Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Савчин, С. А. Будочкина, О существовании вариационного принципа для операторного уравнения со второй производной по “времени”, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 87–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2783>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:50:00

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ СО ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО “ВРЕМЕНИ”

В. М. Савчин, С. А. Будочкина

Используя методы нелинейного функционального анализа, определяется структура эволюционного операторного уравнения второго порядка, допускающего прямую вариационную формулировку.

Библиография: 5 названий.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$N(u) \equiv D_t(P_2(t)u_t) + P_1(t)u_t + Q(t, u) = 0, \quad u \in D(N), \quad (1) \quad \{1\}$$

$$t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \quad u_t \equiv D_t u \equiv \frac{d}{dt} u.$$

Здесь $D(N)$ – область определения оператора $N: D(N) \subseteq U \rightarrow V$, $D(N) = \{u \in C^2([t_0, t_1], U_1), u(t_0) = \psi_0, u(t_1) = \psi_1\}$, $U = C^2([t_0, t_1]; U_1)$, $V = C([t_0, t_1]; V_1)$, U_1, V_1 – линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $U_1 \subseteq V_1$; $\forall t \in [t_0, t_1]$ операторы $P_1(t): U_1 \rightarrow V_1$ и $P_2(t): U_1 \rightarrow V_1$ являются линейными, а $Q: [t_0, t_1] \times U \rightarrow V$ – в общем случае нелинейный оператор.

Будем предполагать, что при каждом $t \in (t_0, t_1)$ и $u \in C^2([t_0, t_1]; U_1)$ функция $P_1(t)u(t)$ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируема, а $P_2(t)u(t)$ – дважды непрерывно дифференцируема на (t_0, t_1) .

Под решением задачи (1) понимается функция $u \in D(N)$, удовлетворяющая уравнению (1).

Для упрощения обозначений будем записывать (1) также в виде

$$N(u) \equiv D_t(P_2 u_t) + P_1 u_t + Q(u) = 0,$$

считая, что операторы P_1 , P_2 и Q , в общем случае, зависят и от t .

В дальнейшем всюду предполагается, что в каждой точке $u \in D(N)$ существует производная Гато оператора N , определяемая формулой [2; с. 28]

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} N(u + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} = \delta N(u, h) = N'_u h.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05.01.00422А, 03-01-00376.

Пусть задана билинейная форма

$$\Phi(\cdot, \cdot) \equiv \int_{t_0}^{t_1} \langle \cdot, \cdot \rangle dt: V \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad (2) \quad \{2\}$$

такая, что билинейное отображение $\Phi_1(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ удовлетворяет $\forall t \in [t_0, t_1]$ следующим условиям:

$$\begin{aligned} \langle v_1(t), v_2(t) \rangle &= \langle v_2(t), v_1(t) \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V_1, \\ D_t \langle v(t), g(t) \rangle &= \langle D_t v(t), g(t) \rangle + \langle v(t), D_t g(t) \rangle \quad \forall v, g \in C^2([t_0, t_1]; U_1). \end{aligned}$$

Если $v = v(x, t)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, то можно, например, рассмотреть

$$\langle v, g \rangle = \int_{\Omega} v(x, t) g(x, t) dx. \quad (3) \quad \{3\}$$

Будем говорить, что уравнение (1) допускает прямую вариационную формулировку на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы (2), если существует функционал $F_N: D(N) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\delta F_N[u, h] = \Phi(N(u), h) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u).$$

Функционал F_N называется *потенциалом оператора N* , а N – *градиентом функционала F_N* . Записывают $N = \text{grad}_{\Phi} F_N$. Оператор N называется *потенциальным на множестве $D(N)$ относительно Φ* .

Будем предполагать, что $D(N)$ – выпуклое множество; для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u)$ функция $\varphi(\varepsilon) \equiv \Phi(N(u + \varepsilon h), g)$ принадлежит классу $C^1[0, 1]$, и $(u - u_0) \in D(N'_u) \forall u, u_0 \in D(N)$; существует сопряженный оператор N'_u к N'_u , определяемый равенством $\Phi(N'_u h, g) = \Phi(h, N'_u g) \forall u \in D(N)$, $\forall h, g \in D(N'_u)$.

