Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Сихов, Неравенства типа Бернштейна, Джексона–Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 95–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:53:04

УДК 517.518.8

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА, ДЖЕКСОНА–НИКОЛЬСКОГО И ОЦЕНКИ НОРМ ПРОИЗВОДНЫХ ЯДЕР ДИРИХЛЕ

М. Б. Сихов

Получены неравенства Бернштейна, Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов со спектром, порожденных поверхностями уровня функции $\Lambda(t)$, и рассмотрена их точность при конкретном выборе функции $\Lambda(t)$. Для производных ядер Дирихле с гармониками, порожденных поверхностями уровня функции $\Lambda(t)$, установлены оценки их норм в L^p .

Библиография: 13 названий.

1. Необходимые определения и постановка задачи. Пусть $\pi_s = [-\pi, \pi]^s$ – s -мерный куб, $s = 1, 2, \dots$, $L^p(\pi_s)$, $1 \leq p < \infty$, – множество всех измеримых 2π -периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ таких, что

$$\|f\|_p = (2\pi)^{-s} \left(\int_{\pi_s} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$L_0^p(\pi_s) = \left\{ f \in L^p(\pi_s) : \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, s \right\}.$$

Через Z^s , как обычно, обозначим целочисленную решетку $\mathbb{R}^s$. Пусть Z_0^s и Z_+^s подмножества Z^s , каждая компонента которых неотрицательна и положительна соответственно. Для $n \in Z_+^s$ положим $\|n\|_1 = n_1 + \dots + n_s$, $2^{-n} = (2^{-n_1}, \dots, 2^{-n_s})$.

Пусть $\Lambda(t) = \Lambda(t_1, \dots, t_s)$ непрерывная, неубывающая по каждой переменной при любых фиксированных остальных на $[0, 1]^s$ функция такая, что $\Lambda(t) > 0$ и $\Lambda(t) = 0$, смотря по тому $\prod_{j=1}^s t_j > 0$ или $\prod_{j=1}^s t_j = 0$.

Определим следующие множества ($N > 0$):

$$\Gamma(\Lambda, N) = \left\{ m \in Z_+^s : \Lambda(2^{-m}) \geq \frac{1}{N} \right\}, \quad \Gamma^\perp(\Lambda, N) = Z_+^s \setminus \Gamma(\Lambda, N),$$

$$\rho(n) = \{m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : 2^{n_j-1} \leq |m_j| < 2^{n_j}, \quad n \in Z_+^s,$$

$$Q(\Lambda, N) = \bigcup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \rho(n),$$

$$T(G) = \left\{ t(x) : t(x) = \sum_{n \in G} c_n e^{i(n, x)} \right\},$$

где G – конечное множество точек Z^s .

Предположим, что $f \in L_0(\pi_s)$ и

$$\sigma(f; x) \equiv \sum_{n \in Z^s} \hat{f}(n) e^{i(n, x)}$$

– её ряд Фурье–Лебега. Для вектора $\alpha \in \mathbb{R}^s$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле (см., например, [1; с. 238])

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{n \in Z^s} (in)^\alpha \hat{f}(n) e^{i(n, x)},$$

$$(in)^\alpha = \prod_{j=1}^s (in_j)^{\alpha_j}, \quad (in_j)^{\alpha_j} = |n_j|^{\alpha_j} \exp\left(i \frac{\pi \alpha_j \operatorname{sign} n_j}{2}\right), \quad j = 1, \dots, s.$$

Для функции $\Lambda(t)$ введем функцию

$$D_{Q(\Lambda, N)}(x) = \sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \delta_n(x), \quad \delta_n(x) = \sum_{m \in \rho(n)} e^{i(m, x)}, \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

и назовем ее s -мерным Λ -ядром Дирихле.

Также обозначим

$$F_{Q(\Lambda, N)}(x) = \sum_{n \in \Gamma^\perp(\Lambda, N)} \delta_n(x).$$

Гармоники функции $D_{Q(\Lambda, N)}(x)$ лежат внутри, а функции (формально определенной) $F_{Q(\Lambda, N)}(x)$ вне множества $Q(\Lambda, N)$.

