Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Карагулян, Всюду расходящиеся Φ -средние рядов
Фурье, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 50–59

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 05:19:01

ВСЮДУ РАСХОДЯЩИЕСЯ Ф-СРЕДНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ

Г. А. Карагулян

Для функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ рассматривается последовательность $(C, 1)$ средних величин $\Phi(|S_k(x, f) - f(x)|)$, где $\Phi(t): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $\Phi(0) = 0$, есть некоторая непрерывная возрастающая функция. Доказывается, что если Φ растет быстрее экспоненты, то эти средние могут расходиться всюду. Раньше была установлена расходимость почти всюду таких величин.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Работа касается классических вопросов сходимости рядов Фурье. Истокам этих исследований являются пример А. Н. Колмогорова всюду расходящегося ряда Фурье ([1], [2; с. 488] или [3; с. 391]) и теорема Марцинкевича–Зигмунда о сильной H_p суммируемости почти всюду ряда Фурье и его сопряженного ([4], [5] и [6; с. 275]).

Пусть $\Phi(t): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $\Phi(0) = 0$, есть некоторая непрерывная возрастающая функция. Числовой ряд с частичными суммами $s_1, s_2, \dots$ назовем Φ -суммируемым к пределу s , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(|s_k - s|) = 0. \quad (1.1) \quad \{1.$$

Величины в (1.1) назовем Φ -средними этого ряда. Отметим, что при $\Phi(t) = t^p$, $p > 0$, это есть H_p суммируемость, и чем быстрее растет $\Phi(t)$, тем сильнее будет условие (1.1). В работе К. И. Осколкова [7] впервые рассматривалась задача о Φ -суммируемости почти всюду рядов Фурье для экспоненциально растущих $\Phi(t)$ и в ней было доказано, что ряды Фурье и его сопряженные Φ -суммируемы почти всюду при $\log \Phi(t) = O(t/\log \log t)$. В дальнейшем В. А. Родин [8] и Л. Д. Гоголадзе [9] установили аналогичное при условии

$$\log \Phi(t) = O(t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (1.2) \quad \{1.$$

которое эквивалентно ограничению $\Phi(t) < \exp(Ct)$ при некотором $C > 0$. При этом Родин получил результат общего характера. Он установил любопытное свойство рядов Фурье, а именно, BMO -ограниченность п.в. для частичных сумм рядов Фурье класса $L^1[0, 2\pi]$. Свойство Φ -суммируемости рядов Фурье при условии (1.2) получается как следствие из этого свойства, если применить теорему Джона–Ниренберга [10] (см. также [11; с. 231]). Далее оказалось, что нельзя ослабить ограничение (1.2) в теореме Родина и Гоголадзе. В работах [12] и [13] при отсутствии (1.2) построен пример ряда Фурье, который вместе со своим сопряженным имеет п.в. неограниченно расходящиеся Φ -средние. В настоящей статье, развивая метод этих работ, мы строим ряд Фурье, *всюду* расходящимися Φ -средними.

ТЕОРЕМА. Пусть непрерывная возрастающая функция $\Phi(t): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $\Phi(0) = 0$, удовлетворяет условию

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \Phi(t)}{t} = \infty. \quad (1.3) \quad \{1\}$$

Тогда существует функция $f \in L^1(\mathbf{T})$, для которой соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(|S_k(x, f)|) = \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(|\tilde{S}_k(x, f)|) = \infty$$

выполняются всюду на $\mathbb{R}$.

Отметим, что задача о равномерной сходимости Φ -средних, когда $f(x)$ – непрерывная функция, рассматривалась Тотиком ранее в работах [14] и [15]. Он установил, что условие (1.2) необходимо и достаточно для равномерной сходимости Φ -средних при любой функции $f \in C(\mathbf{T})$.