Согласно теореме Вольтерра [3; с. 15], необходимым и достаточным условием потенциальности оператора N на множестве $D(N)$ относительно Φ является

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(N'_u g, h) \quad \forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u). \quad (4) \quad \{4\}$$

При выполнении этого условия потенциал F_N определяется формулой

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi(N(u_0 + \lambda(u - u_0)), u - u_0) d\lambda + F_N[u_0],$$

где u_0 – фиксированный элемент из $D(N)$.

Наша цель – установить структуру операторов P_1 , P_2 , и Q , при которой эволюционное уравнение (1) допускает прямую вариационную формулировку на $D(N)$ относительно произвольной фиксированной билинейной формы вида (2) такой, что оператор $D_t = d/dt$ кососимметричен на $D(N'_u)$, т.е.

$$\Phi(D_t h_1, h_2) = -\Phi(D_t h_2, h_1) \quad \forall h_1, h_2 \in D(N'_u).$$

2. Структура эволюционного вариационного операторного уравнения второго порядка.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $D_t^* = -D_t$ на $D(N'_u)$. Тогда для существования прямой вариационной формулировки уравнения (1) на $D(N)$ относительно (2) необходимо и достаточно, чтобы $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполнялись следующие условия на $D(N'_u)$:

$$P_2 - P_2^* = 0, \quad (5) \quad \{5\}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_2^*}{\partial t} + P_1^* + P_1 = 0, \quad (6) \quad \{6\}$$

$$\frac{\partial P_1^*}{\partial t} + Q'_u - Q_u^* = 0. \quad (7) \quad \{7\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (1), получаем

$$N'_u h = D_t(P_2 h_t) + P_1 h_t + Q'_u h.$$

Критерий (4) в данном случае записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle D_t(P_2 h_t) + P_1 h_t + Q'_u h, g \rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \langle D_t(P_2 g_t) + P_1 g_t + Q'_u g, h \rangle dt,$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} [\langle D_t(P_2 h_t) + P_1 h_t + Q'_u h, g \rangle - \langle D_t(P_2 g_t) + P_1 g_t + Q'_u g, h \rangle] dt = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u). \quad (8) \quad \{8\}$$

Заметим, что

$$D_t(P_2 h_t) = \frac{\partial P_2}{\partial t} h_t + P_2 h_{tt}. \quad (9) \quad \{9\}$$

Учитывая (9) и условие $D_t^* = -D_t$ на $D(N'_u)$, из (8) получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left\langle \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} D_t + P_2 D_{tt} + P_1 D_t + Q'_u \right) h, g \right\rangle - \langle D_t(P_2^* h_t) - D_t(P_1^* h) + Q_u^* h, g \rangle \right] dt = 0$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left\langle \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} D_t + P_2 D_{tt} + P_1 D_t + Q'_u \right) h, g \right\rangle - \left\langle \left(\frac{\partial P_2^*}{\partial t} D_t + P_2^* D_{tt} - \frac{\partial P_1^*}{\partial t} - P_1^* D_t + Q_u^* \right) h, g \right\rangle \right] dt = 0.$$

Таким образом, условие (8) приводится к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle \left[(P_2 - P_2^*) D_{tt} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_2^*}{\partial t} + P_1 + P_1^* \right) D_t + \frac{\partial P_1^*}{\partial t} + Q'_u - Q_u^* \right] h, g \right\rangle dt = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall g, h \in D(N'_u).$$

Это тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$\left[(P_2 - P_2^*)D_{tt} + \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - \frac{\partial P_2^*}{\partial t} + P_1 + P_1^* \right) D_t + \frac{\partial P_1^*}{\partial t} + Q'_u - Q_u'^* \right] h = 0 \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u),$$

а для справедливости этого равенства необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (5)–(7).