В данной работе исследуются свойства тригонометрических полиномов из $T(Q(\Lambda, N))$ по отношению к двум группам вопросов. Первая касается неравенства Бернштейна (нормы полинома и его (α) -производной измеряются в метрике пространства L^p) и неравенства Джексона–Никольского (связывающие нормы полинома в различных метриках). Вторая группа вопросов связана с оценкой (α) -производных Λ -ядра Дирихле и функции $F_{Q(\Lambda, N)}(x)$ в норме пространства L^p .

2. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим функцию $\Lambda(t)$ вида $(b_1, b_2 \in \mathbb{R}, r > 0)$

$$\Lambda(t) = \Lambda(t_1, t_2) = \frac{t_1^r}{(\log \frac{1}{t_1})^{b_1}} \frac{t_2^r}{(\log \frac{1}{t_2})^{b_2}}, \quad 0 < t_1, t_2 < 1,$$

$$\Lambda(0, 0) = \Lambda(t_1, 0) = \Lambda(0, t_2) = 0.$$

Здесь и дальше рассматриваются логарифмы по основанию 2. Для всякого целого k , $r < k$, функция $\Lambda(t)$ обладает всеми свойствами смешанного модуля гладкости порядка k [2]. Для выбранной $\Lambda(t)$ положим $\Gamma(\Lambda, N) = \Gamma(N)$ и $Q(\Lambda, N) = Q(N)$.

Наряду с множествами $Q(N)$ рассмотрим также множества

$$G(N) = \left\{ m \in Z^2: |m_j| \in Z_+, \quad j = 1, 2, \quad \Lambda\left(\frac{1}{|m_1|}, \frac{1}{|m_2|}\right) \geq \frac{1}{N} \right\},$$

т.е.

$$G(N) = \{m \in Z^2: |m_j| \in Z_+, \quad j = 1, 2, \quad |m_1|^r (\log |m_1|)_+^{b_1} \cdot |m_2|^r (\log |m_2|)_+^{b_2} \leq N\},$$

где $(\log n)_+ = \log n$ при $n = 2, 3, \dots$ и $(\log n)_+ = 1$ при $n = 1$.

Множества $G(N)$ и $Q(N)$ эквивалентны, а именно из неравенств

$$\Lambda\left(\frac{1}{|m_1|}, \frac{1}{|m_2|}\right) \leq \Lambda(2^{1-n_1}, 2^{1-n_2}) \leq 2^{2k} \Lambda(2^{-n}) \leq 2^{2k} \Lambda\left(\frac{1}{|m_1|}, \frac{1}{|m_2|}\right),$$

справедливых для $m = (m_1, m_2) \in \rho(n)$, вытекает, что

$$G(N) \subset Q(2^{2k}N) \subset G(2^{2k}N). \quad (1) \quad \{1\}$$

В дальнейшем через $|E|$ обозначим число элементов множества E .

Справедлива

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha \geq 0$, $0 < r < k$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{n \in \Gamma(N)} 2^{\|n\|_1 \alpha} \asymp N^{\frac{\alpha_0}{r}} \Phi(b_1, b_2, r, \alpha_0, N),$$

где

$$\alpha_0 = \begin{cases} \alpha, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \end{cases}$$

$$\Phi(b_1, b_2, r, \alpha_0, N) = \begin{cases} (\log N)^{-\frac{b_1 \alpha_0}{r} - \frac{b_2 \alpha_0}{r} + 1}, & b_1 \alpha_0 < r, \quad b_2 \alpha_0 < r, \\ (\log N)^{-\frac{b_1 \alpha_0}{r}} \cdot \log \log N, & b_1 \alpha_0 \leq r, \quad b_2 \alpha_0 = r, \\ (\log N)^{-\frac{b_2 \alpha_0}{r}} \cdot \log \log N, & b_1 \alpha_0 = r, \quad b_2 \alpha_0 \leq r, \\ (\log N)^{-\frac{b_1 \alpha_0}{r}}, & b_1 \alpha_0 \leq r, \quad b_2 \alpha_0 > r, \\ (\log N)^{-\frac{b_2 \alpha_0}{r}}, & b_1 \alpha_0 > r, \quad b_2 \alpha_0 \leq r, \\ (\log N)^{-\frac{b \alpha_0}{r}}, & b_1 \alpha_0 > r, \quad b_2 \alpha_0 > r, \\ & b = \min\{b_1, b_2\}. \end{cases}$$