Ясно, что сформулированный результат является обобщением примера Колмогорова. Он характеризует плотность номеров частичных сумм ряда Фурье, в которых проявляется расходимость. Теорема аналогичного характера установлена в работе [16]. Важный пример расходящегося ряда Фурье построен С. В. Конягиным [17]. Он доказал существование функции $f \in L^1(\mathbf{T})$, частичные суммы ряда Фурье которой удовлетворяют условию

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x, f)}{\omega_n} = \infty$$

всюду на $\mathbb{R}$, где $\omega_n = o(\sqrt{\log n / \log \log n})$ – любая последовательность чисел. Задача об окончательности порядка $\sqrt{\log n}$ в расходимости ряда Фурье остается открытым. Отметим также, что С. В. Бочкарев [18] установил аналогичное для рядов Фурье–Уолша при $\omega_n = o(\sqrt{\log n})$. Отметим, что работах В. Тотика [19] и И. Кацнельсона [20] установлены общие теоремы, которые утверждают, что из расходимости почти всюду ряда Фурье по некоторым методам суммирования следует расходимость всюду. В этих работах не рассматриваются сопряженные ряды и результаты не применимы для общих Φ -средних обычных рядов Фурье.

Автор выражает глубокую благодарность С. В. Конягину за внимание к работе и ценные замечания.

2. Обозначения и леммы. Через $\#A$ обозначим количество элементов конечного множества A . Если число α удовлетворяет неравенству $2\pi k \leq \alpha < 2\pi(k+1)$, то обозначим $\{\alpha\}_{2\pi} = \alpha - 2\pi k$. Для данных чисел $\alpha > 0$, $N \in \mathbb{N}$, и интервала $J \subset [0, 2\pi]$ определим

$$D_N(\alpha, J) = \left\{ t \in \mathbb{N}: 1 \leq t \leq N, \left\{ \left(t + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\}_{2\pi} \in J \right\}.$$

ЛЕММА 1. Если длина интервала J больше $2\pi/3$, а числа δ и α такие, что

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \in U_\delta = [\delta, \pi - \delta] \cup [\pi + \delta, 2\pi - \delta], \quad (2.1) \quad \{2\}$$

то при любом натуральном $N > 2\pi/\alpha$

$$\#D_N(\alpha, J) > \frac{N}{12}. \quad (2.2) \quad \{2\}$$

Доказательство 1. Имеем

$$[\delta, \pi - \delta] \cup [\pi + \delta, 2\pi - \delta] = \left[\delta, \frac{2\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi - \delta \right] \cup \left[\pi + \delta, \frac{4\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi - \delta \right].$$

Будем рассматривать случай каждого из этих интервалов по отдельности. Так как длина интервала J больше $2\pi/3$, то при $\alpha \in [0, 2\pi/3]$ среди любых $[2\pi/\alpha]$ последовательных натуральных чисел t найдутся такие в количестве $[2\pi/(3\alpha)]$, для которых $\{(t + 1/2)\alpha\}_{2\pi} \in J$. Отсюда следует, что при $\alpha \in [\delta, 2\pi/3]$ и $N > 2\pi/\alpha$ имеем

$$\#D_N(\alpha, J) > \frac{N}{6}. \quad (2.3) \quad \{2.$$

Если $\alpha \in [4\pi/3, 2\pi - \delta]$, то имеем $2\pi - \alpha \in [\delta, 2\pi/3]$. С другой стороны, легко проверить, что $\#D_N(\alpha, J) = \#D_N(2\pi - \alpha, \bar{J})$ для некоторого интервала $\bar{J}$ с длиной $2\pi/3$. Отсюда получим неравенство, аналогичное (2.3) также для $\alpha \in [4\pi/3, 2\pi - \delta]$. В случае $\alpha \in [\pi + \delta, 4\pi/3]$ имеем $\{2\alpha\}_{2\pi} \in [2\pi + 2\delta, 2\pi/3]$. Из доказанного для первого случая следует $\#D_N(2\alpha, J) > N/6$ при $N > 1/\delta$, которое дает $\#D_N(\alpha, J) > N/12$. Аналогично случай $\alpha \in [2\pi/3, \pi - \delta]$ сводится ко второму случаю и лемма будет доказана.

