УДК 517.927

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОПОРЯДКОВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

К. П. Лазарев, Т. В. Белоглазова

В работе исследуется разрешимость краевой задачи для струнно-стержневой модели. Модель описывается уравнением, которое имеет второй или четвертый порядок на различных ребрах произвольного графа. Получены критерии вырожденности и невырожденности задачи; в частности, доказано, что невырожденность задачи эквивалентна принципу максимума.

Библиография: 22 названия.

В различных разделах естествознания и техники возникают модели, описываемые дифференциальными уравнениями на геометрических графах (сетях). Исследованию таких задач посвящены сотни работ, часть из которых приведены в [1], [2]. Основные продвижения сделаны в изучении обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на графах (см., например, [1], [3]–[8]). Для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка на графах в [9]–[14] исследовались асимптотика спектра и проблемы управляемости, в [1], [15]–[18] были рассмотрены краевые задачи для моделей стержневых систем с различными условиями шарнирного или упруго-шарнирного сочленения, получены условия разрешимости и свойства функции Грина (симметричность, непрерывность, гладкость, положительность). Разнопорядковые задачи на графах пока исследованы мало. В этом направлении известны результаты Ю. В. Покорного и К. П. Лазарева [19], [20] для модели растянутой цепочки из струн и стержней, Ю. В. Покорного и Е. Н. Провоторовой [8], [21] для модели пучка из одинаковых струн и одинаковых стержней. В работе [22] рассмотрена разнопорядковая задача для модели “стержневой треугольник, растянутый за вершины струнами” и анонсированы ее разрешимость, существование непрерывной и неотрицательной функции Грина. В настоящей работе исследуется задача для струнно-стержневой модели, описанной уравнением, которое имеет второй или четвертый порядок на различных ребрах произвольного графа. Приведены критерии вырожденности и невырожденности задачи и показано, что невырожденность задачи эквивалентна выполнению принципа максимума.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ по поддержке ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1, Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00049, Минобразования РФ (КЦ СПбГУ, проект № Е02-1.0-46) и программы “Университеты России”, проект УР.04.01.004.

1. Основные понятия и постановка задачи. Введем необходимые понятия из теории краевых задач на графах, следуя в основном [1], [5], [16].

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано множество попарно непересекающихся одномерных интервалов γ_i , $i = \overline{1, r}$, называемых *ребрами*, и множество их концов, называемых *вершинами*. Взаимное расположение ребер и вершин определяется отношением *примыкания*, которое, с одной стороны, указывает, какие вершины соединяются данным ребром, а с другой – какие ребра примыкают к данной вершине. Предполагается, что к каждой вершине примыкает, по крайней мере, одно ребро и каждое ребро соединяет две некоторые вершины. Если ребро γ соединяет вершины a и b , то мы будем писать $\gamma = (a, b)$.

Геометрическим графом Γ будем называть объединение всех ребер γ_i и некоторых вершин, которые мы будем называть *внутренними*. Вершины, не вошедшие в Γ , называются *граничными*. Множество ребер $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ графа Γ будем обозначать через $E(\Gamma)$, множество вершин – через $V(\Gamma)$, множество внутренних вершин – через $J(\Gamma)$, а множество граничных вершин – через $\partial\Gamma$. Для каждой вершины $a \in V(\Gamma)$ обозначим через $\Gamma(a)$ множество всех ребер, примыкающих к a .

Введем на графе индуцированную из $\mathbb{R}^3$ топологию. Граф называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств. Обозначим $\Gamma^0 = \bigcup_{i=1}^r \gamma_i$ (объединение точек всех ребер), $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ (*замыкание* графа). *Подграф* графа Γ – это граф Λ такой, что Λ является открытым подмножеством Γ и $J(\Lambda) \subset J(\Gamma)$ ¹.

Выделим подграфы Γ_1 и Γ_2 , образованные ребрами из $E(\Gamma)$ так, что $J(\Gamma_1) \cap J(\Gamma_2) = \emptyset$ и $E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2) = E(\Gamma)$.

Введем необходимые классы функций.

Функция на графе – это вещественнозначная функция, заданная на Γ^0 . Сужение функции на графе $u(\cdot)$ на произвольное множество A обозначим через $u_A(\cdot)$.

