ЛЕМНИСКАТА И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ЛОГАРИФИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ КONTИНУУМА

В. Н. Дубинин

Показано, что для любого полинома $P(z) = z^n + \dots$ со связной лемнискатой $E(P) = \{z: |P(z)| \leq 1\}$ и с m критическими точками, и для любых $n - m + 1$ точек лемнискаты $E(P)$ существует континуум $\gamma \subset E(P)$ логарифмической емкости $\text{cap } \gamma \leq 2^{-1/n}$, соединяющий эти точки, а также все нули и критические точки полинома P . В качестве следствий приводятся некоторые оценки для континуумов наименьшей емкости, содержащих наперед заданные точки.

Библиография: 7 названий.

1. Введение и формулировка основного результата. Всюду ниже

$$P(z) = \prod_{\mu=1}^n (z - z_{\mu}), \quad (1) \quad \{1\}$$

где $n \geq 2$ и z_{μ} , $\mu = 1, \dots, n$, – комплексные числа. Множество

$$E(P) = \{z: |P(z)| \leq 1\}$$

принято называть *лемнискатой* [1]. Метрическим свойствам лемнискаты, а также взаимному расположению нулей z_{μ} и критических точек полинома P (т.е. точек, где $P' = 0$) посвящено немало работ, а некоторые задачи в данной тематике не решены до сих пор (см., например, [1], [2]). Весьма полезным при изучении свойств лемнискаты является понятие логарифмической емкости континуума (далее – емкости) [3]. В данной заметке получено емкостное неравенство, характеризующее в некоторой степени разброс нулей и критических точек полинома P внутри лемнискаты $E(P)$. С другой стороны, если лемниската известна, то это неравенство можно трактовать как оценку емкости континуума, проходящего через заданные точки. Предположим, что

$$\max\{|P(\zeta)|: P'(\zeta) = 0\} \leq 1. \quad (2) \quad \{2\}$$

Тогда множество $E(P)$ связно, и поэтому следующее утверждение верно с константой $\sigma = 1$. Для любых точек a и b лемнискаты $E(P)$ существует континуум $\gamma \subset E(P)$ емкости $\text{cap } \gamma \leq \sigma$, содержащий точки a , b , а также все нули и все критические точки полинома P . В роли γ в этом случае выступает само множество $E(P)$. Естественно поставить вопрос о наименьшем значении величины σ , при котором указанное выше утверждение имеет место для любых полиномов (1). Заметим, что условие (2) в такой постановке является необходимым, ибо в противном случае множество $E(P)$ несвязно. Справедлива следующая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00099.

ТЕОРЕМА. Пусть полином (1) удовлетворяет условию (2), и пусть m – число всех критических точек этого полинома. Тогда для любых $n - m + 1$ точек лемнискаты $E(P)$ существует континуум $\gamma \subset E(P)$ емкости

$$\text{cap } \gamma \leq 2^{-1/n}, \quad (3) \quad \{3\}$$

содержащий эти точки, а также все нули и критические точки полинома P .

Число “свободных” точек лемнискаты $E(P)$ в оценке (3) равно $n - m + 1 \geq 2$. Поэтому независимо от числа критических точек для любых двух точек лемнискаты всегда найдется континуум $\gamma \subset E(P)$, удовлетворяющий (3) и соединяющий эти точки с нулями и критическими точками полинома P . Пример полинома $P(z) = T_n(2^{(1-n)/n}z)$, где $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$ – полином Чебышева, двух точек $\pm 2^{1-1/n}$ и континуума $\gamma = [-2^{1-1/n}, 2^{1-1/n}]$, показывает, что постоянная в правой части неравенства (3) не может быть улучшена. Наибольшее число “свободных” точек равно n , и в этом случае необходимо $m = 1$, а $P(z) = (z + d_1)^n + d_2$, где d_1, d_2 – комплексные числа. Полагая для определенности $d_1 = 0, d_2 = -1$, легко заключаем, что равенство в (3) достигается для полинома $P(z) = z^n - 1$, точек $\sqrt[n]{2} \exp(2\pi i j/n)$, $j = 1, \dots, n$, и континуума $\gamma = \{z: |z| \leq \sqrt[n]{2}, \arg z^n = 0\}$ (о вычислении емкости см. [3; с. 215, 216]). Этими примерами не исчерпываются все случаи равенства в (3). Отметим, что из неравенства (3) вытекает известная оценка сверху для диаметра лемнискаты $E(P)$ в случае, когда полином P удовлетворяет условию (2):

$$\text{diam } E(P) \leq 2^{2-1/n}$$

[4]. В заключительной части данной статьи рассматриваются также некоторые оценки для континуумов наименьшей емкости, вытекающие из неравенства (3).