При положительных A и B запись $A \ll B$ будет означать $A \leq CB$, где C – некоторая положительная величина, разная, вообще говоря, в различных формулах и зависящая лишь от постоянных параметров, а запись $A \asymp B$ означает $A \ll B \ll A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = 0$ лемма доказана Н. Н. Пустовойтовым [2].

Поэтому рассмотрим случай $\alpha > 0$. Следуя [2], имеем

$$\begin{aligned} S &\equiv \sum_{n \in \Gamma(N)} 2^{\|n\|_1 \alpha} \asymp \sum_{n \in \Gamma(N)} \sum_{m \in \rho(n)} |m_1|^{\alpha-1} \cdot |m_2|^{\alpha-1} \\ &\asymp \sum_{n \in Q(N)} |m_1|^{\alpha-1} \cdot |m_2|^{\alpha-1} \asymp \sum_{n \in G(N)} |m_1|^{\alpha-1} \cdot |m_2|^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Положим $M = N \log^{-b_1} N$, $n = [\log M]$ (целая часть) и

$$B = \frac{N}{m_1^r (\log m_1)_+^{b_1}} \left(\log \frac{N}{m_1^r (\log m_1)_+^{b_1}} \right)_+^{-b_2}.$$

Если $m_1 > (M/2)^{1/r}$, то можно показать, что для больших N

$$|m_2|^r (\log |m_2|)_+^{b_2} < 4r^{b_1}.$$

Пусть

$$k_1(r, b_1, b_2) = \max\{k \in Z_+ : k^r(\log k)_+^{b_2} \leq 4r^{b_1}\}.$$

Если нет натуральных k , удовлетворяющих этому неравенству, то положим $k_1(r, b_1, b_2) = 1$. Аналогично, пусть

$$k_2(r, b_1, b_2) = \max\{k \in Z_+ : k^r(\log k)_+^{b_1} \leq 4r^{b_2}\}.$$

В случае отсутствия таких k положим $k_2(r, b_1, b_2) = 1$.

Пусть теперь

$$k(r, b_1, b_2) = \max\{k_1(r, b_1, b_2), k_2(r, b_1, b_2)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S &\asymp \int_1^{(N \log^{-b_1} N)^{\frac{1}{r}}} m_1^{\alpha-1} dm_1 \\ \int_1^{B^{\frac{1}{r}}} m_2^{\alpha-1} dm_2 &\asymp N^{\alpha/r} \int_1^{(N \log^{-b_1} N)^{\frac{1}{r}}} \frac{1}{m_1(\log m_1)_+^{b_1\alpha/r}} \left(\log \frac{N}{m_1^r(\log m_1)_+^{b_1}} \right)_+^{-b_2\alpha/r} dm_1 \\ &= N^{\alpha/r} \left(\int_1^{k(r, b_1, b_2)} + \int_{k(r, b_1, b_2)}^{M^{\frac{1}{2r}}} + \sum_{m=1}^{[n/2]} \int_{(M/(2^m))^{\frac{1}{r}}}^{(M/(2^{m+1}))^{\frac{1}{r}}} + \int_{(\frac{M}{2})^{\frac{1}{r}}}^{(M)^{\frac{1}{r}}} \right) \\ &= N^{\alpha/r} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4). \end{aligned} \quad (2) \quad \{2\}$$

Сначала, учитывая, что $1 \leq m_1^r(\log m_1)_+^{b_1} \leq 4r^{b_2}$ при $1 \leq m_1 \leq k(r, b_1, b_2)$, для первого слагаемого имеем

$$I_1 \ll (k(r, b_1, b_2))^\alpha ((\log N)_+^{-b_2\alpha/r} + (\log N)_+^{-b_1\alpha/r}).$$