Заметим, что в силу (5) условие (6) принимает вид

$$P_1 + P_1^* = 0,$$

при этом (7) может быть представлено следующим образом:

$$-\frac{\partial P_1}{\partial t} + Q'_u - Q_u'^* = 0.$$

Таким образом, условия (5)–(7) эквивалентны

$$\begin{aligned} P_2 - P_2^* &= 0, & P_1 + P_1^* &= 0, \\ -\frac{\partial P_1}{\partial t} + Q'_u - Q_u'^* &= 0. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Условия (5)–(7) выполняются тогда и только тогда, когда уравнение (1) имеет вид*

$$\begin{aligned} N(u) &\equiv D_t(P_2 u_t) + P_1 u_t + Q(u) \\ &\equiv D_t[(-R_2 - R_2^*)u_t] + (R_1^* - R_1)u_t + \left(\text{grad}_{\Phi_1} B[u] - \frac{\partial R_1}{\partial t} u \right) = 0 \quad \forall u \in D(N). \end{aligned} \quad (10) \quad \{1\}$$

При этом операторы R_1 , R_2 , B могут быть найдены по формулам

$$\Phi(R_1 u, u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -P_1(u - u_0), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \quad (11) \quad \{1\}$$

$$\Phi(R_2 u_t, u_t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle -P_2(u_t - u_{0_t}), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle d\lambda dt, \quad (12) \quad \{1\}$$

$$B[u] = \int_0^1 \left\langle Q(\tilde{u}(\lambda)) + \lambda \frac{\partial P_1}{\partial t}(u - u_0), u - u_0 \right\rangle d\lambda, \quad (13) \quad \{1\}$$

где $\tilde{u}(\lambda) = u_0 + \lambda(u - u_0)$; u_0 – фиксированный элемент из $D(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $D_t^* = -D_t$ на $D(N'_u)$ и выполнены условия (5)–(7), то согласно теореме 1 оператор (1) является потенциальным относительно (2). Соответствующий функционал F_N имеет вид

$$\begin{aligned} F_N[u] &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\left\langle D_t \left(P_2 \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right), u - u_0 \right\rangle + \left\langle P_1 \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}, u - u_0 \right\rangle + \langle Q(\tilde{u}(\lambda)), u - u_0 \rangle \right] d\lambda dt + F_N[u_0]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$J_2[u] = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left\langle D_t \left(P_2 \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right), u - u_0 \right\rangle d\lambda dt.$$

Используя (9) и условие кососимметричности оператора D_t , получаем

$$\begin{aligned} J_2[u] &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \langle D_t [P_2 u_{0_t} + \lambda P_2 (u_t - u_{0_t})], u - u_0 \rangle d\lambda dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\langle D_t (P_2 u_{0_t}), u - u_0 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \lambda (u - u_0), \frac{\partial P_2}{\partial t} (u_t - u_{0_t}) + P_2 (u_{tt} - u_{0_{tt}}) \right\rangle \right] d\lambda dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\langle D_t (P_2 u_{0_t}), u - u_0 \rangle + \left\langle \lambda (u - u_0), \frac{\partial P_2}{\partial t} (u_t - u_{0_t}) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \lambda P_2 (u - u_0), u_{tt} - u_{0_{tt}} \rangle \right] d\lambda dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\langle D_t (P_2 u_{0_t}), u - u_0 \rangle + \left\langle \lambda \frac{\partial P_2}{\partial t} (u_t - u_{0_t}), u - u_0 \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \lambda \frac{\partial P_2}{\partial t} (u - u_0), u_t - u_{0_t} \right\rangle + \langle D_t (P_2 (\lambda (u_t - u_{0_t}))), u - u_0 \rangle \right] d\lambda dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\left\langle D_t \left(P_2 \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right), u - u_0 \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \lambda \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} - \left(\frac{\partial P_2}{\partial t} \right)^* \right) (u_t - u_{0_t}), u - u_0 \right\rangle \right] d\lambda dt. \end{aligned}$$