Если сужение функции на графе на каждое ребро $\gamma \in E(\Gamma)$ имеет производную по параметру t при его натуральной параметризации $x = \varphi_\gamma(t)$, то будем говорить, что функция имеет производную на графе, обозначаемую через $u'(x)$. Таким образом, в точке $x \in \gamma$ имеем $u'(x) = \frac{d}{dt} u(\varphi_\gamma(t))$. Аналогично определяются производные $u^{(k)}(\cdot)$, $k \geq 2$. При изменении направления параметризации на ребре знак производной на этом ребре меняется на противоположный. Ясно, что производные (или квазипроизводные) нечетного порядка зависят от выбора направления параметризации ребер, а четного порядка – нет. Ниже будет рассмотрено разнорядковое дифференциальное уравнение на графе, имеющее второй или четвертый порядок на ребрах и, следовательно, инвариантное относительно направления параметризации ребер.

Пусть $C(\gamma)$ для $\gamma \in E(\Gamma)$ – это множество функций $u: \gamma \rightarrow \mathbb{R}$, равномерно непрерывных на γ . Аналогично, $C^k(\gamma)$ – это множество функций, равномерно непрерывных вместе с производными до порядка k .

Введем пространства

$$C(\Gamma^0) = \{u(\cdot) \mid u: \Gamma^0 \longrightarrow \mathbb{R}, u_\gamma \in C(\gamma), \gamma \in E(\Gamma)\},$$

¹Заметим, что некоторые вершины из $\partial\Lambda$ могут быть внутренними точками ребер графа Γ , и тогда ребро графа Λ , примыкающее к такой вершине, является частью ребра графа Γ .

$$C^k(\Gamma_i^0) = \{u(\cdot) \mid u: \Gamma_i^0 \longrightarrow \mathbb{R}, u_\gamma \in C^k(\gamma), \gamma \in E(\Gamma_i)\}, \quad i = \overline{1, 2},$$

$$\mathcal{T} = \{u(\cdot) \mid u \in C(\Gamma^0), u_{\Gamma_1^0} \in C^4(\Gamma_1^0), u_{\Gamma_2^0} \in C^2(\Gamma_2^0)\}.$$

Заметим, что функция $u(\cdot)$ из пространства $\mathcal{T}$ имеет пределы в произвольной вершине графа вдоль каждого примыкающего к ней ребра. Эти пределы, вообще говоря, различны. Предел в вершине a вдоль примыкающего к ней ребра $\gamma = (a, b)$ будем обозначать через $u_\gamma(a)$. При изучении краевой задачи мы будем продолжать функцию $u_\gamma(\cdot)$ значениями $u_\gamma(a)$ и $u_\gamma(b)$ и тогда на замыкании ребра $\bar{\gamma}$ продолженная функция (за ней сохраним то же самое обозначение) будет иметь производные в вершинах и принадлежать пространству $C^k(\bar{\gamma})$, где $k = 4$ при $\gamma \in E(\Gamma_1)$ и $k = 2$ при $\gamma \in E(\Gamma_2)$. Ниже при формулировании условий, содержащих производные в вершине a , нам удобнее пользоваться производными по направлению “от вершины”, которые будем обозначать через $u_\gamma^{(k)}(a)$.

Пусть заданы функции $p \in C^2(\Gamma_1^0)$ и $q \in C^1(\Gamma_2^0)$, причем $\inf_{x \in \Gamma_1^0} \{p(x)\} > 0$ и $\inf_{x \in \Gamma_2^0} \{q(x)\} > 0$.

При $f \in C(\Gamma^0)$ рассмотрим краевую задачу на графе Γ

$$(p_\gamma u_\gamma'')' = f_\gamma(x), \quad x \in \gamma, \quad \gamma \in E(\Gamma_1), \quad (1) \quad \{1\}$$

$$-(q_\gamma u_\gamma')' = f_\gamma(x), \quad x \in \gamma, \quad \gamma \in E(\Gamma_2), \quad (2) \quad \{2\}$$

$$u_\gamma(a) = u_\mu(a), \quad \gamma, \mu \in \Gamma(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad (3) \quad \{3\}$$

$$(p_\gamma u_\gamma'')(a) = 0, \quad \gamma \in \Gamma_1(a), \quad a \in V(\Gamma), \quad (4) \quad \{4\}$$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_1(a)} (p_\gamma u_\gamma'')(a) = \sum_{\gamma \in \Gamma_2(a)} (q_\gamma u_\gamma')(a), \quad a \in J(\Gamma), \quad (5) \quad \{5\}$$

$$u_\gamma(a) = 0, \quad \gamma \in \Gamma(a), \quad a \in \partial\Gamma. \quad (6) \quad \{6\}$$