Оценим второе слагаемое из правой части (2). Ясно, что для $m_1 > k(r, b_1, b_2)$ будет $m_1^r(\log m_1)_+^{b_1} \geq 4r^{b_2}$ и

$$\log \frac{N}{m_1^r(\log m_1)_+^{b_1}} \ll \log N,$$

а также для $m_1 \leq (M)^{\frac{1}{2r}}$ будет $r \log m_1 \leq \frac{1}{2} \log M$ и

$$m_1^r(\log m_1)_+^{b_1} \ll M^{\frac{1}{2}} \log^{b_1} M = N^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{-b_1}{2}} N (\log(N \log^{-b_1} N))^{b_1} \ll N^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{b_1}{2}} N.$$

Следовательно,

$$\log \frac{N}{m_1^r(\log m_1)_+^{b_1}} \asymp \log N.$$

Пользуясь этим соотношением, получим

$$\begin{aligned} I_2 &\asymp (\log N)_+^{-b_2\alpha/r} \int_{k(r, b_1, b_2)}^{M^{\frac{1}{2r}}} \frac{dm_1}{m_1(\log m_1)_+^{b_1\alpha/r}} \\ &\asymp (\log N)_+^{-b_2\alpha/r} \begin{cases} (\log M)^{-b_1\alpha/r+1}, & b_1\alpha < r, \\ \log \log M, & b_1\alpha = r, \\ 1, & b_1\alpha > r. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее, оценим третье слагаемое из правой части (2). Легко видеть, что для $m_1 \in [(M/(2^{m+1}))^{\frac{1}{r}}, (M/(2^m))^{\frac{1}{r}} (M/(2^m))^{\frac{1}{r}}]$ будет $\log m_1 \asymp n - m$. Кроме того, для этих m_1 при достаточно больших N будет

$$\log \frac{N}{m_1^r (\log m_1)_+^{b_1}} \asymp \log \frac{r \cdot 2^m}{(1 - b_1 \frac{\log \log N}{\log N} - \frac{m}{\log N})^{b_1}} \asymp m.$$

В силу этого получим

$$\begin{aligned} I_3 &\asymp \sum_{m=1}^{[n/2]} (n-m)^{-b_1 \alpha/r} \cdot m^{-b_2 \alpha/r} \int_{(M/(2^{m+1}))^{\frac{1}{r}}}^{(M/(2^m))^{\frac{1}{r}}} \frac{dm_1}{m_1} \\ &\asymp n^{-b_1 \alpha/r} \sum_{m=1}^{[n/2]} m^{-b_2 \alpha/r} \asymp n^{-b_1 \alpha/r} \begin{cases} n^{-b_2 \alpha/r+1}, & b_2 \alpha < r, \\ \log n, & b_2 \alpha = r, \\ 1, & b_2 \alpha > r. \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь, используя соотношение $m_1^r (\log m_1)_+^{b_1} \asymp M (\log M)^{b_1}$ при $m_1 \in [(M/2)^{\frac{1}{r}}, M^{\frac{1}{r}}]$, для четвертого слагаемого имеем

$$I_4 \asymp \left(\log \frac{N}{M (\log M)^{b_1}} \right)^{-b_2 \alpha/r} \int_{(M/2)^{\frac{1}{r}}}^{M^{\frac{1}{r}}} \frac{dm_1}{m_1 (\log m_1)^{b_1 \alpha/r}} \asymp (\log M)^{-b_1 \alpha/r}.$$

Наконец, учитывая, что $\log N \asymp \log M$, собирая воедино все полученные оценки и выбирая наибольшее по порядку слагаемое, получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $r > 0$, $\alpha, b_1 \geq 0$ и $b_2 \leq 0$. Тогда

$$\sup_{n \in \Gamma(N)} 2^{\|n\|_1 \alpha} \ll N^{\frac{\alpha}{r}} \cdot (\log N)^{-\frac{b_2 \alpha}{r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала в силу (1) заметим, что

$$\sup_{n \in \Gamma(N)} 2^{\|n\|_1 \alpha} \ll \sup_{n \in \Gamma(N)} \sup_{m \in \rho(n)} |m_1 \cdot m_2|^\alpha \ll \sup_{n \in Q(N)} |m_1 \cdot m_2|^\alpha \ll \sup_{n \in G(N)} |m_1 \cdot m_2|^\alpha.$$