Теперь обозначим

$$\bar{D}_N(\alpha, J) = \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{N}{20} \leq t \leq N, \left\{ \left(t + \frac{1}{2} \right) \alpha \right\}_{2\pi} \in J \right\}. \quad (2.4) \quad \{2.$$

Из доказанной леммы очевидно следует

$$\#\bar{D}_N(\alpha, J) > \#D_N(\alpha, J) - \frac{N}{20} > \frac{N}{30}, \quad \alpha \in U_\delta, \quad (2.5) \quad \{2.$$

при тех же самых J и N .

Через c будем обозначать положительные абсолютные постоянные, которые могут быть разными в разных формулах. Если $P(x)$ – тригонометрический полином, то *спектром его частот* назовем множество

$$\text{Sp}(P(x)) = \{k \in \mathbb{N} : \hat{P}(k) \neq 0\}.$$

Напомним *ядро Фейера*

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \cos kx = \frac{2}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \right)^2$$

и его сопряженное ядро

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n(x) &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \sin kx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}x - \frac{1}{n+1} \frac{\sin(n+1)x}{(2 \sin \frac{1}{2}x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}x - H_n(x). \end{aligned} \quad (2.6) \quad \{2.$$

Ядро Валле-Пуссена определяется как

$$V_n(x) = 2K_{2n-1}(x) - K_{n-1}(x).$$

Для двух натуральных чисел $m < M$ определим функции

$$Q_{m,M}(x) = V_M(x) - V_m(x) = 2K_{2M-1}(x) - K_{M-1}(x) - 2K_{2m-1}(x) + K_{m-1}(x). \quad (2.7) \quad \{2\}$$

Это есть полином со спектром $[m, 2M]$, причем его коэффициенты с индексами из $[2m, M]$ равны 1. То же самое имеем для сопряженной функции $\tilde{Q}_{m,M}(x)$. Из (2.6) следует, что

$$-\tilde{Q}_{m,M}(x) = 2H_{2M-1}(x) - H_{M-1}(x) - 2H_{2m-1}(x) + H_{m-1}(x).$$

Отметим неравенства

$$|Q_{m,M}(x)| \leq \frac{c}{mx^2}, \quad |\tilde{Q}_{m,M}(x)| \leq \frac{c}{mx^2}, \quad (2.8) \quad \{2\}$$

которые следуют из аналогичных оценок для $K_n(x)$ и $H_n(x)$ (см. [2; с. 151, 154]).

ЛЕММА 2. *Для любого натурального числа $R > R_0$ существует тригонометрический полином $f(x) = f_R(x)$ с*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq 15,$$

спектр которого лежит в $[m(R), M(R)]$, где $m(R) \geq R^3$ и $M(R)$ – постоянные, зависящие только от R , и для любой точки $x \in [0, 2\pi]$

$$\sup_{l \in [m(R), M(R)]} \frac{\#\{k \in \mathbb{N}: m(R) \leq k \leq l, |S_k(x, f)| > c_1 \log R\}}{l} > \frac{c_2}{R}, \quad (2.9) \quad \{2\}$$

$$\sup_{l \in [m(R), M(R)]} \frac{\#\{k \in \mathbb{N}: m(R) \leq k \leq l, |\tilde{S}_k(x, f)| > c_1 \log R\}}{l} > \frac{c_2}{R}, \quad (2.10) \quad \{2\}$$

где $c_1, c_2 > 0$ – абсолютные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Для фиксированного числа

$$\gamma = lR, \quad l \in \mathbb{N}, \quad l \geq R^2, \quad (2.11) \quad \{2\}$$