Здесь при $\Gamma_1(a) = \emptyset$ отсутствуют условия (4) в вершине a и первая сумма в условии (5) равна нулю. Аналогично, при $\Gamma_2(a) = \emptyset$ вторая сумма в условии (5) равна нулю. При $\partial\Gamma = \emptyset$ отсутствуют условия (6).

Решением задачи (1)–(6) называем функцию $u \in \mathcal{T}$, сужения которой на ребра $\gamma \in E(\Gamma_1)$ (соответственно $\gamma \in E(\Gamma_2)$) всюду удовлетворяют уравнениям (1) (соответственно (2)), и для которой выполнены условия (3)–(6).

Задачу (1)–(6) будем называть *невыврожденной*, если соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение в $\mathcal{T}$.

Очевидно, что задача (1)–(6) однозначно разрешима при любой правой части $f \in C(\Gamma^0)$ тогда и только тогда, когда она невырождена.

Введем разнопорядковый дифференциальный оператор $L: \mathcal{T} \longrightarrow C(\Gamma^0)$, который действует на функции $u \in \mathcal{T}$ по правилу $(Lu)(x) = (pu'')''(x)$ при $x \in \Gamma_1^0$, $(Lu)(x) = -(qu')'(x)$ при $x \in \Gamma_2^0$. Оператор $\mathfrak{L}$ определим на функциях $u \in \mathcal{T}$, удовлетворяющих условиям (3)–(5), формулой $\mathfrak{L}u = Lu$.

Будем говорить, что для уравнения $\mathfrak{L}u = 0$ выполнен *принцип максимума*, если для любого решения $u(\cdot)$ этого уравнения $\sup_\Gamma u(\cdot)$ и $\inf_\Gamma u(\cdot)$ достигаются на $\partial\Gamma$, т.е. существуют $a \in \partial\Gamma$, $\gamma \in \Gamma(a)$, $b \in \partial\Gamma$, $\mu \in \Gamma(b)$ такие, что $\sup_\Gamma u(\cdot) = u_\gamma(a)$ и $\inf_\Gamma u(\cdot) = u_\mu(b)$. Здесь максимум и минимум могут быть нестрогими и достигаться на целых ребрах, примыкающих к граничным вершинам.

В п. 2 исследуются условия вырожденности и невырожденности задачи (1)–(6), в частности, показано, что принцип максимума эквивалентен невырожденности задачи.

2. Невырожденность краевой задачи. Пусть $m_i = |E(\Gamma_i)|^2$, $i = \overline{1, 2}$ и $m = 4 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2$. Легко видеть, что решение однородного уравнения $Lu = 0$ определяется m параметрами.

Подсчитаем число независимых условий (3)–(6). Условия (4) дают удвоенное количество ребер из $E(\Gamma_1)$, примыкающих ко всем вершинам, так как каждое ребро примыкает к двум вершинам. Число условий (6) равно числу ребер из $E(\Gamma)$, примыкающих к граничным вершинам. Число независимых условий (3) в вершине a на единицу меньше числа ребер, примыкающих к a , поэтому число независимых условий (3) и (5) равно числу ребер из $E(\Gamma)$, примыкающих к внутренним вершинам. Таким образом, общее число независимых условий (3)–(6) также равно m и формально задача (1)–(6) является определенной.

Для графа Γ , содержащего одно ребро $\gamma = (a, b)$, задача невырождена, если, по крайней мере, одна из вершин является граничной; в противном случае задача вырождена, так как нетривиальным решением однородной задачи является постоянная.

Действительно, при $m_1 = 0$, $m_2 = 1$ имеем уравнение $-(qu')' = 0$ на γ . Для $a, b \in \partial\Gamma$ выполнены условия $u(a) = u(b) = 0$, а для $a \in \partial\Gamma$, $b \in J(\Gamma)$ – условия $u(a) = -(qu')(b) = 0$ и, значит, задача невырождена. Если же обе вершины внутренние, то выполнены условия $-(qu')(a) = -(qu')(b) = 0$ и, следовательно, задача вырождена.