Отсюда, определяя M и B как в лемме 1, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \Gamma(N)} 2^{\|n\|_1 \alpha} &\ll \sup_{1 \leq m_1 \leq M^{1/r}} \sup_{1 \leq m_2 \leq B^{1/r}} (m_1 \cdot m_2)^\alpha \\ &\ll N^{\frac{\alpha}{r}} \sup_{1 \leq m_1 \leq M^{1/r}} \left(\frac{1}{(\log m_1)_+^{b_1}} \left(\log \frac{N}{m_1^r (\log m_1)_+^{b_1}} \right)_+^{-b_2} \right)^{\frac{\alpha}{r}} \\ &\ll N^{\frac{\alpha}{r}} \sup_{1 \leq m_1 \leq M^{1/r}} (\log N)^{-\frac{b_2 \alpha}{r}} \ll N^{\frac{\alpha}{r}} \cdot (\log N)^{-\frac{b_2 \alpha}{r}}. \end{aligned}$$

3. В условиях принятых выше определений и обозначений справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}^s$. Тогда

$$\|D_{Q(\Lambda, N)}^{(\beta)}(x)\|_p \asymp \left(\sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{p(n, \beta + 1 - \frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3) \quad \{3\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху. Сначала заметим, что если $1 < q < \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $N_1 \geq N_2$ – целые положительные числа, то (см. [3])

$$\|(D_{N_1+N_2} - D_{N_1})^{(\gamma)}\|_q \asymp N_1^\gamma N_2^{1-1/q},$$

где

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos Nt.$$

Отсюда следует, что

$$\|\delta_n^{(\beta)}(x)\|_q \asymp 2^{(n, \beta+1-\frac{1}{q})}, \quad 1 < p < \infty. \quad (4) \quad \{4\}$$

Также заметим, что если $1 \leq q < p < \infty$ и $f \in L_0^q(\pi_s)$, то (см. [4; с. 25])

$$\|f\|_p^p \ll \sum_{n \in Z_+^s} \|\delta_n(f; x)\|_q^p 2^{\|n\|_1(\frac{p}{q}-1)}, \quad (5) \quad \{5\}$$

в том смысле, что если ряд, стоящий справа, сходится, то $f \in L_0^p(\pi_s)$ и выполняется указанное неравенство. Здесь

$$\delta_n(f; x) = \sum_{m \in \rho(n)} \hat{f}(m) e^{i(m, x)}$$

– двоичная пачка ряда Фурье функции f .

Теперь, пользуясь (5) и (4) для некоторого q , $1 \leq q < p < \infty$, получим

$$\|D_{Q(\Lambda, N)}^{(\beta)}(x)\|_p \ll \left(\sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{\|n\|_1(\frac{p}{q}-1)} \|\delta_n^{(\beta)}(x)\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{p(n, \beta+1-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{p}},$$

т.е. оценка сверху в (3) доказана.

Оценка снизу. Отметим, что функция одной переменной $\delta_n(x)$ приводится к следующему виду:

$$\delta_n(t) = \sum_{k \in \rho(n)} e^{ikt} = 2 \sum_{2^{n-1} \leq k < 2^n} \cos kt = \frac{2 \sin^{n-2} t \cdot \cos 2^{-1}(3 \cdot 2^{n-1} - 1)t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Из оценки $2t/\pi \leq \sin t \leq t$ при $0 \leq t \leq \pi/2$ получаем, что

$$\begin{aligned} \pi^{-1} 2^{n+1} \cos \frac{3\pi}{8} &\leq |\delta_n(t)| \leq 2^n, & t \in T_k, \quad n < k, \\ |\delta_n(t)| &\leq 2\pi t^{-1} \leq 2^{n+2}, & t \in T_k, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (6) \quad \{6\}$$

где

$$T_k = \{t \in \mathbb{R}: \pi 2^{-k-1} < |t| \leq \pi 2^{-k}\}, \quad k \geq 0.$$