2. Доказательство теоремы. Обозначим через ζ_ν , $\nu = 1, \dots, m$, все различные критические точки полинома P , и пусть a_j , $j = 1, \dots, n - m + 1$, – произвольные точки лемнискаты $E(P)$ из условия теоремы. Пусть $\mathcal{P}$ – аналитическая функция, обратная функции $w = P(z)$, и пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность функции $\mathcal{P}$ [5; гл. 10]. Далее рассматриваем функцию $\mathcal{P}$ как однозначную функцию, заданную на поверхности $\mathcal{R}$. Под проекцией точки $W \in \mathcal{R}$ понимается точка $P(\mathcal{P}(W)) \in \mathbb{C}_w$. Отрезком на $\mathcal{R}$ назовем любую жорданову кривую на поверхности $\mathcal{R}$, однолистно лежащую над некоторым отрезком в w -плоскости. Аналогично определяется луч на $\mathcal{R}$ как жорданова кривая, однолистно лежащая над некоторым лучом вида $\arg w = \text{const}$, $\rho \leq |w| \leq \infty$. Обозначим через $\mathcal{S}$ объединение всех отрезков на $\mathcal{R}$, у которых начало расположено над точкой $w = 0$, а конец совпадает с конечной точкой ветвления поверхности $\mathcal{R}$ (т.е. с одной из точек $\mathcal{P}^{-1}(\zeta_\nu)$, $\nu = 1, \dots, m$). В случае нулевых критических значений некоторые из этих отрезков могут оказаться вырожденными. Покажем, что множество $\mathcal{S}$ связно и каждая точка поверхности $\mathcal{R}$, лежащая над $w = 0$, принадлежит $\mathcal{S}$. Для этого разобьем поверхность $\mathcal{R}$ лучами, соединяющими конечные точки ветвления $\mathcal{R}$ с бесконечностью, на n простых листов (далее – листов) L_k , $k = 1, \dots, n$. Каждый лист L_k есть плоскость с одним или, возможно, большим числом разрезов, $k = 1, \dots, n$. Поэтому каждый лист L_k содержит, по крайней мере, один отрезок (возможно вырожденный), принадлежащий $\mathcal{S} \cap \bar{L}_k$, и, следовательно, множество $\mathcal{S}$ n -кратно покрывает точку $w = 0$ (с учетом кратности). Здесь $\bar{L}_k$ означает замыкание L_k в $\mathcal{R}$. Заметим, что для любого k , $1 \leq k \leq n$, множество $\mathcal{S} \cap \bar{L}_k$ связно. Склеивая данный лист $L_{k'}$ по одному из берегов разреза с другим листом $L_{k''}$ так, как это было на поверхности $\mathcal{R}$, получаем связное множество $\mathcal{S} \cap (\bar{L}_{k'} \cup \bar{L}_{k''})$. Затем к множеству $\bar{L}_{k'} \cup \bar{L}_{k''}$ приклеиваем другой лист $L_{k'''}$, получая связное множество $\mathcal{S} \cap (\bar{L}_{k'} \cup \bar{L}_{k''} \cup \bar{L}_{k'''})$ и так далее, пока

склеенные листы не образуют всю поверхность $\mathcal{R}$. Отсюда вытекает связность множества $\mathcal{S}$ и, как следствие, односвязность области $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$. Обозначим через f одну из регулярных ветвей аналитической функции $\omega = (P(z))^{1/n}$ в односвязной области $B := \mathcal{P}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})$. Функция f конформно и однолистно отображает область B на область $f(B)$, представляющую собой ω -плоскость, разрезанную по прямолинейным отрезкам. Каждый такой отрезок соединяет точку $\omega = 0$ с точкой, модуль которой больше нуля, но не превосходит единицы. Число указанных отрезков не превосходит $n + m - 1$. Действительно, каждая точка ветвления порождает $n_\nu + 1$ отрезок, где n_ν – кратность нуля ζ_ν производной полинома P , и некоторые из этих отрезков вырожденные, а

$$\sum_{\nu=1}^m (n_\nu + 1) = n - 1 + m.$$

Отсюда следует, что континуум

$$\Gamma = (\mathbb{C}_\omega \setminus f(B)) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n-m+1} [0, f(a_j)] \right)$$