Аналогично, при $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ имеем уравнение $(pu'')'' = 0$ на γ . Для $a, b \in \partial\Gamma$ выполнены условия $u(a) = (pu'')(a) = 0$, $u(b) = (pu'')(b) = 0$, а для $a \in \partial\Gamma$, $b \in J(\Gamma)$ – условия $u(a) = (pu'')(a) = 0$, $(pu'')(b) = (pu'')'(b) = 0$ и, значит, задача невырождена. Если же обе вершины внутренние, то выполнены условия $(pu'')(a) = (pu'')'(a) = 0$, $(pu'')(b) = (pu'')'(b) = 0$ и, следовательно, задача вырождена.

Для произвольного графа ниже в теореме 1 приведены условия вырожденности, в теореме 2 приведены условия невырожденности, а в теореме 3 показано, что выполнение условия теоремы 1 равносильно невыполнению условия теоремы 2 и, таким образом, получены необходимые и достаточные условия вырожденности и невырожденности задачи.

ТЕОРЕМА 1. *Задача (1)–(6) вырождена, если существует связный подграф Λ графа Γ такой, что*

- а) Λ содержит только целые ребра графа Γ ;*
- б) либо $\partial\Lambda = \emptyset$, либо $\partial\Lambda \neq \emptyset$, $J(\Lambda) \neq \emptyset$ и ко всем вершинам из $\partial\Lambda$ в Λ примыкают только ребра $\gamma \in E(\Gamma_1)$ (на этих ребрах порядок оператора L равен четырем).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\partial\Lambda = \emptyset$. В этом случае имеем $V(\Lambda) = J(\Lambda) \subset J(\Gamma)$ и, следовательно, в вершинах графа Λ отсутствуют условия (6). Тогда функция $u(x) = 1$ на Λ и $u(x) = 0$ на $\Gamma \setminus \Lambda$ является нетривиальным решением однородной задачи.

Рассмотрим случай $\partial\Lambda \neq \emptyset$. Покажем сначала, что если $\gamma = (a, b)$ – произвольное ребро графа Λ , примыкающее к вершине $a \in \partial\Lambda$, то $b \in J(\Lambda)$. Для графа Λ ,

²Через $|A|$ обозначено число элементов конечного множества A .

состоящего из одного ребра, $b \in J(\Lambda)$ в силу условия б). Пусть теперь $|E(\Lambda)| > 1$. Если $b \notin J(\Lambda)$, то $b \in \partial\Lambda$. Следовательно, вершины a и b не принадлежат Λ . Тогда $\Lambda = \gamma \cup (\Lambda \setminus \gamma)$, причем $\gamma \cap (\Lambda \setminus \gamma) = \emptyset$ и $\gamma, \Lambda \setminus \gamma$ – непустые открыто-замкнутые подмножества Λ . А это противоречит связности Λ . Итак, $b \in J(\Lambda)$.

Теперь построим нетривиальное решение однородной задачи. Естественно искать решение в виде линейной функции на ребрах из Γ_1 и постоянной на ребрах из Γ_2 . Положим $u(x) \equiv 0$ вне Λ и в граничных вершинах $\partial\Gamma$. Для каждого ребра $\gamma = (a, b)$ подграфа Λ , примыкающего к произвольной вершине $a \in \partial\Lambda$, положим $u_\gamma(x)$ линейной и такой, что $u_\gamma(a) = 0$ и $u_\gamma(b) = 1$. При этом по условию теоремы $\gamma \in E(\Gamma_1)$ и по доказанному $b \in J(\Lambda)$. На всех остальных ребрах из Λ возьмем $u(x) \equiv 1$. Очевидно, $u \in \mathcal{T}$.

Покажем, что построенная функция $u(x)$ удовлетворяет однородной задаче. На тех ребрах, где $u(x) \equiv 0$ или $u(x) \equiv 1$, имеем $u'(x) \equiv 0$ и $Lu(x) \equiv 0$. Остальные ребра примыкают к граничным вершинам из $\partial\Lambda$ и принадлежат $E(\Gamma_1) \cap E(\Lambda)$. На этих ребрах $u(x)$ линейна; тогда $(pu'')(x) \equiv 0$ и $Lu(x) \equiv 0$. Итак, уравнение $Lu = 0$ выполнено.