обозначим

$$m_i = 100^i \gamma, \quad i = 0, 1, \dots, 2R. \quad (2.12) \quad \{2\}$$

Пусть J – некоторый интервал, длина которого больше $2\pi/3$, и

$$B_j(x, J) = \left\{ p \in \mathbb{N}: 2m_j \leq p \leq 100m_j, \right. \\ \left. 2p + 1 = (2t + 1)(2R + 1), \left\{ \frac{(2p + 1)x}{2} \right\}_{2\pi} \in J \right\}. \quad (2.13) \quad \{2\}$$

Покажем, что

$$\#\overline{D}_{20m_j/R}((2R + 1)x, J) \leq \#B_j(x, J). \quad (2.14) \quad \{2\}$$

Для этого достаточно проверить, что если

$$t \in \overline{D}_{20m_j/R}((2R + 1)x, J), \quad (2.15) \quad \{2\}$$

то

$$p = \frac{(2t+1)(2R+1)-1}{2} \in B_j(x, J). \quad (2.16) \quad \{2.$$

Из (2.15) и из определения (2.4) имеем

$$\frac{m_j}{R} < t \leq \frac{20m_j}{R}, \quad \left\{ \left(t + \frac{1}{2} \right) (2R+1)x \right\}_{2\pi} \in J.$$

Отсюда следует

$$2m_j \leq p = \frac{(2t+1)(2R+1)-1}{2} \leq 100m_j, \quad \left\{ \frac{(2p+1)x}{2} \right\}_{2\pi} \in J,$$

т.е. $p \in B_j(x, J)$. Далее обозначим

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2\pi i}{2R+1}, \\ U_j &= \left[a_j + \frac{\pi}{4(2R+1)}, a_j + \frac{3\pi}{4(2R+1)} \right] \\ &\cup \left[a_j + \frac{5\pi}{4(2R+1)}, a_j + \frac{7\pi}{4(2R+1)} \right], \quad j = 0, 1, \dots, 2R, \end{aligned}$$

и

$$E_R = \left(\bigcup_{j=0}^{R-1} U_j \right) \subset [0, \pi]. \quad (2.17) \quad \{2.$$

Очевидно, что если $x \in U_i$, то

$$\{(2R+1)x\}_{2\pi} \in U = U_{\pi/4} = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]. \quad (2.18) \quad \{2.$$

Последнее есть множество (2.1) с $\delta = \pi/4$. Поэтому при $x \in E_R$, $|J| \geq 2\pi/3$ из (2.5) и (2.14) следует

$$\#B_j(\alpha, J) > \frac{2}{3} \cdot 100^j. \quad (2.19) \quad \{2.$$

В частности, это неравенство сохраняется при

$$J = \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]. \quad (2.20) \quad \{2.$$

С учетом определения (2.7) положим

$$Q_i(x) = Q_{m_{i-1}, m_i} \quad (2.21) \quad \{2.$$

и обозначим

$$g(x) = g_\gamma(x) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{2R} Q_i(x - a_i).$$

Отметим, что эта функция зависит от числа γ из (2.11). Для любого числа

$$x \in E_R \quad (2.22) \quad \{2.$$

ввиду (2.17) имеем

$$x \in U_j \quad \text{при некотором} \quad 0 \leq j < R. \quad (2.23) \quad \{2.$$

Возьмем теперь число

$$p \in B_j(x, J). \quad (2.24) \quad \{2.$$

Из (2.13) следует

$$2m_j \leq p \leq 100m_j, \quad 2p + 1 = (2t + 1)(2R + 1). \quad (2.25) \quad \{2.$$

Далее, для любого $i = 0, 1, \dots, 2R$ имеем

$$\left| \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)(x - a_i) \right| = \left| \sin\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)x - (2t + 1)\pi\right] \right| = \left| \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)x \right| > \frac{1}{2}. \quad (2.26) \quad \{2.$$

