_k|_{s_2}} = 0. \quad (2) \quad \{2\}$$

Действительно, в противном случае при некотором $\delta > 0$ для бесконечной последовательности индексов $(k_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ будем иметь

$$\frac{|x_{k_j}|_{s_1}}{|x_{k_j}|_{s_2}} \geq \delta, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3) \quad \{3\}$$

Пусть n фиксировано и $X_n \subset \ell^{p+}$ – подпространство, натянутое на первые n элементов последовательности $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$. Из (3) и монотонности нормы $\|\cdot\|$ в пространстве ℓ для произвольного элемента $x = \sum_{j=1}^n u_j x_{k_j} \in X_n$, $x \neq 0$, выводим

$$|x|_{s_2}^* = \left\| \sum_{j=1}^n u_j |x_{k_j}|_{s_2} e_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n u_j |x_{k_j}|_{s_1} \frac{|x_{k_j}|_{s_2}}{|x_{k_j}|_{s_1}} e_j \right\| \leq \frac{1}{\delta} \left\| \sum_{j=1}^n u_j |x_{k_j}|_{s_1} e_j \right\| = \frac{|x|_{s_1}^*}{\delta}.$$

Отсюда следует выполнение оценки $b_n(V_{s_2}, V_{s_1}) \geq \delta$, которая противоречит (1). Этим доказано (2). Но тогда, как известно [22], каноническое отображение $\pi(V_{s_2}, V_{s_1})$ банахова пространства $(\ell^{p+}, |\cdot|_{s_2}^*)$ (пополнения ℓ^{p+} по норме $|\cdot|_{s_2}^*$) в пространство $(\ell^{p+}, |\cdot|_{s_1}^*)$ компактно. Так как окрестности нуля V_{s_1} и U_{r_4} поглощаются, соответственно, окрестностями U_{r_1} и V_{s_2} , тождественные отображения

$$J(V_{s_1}, U_{r_1}): (\ell^{p+}, |\cdot|_{s_1}^*) \rightarrow (\ell^{p+}, |\cdot|_{r_1}) \quad \text{и} \quad J(U_{r_4}, V_{s_2}): (\ell^{p+}, |\cdot|_{r_4}^*) \rightarrow (\ell^{p+}, |\cdot|_{s_2})$$

непрерывны. Следовательно, каноническое отображение

$$\pi(U_{r_4}, U_{r_1}) = J(V_{s_1}, U_{r_1}) \circ \pi(V_{s_2}, V_{s_1}) \circ J(U_{r_4}, V_{s_2}): (\ell^{p+}, |\cdot|_{r_4}^*) \rightarrow (\ell^{p+}, |\cdot|_{r_1})$$

компактно, как суперпозиция одного компактного и двух непрерывных отображений. Но это невозможно, поскольку $(\ell^{p+}, |\cdot|_{r_4}^*) = \ell_{m_{r_4}}$, $(\ell^{p+}, |\cdot|_{r_1}^*) = \ell_{m_{r_1}}$ и, как легко видеть, вложение $\ell_r \rightarrow \ell_s$ при $r < s$ не является компактным оператором. Таким образом, пространство ℓ^{p+} не имеет ℓ -абсолютного базиса. Другими словами, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Существует $\mathcal{F}$ -пространство с безусловным базисом, не изоморфное обобщенному пространству Кёте.*

Заметим в заключение, что ℓ^{p+} содержит дополняемое подпространство, изоморфное пространству Кёте. Более того, каждое ядерное степенное пространство Кёте конечного типа изоморфно некоторому дополняемому подпространству пространства ℓ^{p+} [23].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Драгилев, *Базисы в пространствах Кёте*, РГУ, Ростов-на-Дону, 1983, 2003.
- [2] A. Dynin, B. Mitiagin, “Criterion for nuclearity in terms of approximative dimension”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, **8:8** (1960), 535–540.

- [3] G. Köthe, O. Toeplitz, "Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen", *J. Reine Angew. Math.*, **171** (1934), 251–270.
- [4] E. R. Lorch, "Bicontinuous linear transformation in certain vector spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45**:2 (1939), 564–569.
- [5] И. М. Гельфанд, "Замечание к статье Н. К. Бари «Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве»", *Учен. зап. МГУ. Сер. матем.*, **4**:148 (1951), 224–225.
- [6] A. Pełczyński, "Projections in certain Banach spaces", *Studia Math.*, **19** (1960), 209–228.
- [7] J. Lindenstrauss, M. Zippin, "Banach spaces with a unique unconditional basis", *J. Funct. Anal.*, **3** (1969), 115–125.
- [8] A. Pełczyński, J. Singer, "On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces", *Studia Math.*, **25**:1 (1964), 5–25.
- [9] W. Wojtinski, "On bases in certain countably Hilbert spaces", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, **14**:12 (1966), 681–684.
- [10] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, "Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications", *Studia Math.*, **29** (1968), 275–326.
- [11] В. П. Захарюта, "О квазиэквивалентности базисов в конечных центрах гильбертовых шкал", *Докл. АН СССР*, **180**:4 (1968), 786–788.
- [12] Б. С. Митягин, "Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах", *Studia Math.*, **37**:2 (1971), 111–137.
- [13] В. П. Кондаков, *Некоторые вопросы изоморфизма и базисов локально выпуклых пространств. Дисс. ... к.ф.-м.н.*, РГУ, Ростов-на-Дону, 1972.
- [14] N. J. Kalton, "On absolute bases", *Math. An.*, **200** (1973), 209–225.
- [15] M. Zippin, "On perfectly homogeneous bases in Banach spaces", *Israel J. Math.*, **4** (1966), 265–272.
- [16] В. П. Кондаков, *Вопросы геометрии ненормируемых пространств*, РГУ, Ростов-на-Дону, 1983.
- [17] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I, II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977, 1979.
- [18] В. М. Тихомиров, "Об n -мерных поперечниках некоторых функциональных классов", *Докл. АН СССР*, **130**:4 (1960), 734–737.
- [19] В. М. Тихомиров, "Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений", *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120.
- [20] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.
- [21] П. А. Чалов, "Поперечники по Бернштейну множеств в координатных пространствах Орлича", *Теор. функц., функц. анализ и их прилож.*, Вып. 35. Респ. межвед. науч. сборник, Вища школа, Харьков, 1981, 119–123.
- [22] Б. С. Митягин, "Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах", *УМН*, **16**:4 (1961), 63–132.
- [23] G. Metafune, V. B. Moscatelli, "On the space $\ell^{p+} = I_{q>p}\ell^q$ ", *Math. Nachr.*, **147** (1990), 7–12.

М. М. Драгилев

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию

04.06.2004

П. А. Чалов

Ростовский государственный университет

E-mail: chalov@math.rsu.ru