Проверим выполнение условий (3)–(6). Во-первых, условия (3) выполняются, так как в каждой вершине $a \in J(\Lambda)$ имеем $u_\gamma(a) = 1$ для всех ребер $\gamma \in \Gamma(a)$, а в каждой вершине $a \notin J(\Lambda)$ имеем $u_\gamma(a) = 0$ для всех ребер $\gamma \in \Gamma(a)$. Во-вторых, условия (4) выполнены, так как $u(\cdot)$ линейна на всех ребрах графа Γ_1 . В-третьих, условия (5) выполнены. Действительно, на любом ребре осуществляется одна из трех ситуаций: $u(x) \equiv 0$, $u(x) \equiv 1$, $u(x)$ линейна и принимает значения между нулем и единицей, причем в последнем случае ребро принадлежит $E(\Gamma_1)$. Поэтому все слагаемые в (5) нулевые. В-четвертых, условия (6) выполнены по построению.

Итак, задача (1)–(6) вырождена и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Задача (1)–(6) невырождена, если $J(\Gamma) = \emptyset$ или $J(\Gamma) \neq \emptyset$, $\partial\Gamma \neq \emptyset$ и любую вершину из $J(\Gamma)$ можно соединить с некоторой вершиной из $\partial\Gamma$ ломаной, звенья которой совпадают с ребрами графа Γ_2 (на этих ребрах порядок оператора L равен двум).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение однородной задачи. Используя условия $u \in \mathcal{T}$, (3) и (6) продолжим $u(x)$ до непрерывной функции на $\bar{\Gamma}$.

Обозначим через M значение $\max_{x \in \bar{\Gamma}} u(x)$. Покажем, что значение M достигается в некоторой точке из $\partial\Gamma$ и $M = 0$.

Предположим, что $u(x_0) = M$. При $x_0 \in \partial\Gamma$ значение M достигается на $\partial\Gamma$. Если x_0 является внутренней точкой ребра $\gamma \in E(\Gamma_2)$, то $u'(x_0) = 0$ и в силу уравнения $(qu')' = 0$ имеем $(qu')(x) \equiv 0$ на γ . Отсюда следует, что $u'(x) \equiv 0$ и $u(x) \equiv M$ на ребре γ и в вершинах, примыкающих к нему. Если x_0 является внутренней точкой ребра $\gamma \in E(\Gamma_1)$, то также имеем $u'(x_0) = 0$. В силу уравнения $(pu'')'' = 0$ на γ функция pu'' линейна и на концах ребра γ в силу условий (4) обращается в нуль. Следовательно, $(pu'')(x) \equiv 0$ на γ . Отсюда и из условия $u'(x_0) = 0$ получаем $u'(x) \equiv 0$ на γ . Поэтому $u(x) \equiv M$ на γ и в вершинах, примыкающих к нему.

В случае графа без внутренних вершин из проведенных рассуждений следует, что значение M достигается в некоторой точке из $\partial\Gamma$.

Теперь рассмотрим случай, когда x_0 является внутренней вершиной графа Γ . Из условий (5) имеем

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_1(x_0)} (p_\gamma u''_\gamma)'(x_0) = \sum_{\gamma \in \Gamma_2(x_0)} (q_\gamma u'_\gamma)(x_0),$$

причем по условию теоремы $\Gamma_2(x_0) \neq \emptyset$. Если $\Gamma_1(x_0) = \emptyset$, то справедливо равенство $\sum_{\gamma \in \Gamma_2(x_0)} (q_\gamma u'_\gamma)(x_0) = 0$. Если же $\Gamma_1(x_0) \neq \emptyset$, то для всех $\gamma \in E(\Gamma_1)$ (и, в частности, для $\gamma \in \Gamma_1(x_0)$) из проведенных выше рассуждений следует, что $(p_\gamma u''_\gamma)(x) \equiv 0$, и тогда $(p_\gamma u''_\gamma)'(x) \equiv 0$. Значит, $\sum_{\gamma \in \Gamma_1(x_0)} (p_\gamma u''_\gamma)'(x_0) = 0$ и также имеем

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_2(x_0)} (q_\gamma u'_\gamma)(x_0) = 0.$$