Последнее неравенство следует из определения $B_j(x, J)$ и неравенства $\sin \alpha > 1/2$ на интервале (2.20). Отсюда, учитывая спектры полиномов Q_i и соотношение (2.25), имеем

$$\begin{aligned} S_p(x, g) &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^j Q_i(x - a_i) + \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} S_p(x - a_i, Q_i) \\ &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^j Q_i(x - a_i) - \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} V_{m_j}(x - a_i) + \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} D_p(x - a_i) \\ &= b(x) + \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} D_p(x - a_i), \end{aligned} \quad (2.27) \quad \{2.$$

где

$$b(x) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^j Q_i(x - a_i) - \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} V_{m_j}(x - a_i).$$

По (2.8), (2.11), (2.12) и (2.21) имеем

$$|b(x)| \leq \frac{c}{R} \sum_{i=1}^{2R} \frac{1}{R^3(x - a_i)2} < C. \quad (2.28) \quad \{2.$$

Поэтому из (2.27) получим

$$\begin{aligned} |S_p(x, g)| &\geq \left| \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} \frac{\sin(p + 1/2)(x - a_i)}{2 \sin \frac{x - a_i}{2}} \right| - C \\ &= \left| \sin\left(p + \frac{1}{2}\right)x \right| \cdot \frac{1}{R} \left| \sum_{i=j+1}^{2R} \frac{1}{2 \sin \frac{x - a_i}{2}} \right| - C. \end{aligned}$$

Из (2.23) следует, что все величины $\sin \frac{x - a_i}{2}$ отрицательны при $i > j$. Отсюда, с учетом неравенства $j < R$ из (2.23), вытекает неравенство

$$|S_p(x, g)| > \frac{1}{4R} \sum_{i=j+1}^{2R} \frac{1}{|x - a_j|} > c \log R - C > c \log R, \quad R > R_0.$$

Причем оно выполняется для любых $x \in U_j$ и $p \in B_j(x, J)$. Так как множество $B_j(x, J)$ состоит из натуральных чисел p вида $p = ((2t + 1)(2R + 1) - 1)/2$, с учетом (2.19) и (2.17) получим

$$\sup_{l \in [\gamma, 2 \cdot 100^{2R} \gamma]} \frac{\#\{k \in \mathbb{N}: \gamma \leq k \leq l, |S_k(x, g)| > c_1 \log R\}}{l} > \frac{c_2}{R} \quad \text{при } x \in E_R. \quad (2.29) \quad \{2\}$$

Для оценки аналогичного для сопряженного ряда будем использовать те же самые обозначения, только вместо J из (2.20) возьмем

$$J' = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

Тогда легко проверить, что

$$\left| \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)x \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{при } p \in B_j(x, J'). \quad (2.30) \quad \{2\}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \cos \frac{x - a_i}{2} - \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)(x - a_i) &= \cos \frac{x - a_i}{2} + (-1)^i \cos\left(p + \frac{1}{2}\right)x \\ &\geq \cos \frac{x - a_i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{при } p \in B_j(x, J'). \end{aligned} \quad (2.31) \quad \{2\}$$

Далее предположим

$$x \in U_j \quad \text{и} \quad p \in B_j(x, J').$$

Тогда из (2.27) и (2.31) получим

$$\begin{aligned} |\tilde{S}_p(x, g)| &= \left| \tilde{b}(x) + \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} \tilde{D}_p(x - a_i) \right| \\ &= \left| \tilde{b}(x) + \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{2R} \frac{\cos \frac{1}{2}(x - a_i) - \cos(p + \frac{1}{2})(x - a_i)}{2 \sin \frac{x - a_i}{2}} \right| \\ &\geq \left| \frac{1}{R} \sum_{i=j+1}^{j+[R/10]} \frac{\cos \frac{1}{2}(x - a_i) - \sqrt{3}/2}{x - a_i} \right| - \left| \frac{4}{R} \sum_{i=j+[R/10]+1}^{2R} \frac{1}{x - a_i} \right| - |\tilde{b}(x)| \\ &\geq \left| \frac{1}{10R} \sum_{i=j+1}^{j+[R/10]} \frac{1}{a_i - x} \right| - c - |\tilde{b}(x)| \\ &\geq c \log R - c - |\tilde{b}(x)| \geq c \log R - |\tilde{b}(x)|, \quad R > R_0. \end{aligned}$$