Далее, заметим, что для функции $f \in L_0^p(\pi_s)$, $1 < p < \infty$, и числа $\alpha \in \mathbb{R}^s$ справедливо следующее соотношение:

$$\left\| \left[\sum_{n \in Z_+^s} |2^{(\alpha, n)} \delta_n(f, x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_p \asymp \|f^{(\alpha)}(x)\|_p. \quad (7) \quad \{7\}$$

Это соотношение является обобщением на многомерный случай теоремы Литтлвуда–Пэли (см., например, [1; с. 65]).

Пользуясь этим соотношением, разбивая отрезок интегрирования на области T_k и в сумме по n оставляя только слагаемое с $n = k$, выводим, что

$$\begin{aligned} \|D_{Q(\Lambda, N)}^{(\beta)}(x)\|_p &\asymp \left\| \left[\sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} |2^{(n, \beta)} \delta_n(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &\gg \left(\sum_{k \in \Gamma(\Lambda, N)} \int_{T_{k+1}} |2^{(n, \beta)} \delta_n(f, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу оценки (6) имеем

$$\|D_{(Q(N))}^{(\beta)}(x)\|_p \gg \left(\sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{p(n, \beta+1-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (8) \quad \{8\}$$

Оценка снизу, а тем самым, теорема, полностью доказаны.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}^s$. Функция $F_{Q(\Lambda, N)}^{(\beta)}(x) \in L^p(\pi_s)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n \in Z_+^s} 2^{p(n, \beta+1-\frac{1}{p})} < \infty. \quad (9) \quad \{9\}$$

И если выполнено условие (9), то

$$\|F_{Q(\Lambda, N)}^{(\beta)}(x)\|_p \asymp \left(\sum_{n \in \Gamma^\perp(\Lambda, N)} 2^{p(n, \beta+1-\frac{1}{p})} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала, пользуясь (5) и (4) для некоторого q , $1 < q < p$, получим

$$\left\| \sum_{n \in Z_+^s} \delta_n^{(\beta)}(x) \right\|_p \ll \sum_{n \in Z_+^s} 2^{\|n\|_1(\frac{p}{q}-1)} \|\delta_n^{(\beta)}(x)\|_q^p \ll \sum_{n \in Z_+^s} 2^{p(n, \beta+1-\frac{1}{p})}.$$

Следовательно, в силу условия (9) $F_{Q(\Lambda, N)}^{(\beta)}(x) \in L^p(\pi_s)$.

Наконец, оценивая как и выше, получим оценку сверху в (9).

Оценка снизу доказывается как в теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При конкретном выборе

$$\Lambda(t) = \prod_{j=1}^s t_j^{\gamma_j}, \quad 1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_s, \quad t \in [0, 1]^s, \quad (10) \quad \{10\}$$

$$\gamma_j > 0, \quad r_j = \frac{1}{\gamma_j} \left(\beta_j + 1 - \frac{1}{p} \right), \quad j = 1, \dots, s,$$

$$r = r_1 = \dots = r_\nu > r_{\nu+1} \geq \dots \geq r_s$$

(множество, составленное из всех n таких, что $n \in Q(\prod_{j=1}^s t_j^{\gamma_j}, 2^m) \equiv Q_m^\gamma$ называют *ступенчатым гиперболическим крестом* (см., например, [4]), оценивая сумму в соотношении (3) с помощью леммы 3 из [3], получаем

$$\|M_{\gamma, \mu}^{(\beta)}(x)\|_p \asymp \begin{cases} 2^{r\mu} \cdot \mu^{\frac{\nu-1}{p}}, & r > 0, \\ \mu^\nu, & r = 0, \\ 1, & r < 0. \end{cases}$$

Если же $r < 0$, то из теоремы 2 и леммы 4 из [3] вытекает следующая оценка:

$$\|F_{\gamma, \mu}^{(\beta)}(x)\|_p \asymp \left(\sum_{(\gamma, n) > \mu} 2^{p(n, \beta)} \cdot 2^{p(1-\frac{1}{p})\|n\|_1} \right)^{\frac{1}{p}} \asymp 2^{r\mu} \mu^{\frac{\nu-1}{p}}.$$

Эти оценки ранее получены Э. М. Галеевым [3].