Для интеграла $J_1[u] = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \langle P_1 \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}, u - u_0 \rangle d\lambda dt$ имеем

$$\begin{aligned} J_1[u] &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 [\langle P_1 u_{0_t}, u - u_0 \rangle + \langle \lambda P_1 (u_t - u_{0_t}), u - u_0 \rangle] d\lambda dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 [\langle P_1 u_{0_t}, u - u_0 \rangle + \langle \lambda (u - u_0), D_t (P_1 (u - u_0)) \rangle] d\lambda dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\langle P_1 u_{0_t}, u - u_0 \rangle + \left\langle \lambda (u - u_0), \frac{\partial P_1}{\partial t} (u - u_0) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \lambda (u - u_0), P_1 (u_t - u_{0_t}) \rangle \right] d\lambda dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\left\langle P_1 \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t}, u - u_0 \right\rangle + \left\langle \lambda \frac{\partial P_1}{\partial t} (u - u_0), u - u_0 \right\rangle \right] d\lambda dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F_N[u] &= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^1 \left[\left\langle -P_2 (u_t - u_{0_t}), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle - \left\langle P_1 (u - u_0), \frac{\partial \tilde{u}(\lambda)}{\partial t} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle Q(\tilde{u}(\lambda)) + \lambda \frac{\partial P_1}{\partial t} (u - u_0), u - u_0 \right\rangle \right] d\lambda dt + F_N[u_0]. \end{aligned}$$

Используя (11)–(13), получаем

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} [\langle R_2 u_t, u_t \rangle + \langle R_1 u, u_t \rangle + B[u]] dt + F_N[u_0]. \quad (14) \quad \{14\}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \delta F_N[u, h] &= \int_{t_0}^{t_1} [\langle R_2 h_t, u_t \rangle + \langle R_2 u_t, h_t \rangle + \langle R_1 h, u_t \rangle + \langle R_1 u, h_t \rangle + \langle \text{grad}_{\Phi_1} B[u], h \rangle] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\langle -D_t(R_2^* u_t), h \rangle - \langle D_t(R_2 u_t), h \rangle \\ &\quad + \langle R_1^* u_t, h \rangle - \langle D_t(R_1 u), h \rangle + \langle \text{grad}_{\Phi_1} B[u], h \rangle] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\left\langle -\frac{\partial R_2^*}{\partial t} u_t, h \right\rangle - \langle R_2^* u_{tt}, h \rangle - \left\langle \frac{\partial R_2}{\partial t} u_t, h \right\rangle - \langle R_2 u_{tt}, h \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle R_1^* u_t, h \rangle - \left\langle \frac{\partial R_1}{\partial t} u, h \right\rangle - \langle R_1 u_t, h \rangle + \langle \text{grad}_{\Phi_1} B[u], h \rangle \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle D_t[-(R_2 + R_2^*)u_t] + (R_1^* - R_1)u_t + \left(\text{grad}_{\Phi_1} B[u] - \frac{\partial R_1}{\partial t} u \right), h \right\rangle dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \langle N(u), h \rangle dt \quad \forall u \in D(N), \quad \forall h \in D(N'_u). \end{aligned}$$

Итак, доказаны формулы (11)–(13) и необходимость представления (10) для потенциального оператора (1). С другой стороны, если $D_t^* = -D_t$ на $D(N'_u)$ и уравнение (1) может быть представлено в виде (10), то

$$\begin{aligned} P_2 &= -R_2 - R_2^*, & P_1 &= R_1^* - R_1, \\ Q(u) &= \text{grad}_{\Phi_1} B[u] - \frac{\partial R_1}{\partial t} u. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $0 \in D(N)$, то операторы R_1 и R_2 могут быть найдены по формулам

$$\langle R_1 u, u_t \rangle = \int_0^1 \langle -\lambda P_1 u, u_t \rangle d\lambda, \quad \langle R_2 u_t, u_t \rangle = \int_0^1 \langle -\lambda P_2 u_t, u_t \rangle d\lambda.$$

В случае, когда билинейное отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определяется формулой вида (3), имеем

$$R_1 u = - \int_0^1 \lambda P_1 u d\lambda, \quad R_2 u_t = - \int_0^1 \lambda P_2 u_t d\lambda,$$

или

$$R_1 = -\frac{1}{2} P_1, \quad R_2 = -\frac{1}{2} P_2.$$

3. Примеры. 1) Рассмотрим уравнение Вольтерра [4; с. 193]

$$\begin{aligned} N(u) &\equiv \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ &\quad - \int_0^T \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \psi(t, \tau) d\tau = 0, \quad (x, t) \in Q_T = (a, b) \times (0, T). \end{aligned} \quad (15) \quad \{15\}$$

Определим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) = \{u \in U = C_{x,t}^{2,2}(\overline{Q_T}) : u|_{t=0} = \varphi^1(x), \quad u|_{t=T} = \varphi^2(x) \quad (x \in (a, b)), \quad (16) \quad \{16\}$$

$$u|_{x=a} = \varphi^3(t), \quad u|_{x=b} = \varphi^4(t) \quad (t \in (0, T))\}.$$

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_0^T \int_a^b v(x, t) g(x, t) dx dt, \quad v \in V, \quad g \in U. \quad (17) \quad \{17\}$$

Здесь $V = \{v \in C(\overline{Q_T})\}$.