Из (2.8) в силу (2.21) и (2.11) имеем

$$|\tilde{Q}_i(x)| \leq \frac{c}{R^3 x^2}.$$

Отсюда подобно (2.28) вытекает $|\tilde{b}(x)| \leq C$ и в результате получим

$$|\tilde{S}_p(x, g)| \geq c \log R, \quad x \in U_j, \quad p \in B_j(x, J), \quad R > R_0.$$

Отсюда, так как $E_R = \bigcup_{j=0}^{R-1} U_j$, следует

$$\sup_{l \in [\gamma, 2 \cdot 100^R \gamma]} \frac{\#\{k \in \mathbb{N}: \gamma \leq k \leq l, |\tilde{S}_k(x, g)| > c_1 \log R\}}{l} > \frac{c_2}{R} \quad \text{при } x \in E_R. \quad (2.32) \quad \{2.$$

Теперь определим две функции $g_\gamma(x)$, соответствующие числам $\gamma = \gamma_1 = R^3$ и $\gamma = \gamma_2 = 4 \cdot R^3 \cdot 100^{2R}$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = g_{\gamma_1}(x) + g_{\gamma_2} \left(x + \frac{\pi}{2(2R+1)} \right). \quad (2.33) \quad \{2.$$

Во первых отметим, что для функций $g = g_{\gamma_1}$ и $g = g_{\gamma_2}$ неравенства (2.29) и (2.32) выполняются, соответственно, на множествах E_R и $E_R - \pi/2(2R+1)$, причем

$$I = \left[-\frac{\pi}{4(2R+1)}, \pi - \frac{\pi}{4(2R+1)} \right] = E_R \cup \left(E_R - \frac{\pi}{2(2R+1)} \right). \quad (2.34) \quad \{2.$$

Далее имеем

$$\text{Sp}(g_{\gamma_1}(x)) \subset [R^3, 2 \cdot 100^{2R} R^3], \quad (2.35) \quad \{2.$$

$$\text{Sp}(g_{\gamma_2}(x)) \subset [4 \cdot 100^{2R} R^3, 8 \cdot 100^{4R} R^3]. \quad (2.36) \quad \{2.$$

Если точка $x \in I$, то она принадлежит одному из множеств, стоящих справа в (2.34). При $x \in E_R$ имеем, что для функции $g = g_{\gamma_1}$ выполняются (2.29) и (2.32). С другой стороны, с учетом (2.36) имеем

$$S_p(x, h) = S_p(x, g_{\gamma_1}) \quad \text{при } p \in [R^3, 2 \cdot 100^{2R} R^3].$$

Отсюда следует, что условие (2.29) в случае $\gamma = \gamma_1$ выполняется также для функции (2.33) при $x \in E_R$. Чтобы получить аналогичное при $x \in E_R - \pi/2(2R+1)$, заметим, что

$$\begin{aligned} S_p(x, h) &= g_{\gamma_1}(x) + S_p(x, g_{\gamma_2}) \quad \text{при } p \in [4 \cdot 100^{2R} R^3, 8 \cdot 100^{4R} R^3], \\ S_p(x, h) &= g_{\gamma_1}(x) \quad \text{при } p \in (2 \cdot 100^{2R} R^3, 4 \cdot 100^{2R} R^3). \end{aligned}$$

Если $|g_{\gamma_1}(x)| > (c \ln R)/2$, то

$$|S_p(x, h)| > \frac{c \ln R}{2} \quad \text{при } p \in (2 \cdot 100^{2R} R^3, 4 \cdot 100^{2R} R^3),$$