Из теоремы 1 и леммы 1 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $\beta, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ и $\beta + 1 - 1/p \geq 0$. Тогда

$$\|M_{Q(N)}^{(\beta)}(x)\|_p \asymp N^{\frac{\alpha_0}{rp}} (\Phi(b_1, b_2, r, \alpha_0, N))^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\alpha_0 = \begin{cases} p(\beta + 1 - \frac{1}{p}), & \beta + 1 - \frac{1}{p} > 0, \\ 1, & \beta + 1 - \frac{1}{p} = 0. \end{cases}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}^s$. Тогда

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda, N))} \frac{\|t^{(\alpha)}(x)\|_p}{\|t(x)\|_p} \ll \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{(n, \alpha)}. \quad (11) \quad \{1\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t(x) \in T(Q(\Lambda, N))$. Тогда в силу (7) имеем

$$\|t^{(\alpha)}(x)\|_p \ll \left\| \left\{ \sum_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} \left| 2^{(n, \alpha)} \sum_{k \in \rho(n)} \hat{t}(k) \cdot e^{i(k, x)} \right|^2 \right\}^{1/2} \right\|_p \ll \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} |2^{(n, \alpha)}| \cdot \|t\|_p.$$

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для гиперболических крестов (см. (10)), когда $\alpha = r\gamma = r(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ есть целочисленный вектор, неравенство (10) сводится к результатам Б. С. Митягина [5], а при произвольном $r\gamma$ — к результатам Н. С. Никольской [6].

ТЕОРЕМА 5. При $1 < p < q < \infty$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda, N))} \frac{\|t\|_q}{\|t\|_p} \ll \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{\|n\|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}. \quad (12) \quad \{1\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\gamma = 1/p - 1/q$, $\alpha = (\gamma, \dots, \gamma)$. Ясно, что

$$t(x) = \left(\sum_{n \in Q(\Lambda, N)} \prod_{j=1}^s |n_j|^{-\gamma} \exp\left(-i \frac{\pi \gamma \operatorname{sign} n_j}{2}\right) \hat{t}(n) e^{i(n, x)} \right)^{(\alpha)}(x) \equiv (A_\gamma t)^{(\alpha)}(x).$$

Следовательно, пользуясь теоремой 4 и неравенством (см. [4; с. 9])

$$\|A_\gamma t\|_q \ll \|t\|_p,$$

получим

$$\|t\|_q \ll \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{\|n\|_1 \gamma} \cdot \|A_\gamma t\|_q \ll \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{\|n\|_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \cdot \|t\|_p,$$

что доказывает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенство Джексона–Никольского для полиномов со спектром из произвольного конечного множества $G \subset Z^s$ ранее изучалось многими авторами (см., например, [4], [7]–[13]). В частности, неравенство (12) для полиномов со спектром, определяемым функцией (10), установлено В. Н. Темляковым [4; с. 23]. Сравнение оценки (12) с другими известными оценками более подробно приведены в работе автора [13].

Из теорем 4 и 5 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}^s$. Тогда

$$\sup_{t \in T(Q(\Lambda, N))} \frac{\|t^{(\alpha)}(x)\|_q}{\|t(x)\|_p} \ll \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{(n, \alpha)} \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{\|n\|_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

Из приведенных выше утверждений можно получить ряд точных в смысле порядка неравенств типа Бернштейна и Джексона–Никольского. Приведем некоторые из них.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\beta \geq 0$, $b_2 \leq 0$ и $b_1(p-1) > r > 0$. Тогда

$$\sup_{t \in T(Q(N))} \frac{\|t^{(\beta)}(x)\|_q}{\|t(x)\|_p} \asymp N^{\frac{1}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \cdot (\log N)^{-\frac{b_2}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки сверху сразу следуют из следствия 1 и леммы 2:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T(Q(N))} \frac{\|t^{(\beta)}(x)\|_q}{\|t(x)\|_p} &\ll \sup_{n \in \Gamma(N)} 2^{\|n\|_1 \beta} \sup_{n \in \Gamma(\Lambda, N)} 2^{\|n\|_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \\ &\ll N^{\frac{1}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \cdot (\log N)^{-\frac{b_2}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Для доказательства оценки снизу сначала заметим, что

