Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Старовойтов, Замечание к одной проблеме рациональной аппроксимации, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 446–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:25:19

УДК 517.51

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

А. П. Старовойтов

В работе показано, что для любой невозрастающей и сходящейся к нулю числовой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует непрерывная 2π -периодическая функция g , для которой последовательность ее наилучших равномерных тригонометрических рациональных приближений $\{R_n(g, C_{2\pi})\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок убывания к нулю.

Библиография: 4 названия.

Пусть $C_{2\pi}$ – банахово пространство 2π -периодических непрерывных на всей числовой прямой функций с равномерной нормой. Через $\mathcal{P}_n^T$ и $\mathcal{R}_n^T$ обозначим, соответственно, множество всех тригонометрических полиномов и тригонометрических рациональных функций степени не выше n с действительными коэффициентами. Для $f \in C_{2\pi}$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим $E_n(f, C_{2\pi})$, $R_n(f, C_{2\pi})$ – наилучшие приближения f в $C_{2\pi}$ множествами $\mathcal{P}_n^T$, $\mathcal{R}_n^T$.

Ниже соотношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает, что бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ имеют одинаковый порядок при $n \rightarrow \infty$, т.е. существуют такие положительные постоянные A и B , для которых $A\alpha_n \leq \beta_n \leq B\alpha_n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$. Если $\alpha_n/\beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то будем писать $\alpha_n \sim \beta_n$, а запись $a_n \downarrow 0$ означает, что рассматривается числовая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая не возрастает и сходится к нулю. Например, хорошо известно, что для любой функции $f \in C_{2\pi}$ последовательности ее наилучших приближений ведут себя именно таким образом, т.е. $E_n(f, C_{2\pi}) \downarrow 0$, $R_n(f, C_{2\pi}) \downarrow 0$.

Известна (см. [1]) следующая задача (ослабленный вариант обратной задачи Бернштейна [2] для рациональных приближений).

ПРОБЛЕМА ДОЛЖЕНКО. *Какой должна быть числовая последовательность $a_n \downarrow 0$, чтобы существовала такая функция $f \in C_{2\pi}$, для которой*

$$R_n(f, C_{2\pi}) \asymp a_n?$$

При этом (используя терминологию Бернштейна) будем говорить об *эффективном решении* проблемы в том случае, когда по заданной последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ искомая функция построена конструктивно.

В работе [3] доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любой строго убывающей к нулю последовательности $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ неотрицательных чисел существует такая нечетная функция $f \in C_{2\pi}$, что

$$R_n(f, C_{2\pi}) = a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, если числовая последовательность $a_n \downarrow 0$ строго убывает, то она является последовательностью наилучших рациональных приближений некоторой функции $f \in C_{2\pi}$. Поэтому для такой функции $R_n(f, C_{2\pi}) \asymp a_n$.

На самом деле из теоремы 1 можно вывести следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для произвольной числовой последовательности $a_n \downarrow 0$ существует такая нечетная функция $g \in C_{2\pi}$, для которой

$$R_n(g, C_{2\pi}) \sim a_n.$$

Действительно, если последовательность $a_n \downarrow 0$, начиная с некоторого номера, состоит из нулей, то в качестве искомой функции g можно взять подходящую рациональную дробь. Поэтому предполагаем, что члены последовательности $a_n \downarrow 0$ не равны нулю. В этом случае последовательность

$$\{b_n\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{n+2}{n+1} a_n \right\}_{n=0}^\infty$$

строго убывает. Значит, существует такая нечетная функция $g \in C_{2\pi}$, для которой при $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено $R_n(g, C_{2\pi}) = (n+2)a_n/(n+1)$. Следовательно, $R_n(g, C_{2\pi}) \sim a_n$.

Далее рассмотрим следующие последовательности положительных чисел:

$$\begin{aligned} \Delta b_n &= b_{n-1} - b_n, \\ \varepsilon_n &= \min\{\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \beta_j &= \frac{\varepsilon_1}{5} \frac{\varepsilon_2}{5} \dots \frac{\varepsilon_j}{5}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Считая, что $c_k = (1 - \beta_k^2)/(1 + \beta_k^2)$, $k = 1, 2, \dots, n$, определим синус-дроби Чебышева-Маркова:

$$\nu_n(x) = \sin \varphi_{2n}(x) = \sin \Phi_{2n}(y) = \sqrt{1-x^2} \frac{P_{n-1}(x)}{\prod_{j=1}^n (1 - c_j x)},$$

где $P_{n-1}(x)$ – алгебраический полином степени $n-1$ с действительными коэффициентами. Если

$$t = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in K = \{t: 0 \leq t_k \leq \varepsilon_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots\},$$

то полагая $\Delta t_k = t_{k-1} - t_k$, рассмотрим функцию

$$f_t(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta b_k + \Delta t_k) \sin \theta \frac{P_{k-1}(\cos \theta)}{\prod_{j=1}^k (1 - c_j \cos \theta)}. \quad (1)$$

В работе [3] доказано, что при любом $t \in K$ функция $f_t \in C_{2\pi}$ и подчинена условиям

$$b_n + t_n - \varepsilon_{n+1} \leq R_n(f_t) \leq b_n + t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому полагая $g = f_{t^*}$, где $t^* = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots) \in K$, и учитывая свойства последовательностей $\{\Delta b_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, получим, что при $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{n+2}{n+1}a_n \leq R_n(g, C_{2\pi}) \leq 2\frac{n+2}{n+1}a_n.$$

Следовательно, $R_n(g, C_{2\pi}) \asymp a_n$.

Таким образом, мы показали, что справедлива следующая теорема, дающая окончательное (эффективное!) решение проблемы Долженко.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольной числовой последовательности $a_n \downarrow 0$ существует такая нечетная функция $g \in C_{2\pi}$, для которой*

$$R_n(g, C_{2\pi}) \sim a_n.$$

Кроме того, для произвольной числовой последовательности $a_n \downarrow 0$, все члены которой отличны от нуля, нечетная функция (1) при $t = t^$ удовлетворяет условию*

$$R_n(f_{t^*}, C_{2\pi}) \asymp a_n.$$

Как известно, в полиномиальном случае проблема эффективного построения функции с заданными наилучшими полиномиальными приближениями поставлена еще Бернштейном (см. [4, с. 294]) и до сих пор не решена. Более того, в полиномиальном случае для заданной последовательности $a_n \downarrow 0$ в настоящее время отсутствуют эффективные примеры непрерывных функций, для которых

$$E_n(g, C_{2\pi}) \asymp a_n.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долженко Е. П. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 3. С. 313–320.
- [2] Бернштейн С. Н. Sur le problème inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues // C. R. Acad. Sci. 1938. V. 206. P. 1520–1523.
- [3] Старовойтов А. П. К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 919–924.
- [4] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений в 4-х томах. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954.

Белорусский государственный университет
E-mail: svoitov@gsu.unibel.by

Поступило
08.01.2003