Поскольку x_0 – точка максимума, то $u'_\gamma(x_0) \leq 0$ при каждом $\gamma \in \Gamma(x_0)$. Следовательно, в сумме $\sum_{\gamma \in \Gamma_2(x_0)} (q_\gamma u'_\gamma)(x_0)$ все слагаемые неположительны. Поэтому $(q_\gamma u'_\gamma)(x_0) = 0$ при всех $\gamma \in \Gamma_2(x_0)$. Отсюда и из уравнения $(qu')'(x) = 0$, как и ранее, получаем $u(x) \equiv M$ на всех ребрах $\gamma \in \Gamma_2(x_0)$ и прилежащих к ним вершинам. По условию теоремы вершину x_0 можно соединить с некоторой вершиной $b \in \partial\Gamma$ ломаной, звенья которой совпадают с ребрами графа Γ_2 , причем можно считать, что все узлы ломаной кроме b являются внутренними вершинами графа Γ . Тогда из проведенного рассуждения следует, что $u(x) \equiv M$ на этой ломаной и в граничной вершине b .

Итак, значение M достигается в некоторой точке из $\partial\Gamma$, и из условия (6) имеем $M = 0$.

Таким образом, $\max_{x \in \bar{\Gamma}} u(x) = 0$ и, аналогично, $\min_{x \in \bar{\Gamma}} u(x) = 0$. Следовательно, $u(x) \equiv 0$ на Γ , и задача (1)–(6) невырождена.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для графа Γ следующие условия эквивалентны:

- 1⁰. существует вершина $a \in J(\Gamma)$, которую нельзя соединить с $\partial\Gamma$ ломаной, звенья которой совпадают с ребрами графа Γ_2 ;
- 2⁰. существует связный подграф Λ графа Γ такой, что выполнены условия а) и б) теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала выполнено условие 1⁰. Граф Λ составим из некоторых ребер и вершин графа Γ . Если к вершине a примыкают только ребра графа Γ_1 , то множество $J(\Lambda)$ составим из вершины a , множество $E(\Lambda)$ составим из всех ребер графа Γ_1 , примыкающих к вершине a .

Если к вершине a примыкают ребра не только графа Γ_1 , то множество $J(\Lambda)$ составим из a и тех внутренних вершин графа Γ , которые можно соединить с a ломаной со звеньями, совпадающими с ребрами графа Γ_2 , не примыкающими к $\partial\Gamma$; множество $E(\Lambda)$ составим из всех ребер графа Γ , примыкающих к вершинам из $J(\Lambda)$.

Пусть Λ^0 – множество точек всех ребер из $E(\Lambda)$. Образует множество $\Lambda = J(\Lambda) \cup \Lambda^0$.

По построению множество Λ составлено из целых ребер графа Γ , входящих в $E(\Lambda)$, и некоторых концов этих ребер, включенных в $J(\Lambda)$. Следовательно, Λ является графом, у которого $J(\Lambda)$ – множество внутренних вершин, а $E(\Lambda)$ – множество

ребер. В силу построения $\Lambda \subset \Gamma$ и $J(\Lambda) \subset J(\Gamma)$. Покажем, что Λ – открытое подмножество в Γ . Ребро графа является открытым подмножеством и, следовательно, любая точка ребра входит в Λ с некоторой окрестностью. Если $b \in J(\Lambda)$, то $b \in J(\Gamma)$ и по построению все ребра графа Γ , примыкающие к вершине b , включены в Λ . Тогда b вместе с примыкающими ребрами образует открытое подмножество точки b , которая целиком входит в Λ . Поэтому Λ является открытым подмножеством и, следовательно, подграфом графа Γ .

Покажем, что Λ – связный подграф. Любую вершину $b \in J(\Lambda)$, отличную от a , можно соединить с вершиной a ломаной со звеньями, совпадающими с ребрами из Γ_2 так, что эта ломаная включена в Λ . Далее, две произвольные внутренние вершины из Λ , отличные от a , можно соединить с вершиной a и, следовательно, между собой ломаными такого же типа. Две произвольные точки в Λ можно соединить отрезками ребер с вершинами из $J(\Lambda)$, затем эти вершины, как указано выше, соединить ломаной между собой и получим непрерывную кривую в Λ , соединяющую заданные точки. Таким образом, множество Λ линейно связно и, следовательно, связно.

Условие а) выполнено по построению графа Λ .