$$\begin{aligned} b_1 q \left(\beta + 1 - \frac{1}{q} \right) &\geq b_1 p \left(1 - \frac{1}{p} \right) > r, \\ b_2 q \left(\beta + 1 - \frac{1}{q} \right) &\leq 0 < r, \quad b_2 p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \leq 0 < r. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы 3 и леммы 1

$$\begin{aligned} \frac{\|D_{(Q(N))}^{(\beta)}(x)\|_q}{\|D_{(Q(N))}(x)\|_p} &\gg \frac{N^{\frac{1}{r}(\beta + 1 - \frac{1}{q})} \cdot (\log N)^{-\frac{b_2}{r}(\beta + 1 - \frac{1}{q})}}{N^{\frac{1}{r}(1 - \frac{1}{p})} (\log N)^{-\frac{b_2}{r}(1 - \frac{1}{p})}} \\ &= N^{\frac{1}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \cdot (\log N)^{-\frac{b_2}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения получим требуемую оценку снизу

$$\sup_{t \in T(Q(N))} \frac{\|t^{(\beta)}(x)\|_q}{\|t(x)\|_p} \gg \frac{\|D_{(Q(N))}^{(\beta)}(x)\|_q}{\|D_{(Q(N))}(x)\|_p} \gg N^{\frac{1}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \cdot (\log N)^{-\frac{b_2}{r}(\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

Аналогично доказывается

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 < p < \infty$, $\beta \geq 0$, $b_2 \leq 0$ и $b_1 = 0$. Тогда

$$\sup_{t \in T(Q(N))} \frac{\|t^{(\beta)}(x)\|_p}{\|t(x)\|_p} \asymp N^{\frac{\beta}{r}} (\log N)^{-\frac{b_2 \beta}{r}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Понятно, что во всех приведенных выше утверждениях параметры b_1 и b_2 можно поменять местами с очевидными изменениями в формулировках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [2] Н. Н. Пустовойтов, “Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности”, *Матем. заметки*, **65**:1 (1999), 107–117.
- [3] Э. М. Галеев, “Порядковые оценки производных периодического многомерного α -ядра Дирихле в смешанной норме”, *Матем. сб.*, **117**(159):1 (1982), 32–43.
- [4] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, *Тр. МИАН СССР*, **178** (1986).
- [5] Б. С. Митягин, “Приближение функций в пространствах L^p и C на торе”, *Матем. сб.*, **58**(100):3 (1962), 397–414.
- [6] Н. С. Никольская, “Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p ”, *Сиб. матем. ж.*, **15**:2 (1974), 395–412.
- [7] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, *Тр. МИАН СССР*, **38** (1951), 244–278.
- [8] D. Jackson, “Certain problem of closest approximation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 889–906.
- [9] Э. С. Белинский, “Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник”, *Матем. заметки*, **49**:1 (1991), 12–18.
- [10] R. J. Nessel, G. Wilmes, “Nicolskii type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **25** (1978), 7–18.
- [11] В. А. Родин, “Неравенства для тригонометрических полиномов с лакунами в пространствах L_p ”, *Исследования по теории функций многих переменных*, Ярославль, 1990, 128–133.
- [12] Е. С. Смаилов, “О влиянии геометрических свойств спектра многочлена на неравенства разных метрик С. М. Никольского”, *Сиб. матем. ж.*, **39**:5 (1998), 1157–1163.
- [13] М. Б. Сихов, “О неравенствах Джексона–Никольского”, *Вестник КазГУ. Сер. матем., мех., инф.*, 2002, № 2, 9–17.

М. Б. Сихов

Казахский государственный
национальный университет им. аль-Фараби
E-mail: mirbulats@hotmail.kz

Поступила в редакцию
20.07.2004

Исправленный вариант
12.09.2005