состоит из не более, чем $2n$ невырожденных отрезков, выходящих из начала, и длины, не превосходящей единицы. Введем также симметричный континуум

$$\Gamma^* = \{\omega : |\omega| \leq 1, \arg \omega^{2n} = 0\},$$

состоящий из $2n$ отрезков. Емкость $\text{cap } \Gamma^*$ равна $2^{-1/n}$ [3; с. 216]. Из монотонности емкости и следствия 1.4 работы [6] имеем

$$2^{-1/n} = \text{cap } \Gamma^* \geq \text{cap } \Gamma.$$

Осталось рассмотреть континуум

$$\gamma = \mathcal{P}(\mathcal{S}) \cup f^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^{n-m+1} [0, f(a_j)] \right),$$

соединяющий точки a_j , $j = 1, \dots, n - m + 1$, а также все нули и критические точки полинома P . Поскольку

$$f(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \gamma) = \overline{\mathbb{C}}_\omega \setminus \Gamma$$

и разложение функции f в окрестности бесконечности имеет вид

$$f(z) = \alpha z + \dots, \quad |\alpha| = 1,$$

то

$$\text{cap } \Gamma = \text{cap } \gamma.$$

Теорема доказана.

3. О континуумах наименьшей емкости. В теории функций хорошо известна задача Н.Г. Чеботарева о континууме $\gamma(c_1, \dots, c_l)$ наименьшей емкости, содержащем заданные точки $c_1, \dots, c_l$ плоскости $\mathbb{C}_z$ [7; § 4, 5]. С этой задачей связаны многие экстремальные вопросы теории однолистных функций. Вместе с тем, ее решение при $n \geq 4$ до сих пор неизвестно. Даже в случае решения задачи Чеботарева емкость экстремального континуума наверняка будет иметь сложное аналитическое представление. Неравенство (3) позволяет оценить $\text{cap } \gamma(c_1, \dots, c_l)$ сверху в ряде частных случаев. Рассмотрим некоторые из них.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для заданных точек $z_\mu \in \mathbb{C}_z$, $\mu = 1, \dots, n$, обозначим через M величину $\max\{|P(\zeta)|: P'(\zeta) = 0\}$, где P – полином (1). Тогда для любых двух точек a_1 и a_2 , удовлетворяющих условию $|P(a_j)| \leq M$, $j = 1, 2$, справедливо неравенство

$$\text{сар } \gamma(z_1, \dots, z_n, a_1, a_2) \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{1/n}. \quad (4) \quad \{4\}$$

Равенство в (4) достигается, например, в случае, когда $z_\mu 2^{1/n-1}$, $\mu = 1, \dots, n$, – нули полинома Чебышева $T_n(z)$, и $a_j = (-1)^j 2^{1-1/n}$, $j = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полином $S(z) = P(M^{1/n}z)/M = z^n + \dots$ удовлетворяет условию (2):

$$\max\{|S(\zeta)|: S'(\zeta) = 0\} = \max\{|P(\zeta)|/M: P'(\zeta) = 0\} = 1.$$

Точки $z_\mu M^{-1/n}$, $\mu = 1, \dots, n$, являются нулями полинома S и, кроме того, $|S(a_j M^{-1/n})| \leq 1$, $j = 1, 2$. По теореме существует континуум γ емкости

$$\text{сар } \gamma \leq 2^{-1/n},$$

проходящий через точки $z_\mu M^{-1/n}$, $\mu = 1, \dots, n$, и $a_j M^{-1/n}$, $j = 1, 2$. Поэтому континуум $\Gamma := \{z: z M^{-1/n} \in \gamma\}$ соединяет точки z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, и a_j , $j = 1, 2$, и выполняются неравенства

$$\text{сар } \gamma(z_1, \dots, z_n, a_1, a_2) \leq \text{сар } \Gamma \leq (M/2)^{1/n}.$$

Случай равенства в (4) проверяется непосредственно. Следствие доказано.