Проверим выполнение условия б). При $\partial\Lambda = \emptyset$ условие б) выполнено. При $\partial\Lambda \neq \emptyset$ покажем, что к любой вершине $b \in \partial\Lambda$ в Λ не могут примыкать ребра из $E(\Gamma_2)$. Предположим противное: в Λ ребро $\gamma = (b, c)$ принадлежит $E(\Gamma_2)$. Тогда вершина c по построению графа Λ является его внутренней вершиной. Поскольку вершины b и c соединены ребром из $E(\Gamma_2)$, то $b \in J(\Lambda)$, что противоречит выбору вершины b . Следовательно, выполнены условие б) и вместе с ним 2^0 .

Пусть теперь выполнено условие 2^0 . Если $\partial\Gamma = \emptyset$, то условие 1^0 выполнено. Рассмотрим случай $\partial\Gamma \neq \emptyset$. При выполнении условия б) любую вершину из $J(\Lambda)$ нельзя соединить с $\partial\Lambda$ ломаной, звенья которой совпадают с ребрами графа Γ_2 .

Покажем, что любую вершину из $J(\Lambda)$ нельзя соединить с $\partial\Gamma$ ломаной, звенья которой совпадают с ребрами графа Γ_2 . Пусть, в предположении противного, вершины $a \in J(\Lambda)$ и $b \in \partial\Gamma$ соединены ломаной σ со звеньями, совпадающими с ребрами графа Γ_2 . Как отмечено выше, $b \notin \partial\Lambda$. Кроме того, в силу $J(\Lambda) \subset J(\Gamma)$ и $J(\Gamma) \cap \partial\Gamma = \emptyset$ имеем $b \notin J(\Lambda)$. Таким образом, b не является вершиной графа Λ . Введем ориентацию на σ от a к b . Заметим, что первое звено ломаной σ образовано ребром графа Λ , а последнее звено – ребром, не входящим в Λ . Поскольку Λ – открытое подмножество в Γ , то любое ребро графа Λ , прилежащее к его внутренней вершине, включено в Λ . Поэтому существует набор идущих подряд начальных звеньев ломаной σ , которые входят в Λ . Последняя вершина c этого набора ребер является граничной вершиной графа Λ , так как следующее звено ломаной σ не входит в Λ . Таким образом, $c \in \partial\Lambda$ и к вершине c в Λ примыкает ребро графа Γ_2 , что противоречит условию. Следовательно, утверждение 1^0 выполнено.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Задача (1)–(6) вырождена тогда и только тогда, когда выполнено условие 1^0 теоремы 3 (или, что то же самое, не выполнено условие теоремы 2).

СЛЕДСТВИЕ 2. Задача (1)–(6) вырождена тогда и только тогда, когда выполнено условие теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Задача (1)–(6) невырождена тогда и только тогда, когда выполнено условие теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 4. Задача (1)–(6) невырождена тогда и только тогда, когда не выполнено условие теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. Задача (1)–(6) невырождена тогда и только тогда, когда $\partial\Gamma \neq \emptyset$ и выполнен принцип максимума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задача (1)–(6) невырождена. Тогда из следствия 3 теоремы 3 имеем выполнение условия теоремы 2. Откуда следует $\partial\Gamma \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольное решение $u(\cdot)$ уравнения $\mathfrak{L}u = 0$. Доопределим $u(x)$ до непрерывной функции на Γ . Это можно сделать, так как в силу равномерной непрерывности и условий (3) пределы в каждой фиксированной внутренней вершине вдоль всех прилегающих ребер одинаковы. Кроме того, будем считать, что для каждой граничной вершины a и любого ребра γ , прилежащего к вершине a , определено предельное значение $u_\gamma(a)$.

Предположим, что $M = \sup_{x \in \Gamma} u(x)$. Для некоторого ребра γ и предельной точки x_0 этого ребра выполнено равенство $u_\gamma(x_0) = M$. Повторяя рассуждения теоремы 2 для точки x_0 , получим, что значение M функция $u(\cdot)$ достигает на границе графа.

Аналогичное рассуждение можно провести для $m = \inf_{x \in \Gamma} u(x)$. Таким образом, принцип максимума выполняется.