из которого немедленно следует (2.29); $\sup$ взят по номерам $l \in (2 \cdot 100^{2R} R^3, 4 \cdot 100^{2R} R^3)$. Теперь предположим наоборот $|g_{\gamma_1}(x)| \leq (c \ln R)/2$. Тогда если неравенство

$$|S_p(x, g_{\gamma_2})| > c \ln R$$

выполняется при некотором $p \in [4 \cdot 100^{2R} R^3, 8 \cdot 100^{2R} R^3]$, то при таком же p будем иметь

$$|S_p(x, h)| > |S_p(x, g_{\gamma_2})| - |S_p(x, g_{\gamma_1})| > c \ln R - \frac{c \ln R}{2} = \frac{c \ln R}{2}.$$

Из этого тоже следует (2.29) (при $\gamma = \gamma_2$, $c_1 = c/2$). Аналогичные рассуждения проходят также для сопряженных частичных сумм и в конце концов мы получим

$$\sup_{l \in [R^3, 8 \cdot 100^{4R} R^3]} \frac{\#\{k \in \mathbb{N}: \gamma \leq k \leq l, |S_k(x, g)| > c_1 \log R, \}}{l} > \frac{c_2}{R}$$

$$\text{при } x \in I = \left[-\frac{\pi}{4(2R+1)}, \pi - \frac{\pi}{4(2R+1)} \right]$$

и то же самое для сопряженных сумм $\tilde{S}_k(x, g)$. Чтобы перейти от интервала I на весь $[0, 2\pi]$, нам надо рассматривать функцию $\bar{h}(x)$, аналогичную $h(x)$, которая соответствует числам $\gamma_1 = 16 \cdot R^3 \cdot 100^{2R}$ и $\gamma_2 = 64 \cdot R^3 \cdot 100^{4R}$. Далее аналогичными рассуждениями можно установить, что функция

$$f(x) = h(x) + \bar{h}(x + \pi)$$

удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10) для любого $x \in [0, 2\pi]$.

3. Доказательство теоремы. Выберем последовательности $\{R_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ и $\{\beta_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ так, что

$$0 < \beta_\nu < \frac{1}{2^\nu}, \quad (3.1) \quad \{3\}$$

$$m(R_{\nu+1}) > M(R_\nu), \quad (3.2) \quad \{3\}$$

$$\Phi\left(\frac{c_1 \beta_\nu \log R_\nu}{2}\right) > \exp(2 \log R_\nu) = R_\nu^2, \quad (3.3) \quad \{3\}$$

$$c_1 \beta_{\nu+1} \log R_{\nu+1} > 30\nu M(R_\nu), \quad (3.4) \quad \{3\}$$

где c_1 – постоянная из леммы 2. Очевидно, этого можно добиться, производя выбор по очереди: $\beta_1 = 1, R_1, \beta_2, R_2, \dots$. Причем неравенство (3.3) получается из (1.3). Применив лемму 1, для каждого ν найдем функцию $g_\nu(x) = f_{R_\nu}(x)$ такую, что выполняются (2.9) и (2.10) всюду. В силу условия (3.1) функция

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu g_\nu(x)$$

суммируема. Из леммы 2 имеем, что спектры полиномов g_ν , $\nu = 1, 2, \dots, p-1$, лежат в $[0, M(R_{p-1})]$ и $M(R_{p-1}) < m(R_p)$ в силу (3.2). Поэтому при $m(R_p) < k \leq M(R_p)$ имеем

$$\begin{aligned} |S_k(x, f)| &= \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu S_k(x, g_\nu) \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{p-1} \beta_\nu g_\nu(x) + \beta_p S_k(x, g_p) \right| \\ &\geq \beta_p |S_k(x, g_p)| - 15pM(R_{p-1}). \end{aligned} \quad (3.5) \quad \{3\}$$