Исследуем, когда уравнение (15) допускает прямую вариационную формулировку на множестве (16) относительно билинейной формы (17).

Согласно обозначениям (1) имеем

$$P_2 \equiv I, \quad (18) \quad \{18\}$$

$$P_1 \equiv 0, \quad (19) \quad \{19\}$$

$$Q(u) = -\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^T \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \psi(t, \tau) d\tau, \quad (20) \quad \{20\}$$

где I – тождественный оператор.

Легко проверить, что операторы (18), (19) удовлетворяют условиям (5) и (6) соответственно. Далее, используя формулы (17), (20), получаем

$$Q'_u{}^* h = -\frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^T \frac{\partial^2 h(x, \tau)}{\partial x^2} \psi(\tau, t) d\tau.$$

Следовательно, условие (7) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\psi(t, \tau) = \psi(\tau, t) \quad \forall t, \tau \in (0, T).$$

При этом операторы R_1 , R_2 и B , определяющие функционал (14), находятся по формулам (11)–(13) и могут быть представлены в виде

$$R_1 \equiv 0,$$

$$R_2 = -\frac{1}{2}I,$$

$$B[u] = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \int_0^T \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \psi(t, \tau) d\tau \right] dx.$$

2) Рассмотрим систему Навье–Стокса [5]

$$\begin{cases} N^i(u) \equiv \frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 u^k \cdot \frac{\partial u^i}{\partial x_k} - \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u^i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial u^4}{\partial x_i} = s_i(x, t), & i = \overline{1, 3}, \\ N^4(u) \equiv \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u^k}{\partial x_k} = 0. \end{cases} \quad (21) \quad \{21\}$$

Здесь $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t), u^4(x, t))^T$ – неизвестная вектор-функция, $N = (N^1, N^2, N^3, N^4)^T$.

Определим $D(N)$ следующим образом:

$$D(N) = \left\{ u \in U = (U^1, U^2, U^3, U^4)^T, \quad u^i \in U^i = C_{x,t}^{2,1}(\overline{Q_T}), \quad i = \overline{1, 3}, \right. \\ \left. u^4 \in U^4 = C_{x,t}^{1,0}(\overline{Q_T}): u^i|_{t=0} = u_0^i(x), \quad u^i|_{t=T} = u_1^i(x), \quad x \in \Omega, \right. \\ \left. u^i|_{\Gamma_T} = \psi_i(x, t), \quad i = \overline{1, 4} \right\}.$$

где $u_0^i, u_1^i, \psi_i, i = \overline{1, 4}$, – заданные функции.

Введем классическую билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^4 v^i(x, t) \cdot g^i(x, t) dx dt, \quad v \in V, \quad g \in U.$$

Здесь $V = \{v \in C(\overline{Q_T})\}$.

В данном случае

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что условие (6) не выполняется, поэтому система уравнений (21) не допускает представление в форме уравнений Эйлера–Лагранжа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Савчин, *Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем*, Изд-во УДН, М., 1991.
- [2] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Наука, М., 1972.
- [3] В. М. Филиппов, В. М. Савчин, С. Г. Шорохов, “Вариационные принципы для непотенциальных операторов”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундамент. исследования*, **40**, ВИНТИ, М., 1992.
- [4] V. Volterra, *Leçons sur les Fonctions de Lignes*, Gautier-Villars, Paris, 1913.
- [5] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.

В. М. Савчин

Российский университет дружбы народов

E-mail: vsavchin@yandex.ru

С. А. Будочкина

Российский университет дружбы народов

E-mail: sbudotchkina@mail.ru

Поступила в редакцию

30.04.2003

Исправленный вариант

15.07.2005