Пусть $\partial\Gamma \neq \emptyset$ и выполнен принцип максимума. Рассмотрим произвольное решение $u(\cdot)$ однородной задачи. Поскольку $\mathfrak{L}u = 0$ и выполнен принцип максимума, то $M = \sup_{x \in \Gamma} u(x)$ и $m = \inf_{x \in \Gamma} u(x)$ достигаются на $\partial\Gamma$. В силу условия (6) имеем $M = m = 0$. Следовательно, $u(x) \equiv 0$ и задача (1)–(6) невырождена.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2003.
- [2] P. Kuchment, "Graph models for waves in then structures", *Waves Random Media*, **12** (2002), 1–24.
- [3] Ю. В. Покорный, "О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях", *Дифференц. уравнения*, **37**:5 (2001), 661–671.
- [4] О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный, Е. Н. Провоторова, "Об одной векторной краевой задаче", *Краевые задачи*, Пермь, 1983, 64–70.
- [5] О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный, "О краевой задаче на графе", *Дифференц. уравнения*, **24**:4 (1988), 701–703.
- [6] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, "Теоремы Штурма для уравнений на графах", *Докл. АН СССР*, **309**:6 (1989), 1306–1308.
- [7] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, "О теоремах сравнения для уравнений на графах", *Дифференц. уравнения*, **25**:7 (1989), 1141–1150.
- [8] Ю. В. Покорный, Е. Н. Провоторова, О. М. Пенкин, "О спектре некоторых векторных краевых задач", *Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, Сб. научн. тр., Наука, Новосибирск, 1988, 109–113.
- [9] J. E. Lagnese, G. Leugering, E. J. P. G. Schmidt, "Control of planar networks of Timoshenko beams", *SIAM J. Control Optim.*, **31** (1993), 780–811.
- [10] B. Dekoninck, S. Nicaise, "Spectre des réseaux de poutres", *C.R. Acad. Sci. Paris*, **326**. Série 1 (1998), 1249–1254.
- [11] B. Dekoninck, S. Nicaise, "The eigenvalue problem for networks of beams", *Generalized Functions. Operator Theory and Dynamical Systems*, Chapman and Hall Research in Math., 1999, 335–344.

- [12] F. Ali Mehmeti, B. Dekoninck, “Transient vibrations of planar networks of beams: interaction of flexion, transversal and longitudinal waves”, *Partial Differential Equations on Multistructures*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **219**, ed. F. Ali Mehmeti, J. von Below and S. Nicaise, 2001, 1–18.
- [13] B. Dekoninck, “Control of network of Euler–Bernoulli beams”, *ESAIM-COCV*, **4** (1999), 57–82.
- [14] J. E. Lagnese, G. Leugering, E. J. P. G. Schmidt, “Modeling of dynamic networks of thin thermoelastic beams”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **16** (1993), 327–358.
- [15] A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, “Fourth-order differential equations on geometric graphs”, *J. Math. Sci.*, **119**:6 (2004), 719–739.
- [16] А. В. Боровских, Р. Мустафокулов, К. П. Лазарев, Ю. В. Покорный, “Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети”, *Докл. РАН*, **345**:6 (1995), 730–732.
- [17] Ю. В. Покорный, Р. Мустафокулов, “О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнений четвертого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **33**:10 (1997), 1358–1365.
- [18] Ю. В. Покорный, Р. Мустафокулов, “О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе”, *Изв. вузов. Математика*, **44**:2 (1999), 75–82.
- [19] Ю. В. Покорный, К. П. Лазарев, “Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач”, *Дифференц. уравнения*, **23**:4 (1987), 658–670.
- [20] К. П. Лазарев, *О спектре некоторых негладких многоточечных задач*, Дисс. ... к.ф.-м.н., ВГУ, Воронеж, 1988.
- [21] Е. Н. Провоторова, “О векторных краевых задачах, порождаемых скалярным дифференциальным оператором”, *Дифференц. уравнения*, **23**:10 (1987), 1711–1715.
- [22] Ю. В. Покорный, Т. В. Белоглазова, К. П. Лазарев, “Об одном классе разнорядковых обыкновенных дифференциальных уравнений на графе”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 469–470.

К. П. Лазарев

Воронежский государственный университет

E-mail: lazarev@kvm.vsu.ru

Поступила в редакцию

23.12.2004

Исправленный вариант

05.09.2005

Т. В. Белоглазова

Воронежский военный авиационный инженерный институт

E-mail: Sprite2000@mail.ru