Из (2.9) следует, что для любой точки $x \in \mathbb{R}$ существует натуральное число $l_p(x) \in [m(R_p), M(R_p)]$ такое, что

$$\#\{k \in \mathbb{N}: m(R_p) < k \leq l_p(x), |S_k(x, g_p)| > c_1 \log R_p\} > c_2 \frac{l_p(x)}{R_p}.$$

Отсюда же в силу (3.5) и (3.4) следует

$$\#\left\{k \in \mathbb{N}: m(R_p) < k \leq l_p(x), |S_k(x, f)| > \frac{c_1}{2} \beta_p \log R_p\right\} > c_2 \frac{l_p(x)}{R_p}.$$

И наконец, используя (3.3), получаем

$$\frac{1}{l_p(x)} \sum_{k=1}^{l_p(x)} \Phi(|S_k(x, f)|) > \frac{1}{l_p(x)} \cdot c_2 \frac{l_p(x)}{R_p} \cdot \Phi\left(\frac{c_1 \beta_p \log R_p}{2}\right) \geq c_2 R_p, \quad p = 1, 2, \dots$$

Аналогичное неравенство доказывается также для $\tilde{S}_k(x, f)$ и теорема будет установлена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. N. Kolmogoroff, "Une serie de Fourier-Lebesgue divergent presque partout", *Fund. Math.*, **4** (1923), 324–328.
- [2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965.
- [3] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [4] J. Marcinkiewicz, "Sur la sommabilitee forte des series de Fourier", *J. London Math. Soc.*, **14** (1939), 162–168.
- [5] A. Zygmund, "On the convergence and summability of power series on the circle of convergence", *Proc. London Math. Soc.*, **47** (1941), 326–350.
- [6] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965.
- [7] К. И. Осколков, "О сильной суммируемости рядов Фурье", *Тр. МИАН*, **172** (1985), 280–290.
- [8] V. A. Rodin, "The space BMO and strong means of Fourier series", *Ann. Math.*, **16** (1990), 291–302.
- [9] Л. Д. Гоголадзе, "О сильной суммируемости почти всюду", *Матем. сб.*, **135** (1988), 158–169.
- [10] F. John, L. Nirenberg, "On functions of bounded mean oscilation", *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 415–426.
- [11] Дж. Гарнет, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [12] Г. А. Карагулян, "О расходимости сильных Ф-средних рядов Фурье", *Изв. АН Армении. Сер. "Математика"*, **26:2** (1991), 159–162.
- [13] Г. А. Карагулян, *О сходимости и суммируемости тригонометрических и общих ортогональных рядов Фурье*, Дисс. ... д.ф.м.н., М., 2002.
- [14] V. Totik, "Notes on Fourier series strong approximations", *J. of App. Theory*, **43** (1985), 105–111.
- [15] V. Totik, "On the strong approximation of Fourier series", *Acta Math. Acad. Sci Hung.*, **1–2** (1980), 157–172.
- [16] G. A. Karagulian, "On the convergence to infinity of Fourier series along dense subsequence of numbers", *Analysis Math.*, **18:4** (1992), 249–259.
- [17] С. В. Конягин, "О всюду расходящегося тригонометрического ряда Фурье", *Матем. сб.*, **191:1** (2000), 97–120.
- [18] С. В. Бочкарев, "О проблеме гладкости функций, ряды Фурье–Уолша которых расходятся почти всюду", *Докл. РАН*, **371:4** (2000), 370–373.
- [19] V. Totik, "On the divergence of Fourier series", *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **29:3–4** (1982), 251–264.
- [20] Y. Katznelson, "Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques", *Studia Math.*, **26** (1966), 301–304.

Г. А. Карагулян
Институт математики НАН Армении
E-mail: karagul@instmath.sci.am

Поступила в редакцию
28.04.2005
Исправленный вариант
07.10.2005