В связи с полученным неравенством представляется интересным установить оценку сверху для величины $\max\{|P(\zeta)|: P'(\zeta) = 0\}$ в случае, когда все нули z_μ , $\mu = 1, \dots, n$, полинома $P(z) = z^n + \dots$ лежат в некотором круге $|z| \leq R$. Заметим, что в этом случае из свойств диссимметризации [6] легко следует оценка

$$\text{сар } \gamma(z_1, \dots, z_n) \leq 2^{-2/n} R$$

с равенством для точек $z_\mu^* = R \exp(2\pi i \mu/n)$, $\mu = 1, \dots, n$; $\gamma(z_1^*, \dots, z_n^*) = \{z: |z| \leq R, \arg z^n = 0\}$.

Широта применения следствия 1 ограничена сложностью вычисления константы M . Однако доказанная выше теорема дает также другой подход к оценкам наименьшей емкости.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для заданных точек $\zeta_\nu \in \mathbb{C}_z$, $\nu = 1, \dots, n-1$, пусть

$$P(z) = n \int_0^z (z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_{n-1}) dz + d_0 = z^n + \dots,$$

где d_0 – некоторое комплексное число. Тогда для любых точек a_1 и a_2 , удовлетворяющих условию

$$|P(a_j)| \leq M := \max_{1 \leq \nu \leq n-1} |P(\zeta_\nu)|,$$

справедливо неравенство

$$\text{сар } \gamma(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, a_1, a_2) \leq (M/2)^{1/n}.$$

Знак равенства имеет место, например, в случае, когда $\zeta_\nu 2^{1/n-1}$, $\nu = 1, \dots, n-1$, – нули производной полинома Чебышева $T_n(z)$, $d_0 = T_n(0)$ и $a_j = (-1)^j 2^{1-1/n}$, $j = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения повторяет с небольшими изменениями доказательство следствия 1. Необходимо лишь учесть прохождение континуума γ через критические точки подходящего полинома.

В качестве примера, положим в следствии 2 $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$, и $d_0 = 0$. Тогда

$$\gamma(-1, 1, a_1, a_2) \leq 1$$

для любых точек a_1 и a_2 из лемнискаты $|z^3 - 3z| \leq 2$ с равенством в случае $a_1 = -2$ и $a_2 = 2$.

Следующий результат не требует пояснений.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых точек a_j , $j = 1, \dots, n$, принадлежащих лемнискате

$$|z^n - 1| \leq 1,$$

справедливо неравенство

$$\text{cap } \gamma(0, \eta_1, \dots, \eta_n, a_1, \dots, a_n) \leq 2^{-1/n},$$

где η_j , $j = 1, \dots, n$, – корни n -й степени из единицы. Равенство достигается для точек $a_j = \sqrt[n]{2}\eta_j$, $j = 1, \dots, n$.

В частном случае, при $n = 2$, из следствия 3 вытекает, что для любых точек $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_z$ и любых точек a_1, a_2 , принадлежащих лемнискате

$$|(z - z_1)(z - z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|^2}{4},$$

справедливы неравенства

$$\frac{|z_1 - z_2|}{4} \leq \text{cap } \gamma\left(z_1, z_2, \frac{(z_1 + z_2)}{2}, a_1, a_2\right) \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\sqrt{2}}.$$

Знак равенства в правом неравенстве имеет место в случае $a_1 = z_2 + (z_1 - z_2)(1 + \sqrt{2})/2$ и $a_2 = z_1 + (z_2 - z_1)(1 + \sqrt{2})/2$. Левое неравенство классическое и приводится лишь для сравнения.

Автор выражает благодарность Л. В. Ковалеву за полезные замечания к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Borwein, T. Erdelyi, “Polynomials and polynomial inequalities”, *Grad. Texts in Math.*, **161**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [2] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, “Analytic Theory of Polynomials”, *London Math. Soc. Monographs, New Series*, **26**, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- [3] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.
- [4] G. Polya, “Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach Zusammenhängende Gebiete”, *S.B. Preuss. Akad. Wiss.*, K.L. Math. Phys. Tech., Berlin, 1928, 228–232.
- [5] С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного*, т. 1, Изд-во ИЛ, М., 1962.
- [6] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49:1** (1994), 3–76.
- [7] Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций”, *Алгебра и анализ*, **9:3** (1997), 41–103; № 5, 1–50.

В. Н. Дубинин

Институт прикладной математики ДВО РАН

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию

01.12.2005