Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Турчин, Исчисление первого нетривиального 1-коцикла пространства длинных узлов, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 105–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2785>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:54:15

УДК 515.164

ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОГО НЕТРИВИАЛЬНОГО 1-КОЦИКЛА ПРОСТРАНСТВА ДЛИННЫХ УЗЛОВ

В. Турчин

Для пространств узлов в $\mathbb{R}^3$ теория Васильева определяет так называемые *коциклы конечного порядка*. Нольмерные коциклы – это инварианты конечно-го порядка. Первый нетривиальный коцикл положительной размерности пространства длинных узлов одномерен и имеет порядок 3. Мы применяем комбинаторную формулу Васильева, данную в работе [1], и находим значение по mod 2 данного коцикла на 1-циклах, получающихся протаскиванием узлов друг сквозь друга или вращением вокруг фиксированной прямой.

Библиография: 17 названий.

0. Введение

0.1. Инварианты конечного порядка и коциклы конечного порядка. В наше время широкую известность в теории узлов получили инварианты конечно-го порядка, называемые также инвариантами Васильева. Пространство этих инвариантов фильтровано. Инварианты порядка $\leq k$ – это те инварианты, которые при продолжении инварианта на сингулярные узлы (узлы, имеющие конечное число трансверсальных самопересечений) равны нулю на всех узлах с $k + 1$ самопересечением, см. [2]– [5].

Исторически такое простое и естественное определение имеет в своей основе далеко не простую геометрическую конструкцию В. А. Васильева. Идея этой конструкции состоит в рассмотрении пространства всех (а не только гладких вложений) отображений $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с фиксированным поведением на бесконечности¹ – отображения должны совпадать с некоторым фиксированным линейным вложением вне некоторого компакта прямой. Это пространство является аффинным пространством $\mathbb{R}^\omega$ некоторой бесконечной размерности ω . Пространство узлов $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^\omega$ вложено в него, дополнительное же пространство Σ , называемое дискриминантом, состоит из отображений, имеющих самопересечения и/или особенности – точки вырождения первого дифференциала.

Исследование проводилось при частичной финансовой поддержке грантов НШ-1972.2003.01, МК-451.2003.01, РФФИ-05-01-01012а.

¹Поскольку результаты работы относятся только к пространству длинных узлов, т.е. пространству гладких вложений $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ с фиксированным поведением на бесконечности, то и все рассуждения проводятся только для этого случая.

По двойственности Александера должен иметь место изоморфизм приведенных групп (ко)гомологий:

$$\tilde{H}^*(\mathcal{K}) \simeq \tilde{H}_{\omega-* -1}(\bar{\Sigma}), \quad (*) \quad \{*\}$$

где $\bar{\Sigma}$ – одноточечная компактификация пространства Σ . Естественно, выражение $(*)$ не имеет точного математического смысла, поскольку ω здесь – бесконечность и речь идет о нахождении циклов в дискриминанте бесконечной размерности (но конечной коразмерности). Для придания точного математического смысла изоморфизму $(*)$ необходимо рассматривать конечномерные аппроксимации пространства узлов, т.е. конечномерные подпространства $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^\omega$, находящиеся в общем положении с дискриминантом Σ , см. [2]. Для всех N группы гомологий дискриминанта вычисляются с помощью спектральных последовательностей, которые после сдвига размерностей стабилизируются и определяют стабильную спектральную последовательность. Увеличивая размерность N , мы сможем исчерпать все циклы дискриминанта конечной коразмерности. Но, возможно, не все циклы будут стабилизироваться – некоторые могут потеряться, постоянно попадая в нестабильную область ассоциированной спектральной последовательности, см. [2]. Коциклы пространства узлов, двойственные стабилизирующимся циклам дискриминанта, называются *коциклами конечного порядка*. Нольмерные коциклы такого типа есть в точности инварианты конечного порядка. Порядок коцикла соответствует номеру члена фильтрации

$$\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots \quad (**) \quad \{*\}$$

разрешенного дискриминанта σ , в котором лежит двойственный цикл. Грубо говоря, порядок коцикла показывает, насколько сложные страты дискриминанта Σ участвуют в определении этого двойственного цикла.

Данная работа посвящена первому нетривиальному коциклу конечного порядка и положительной размерности. Мы будем его обозначать v_3^1 . Этот коцикл одномерен и имеет порядок 3. В. А. Васильев назвал его коциклом Тейблума–Турчина.

0.2. Коцикл v_3^1 . Результаты Васильева. Впервые этот коцикл был обнаружен Д. Тейблумом и мной в результате компьютерных вычислений в 1995 году. Мы нашли лишь его “главную часть”, лежащую в $\sigma_3 \setminus \sigma_2$. Исходя из соображений размерности можно было доказать, что все высшие стабильные дифференциалы спектральной последовательности, ассоциированной с фильтрацией $(**)$, его сохраняют, из чего теоретически следовало его существование. Васильев обобщил этот коцикл на случай длинных узлов в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности $n \geq 3$, см. [6], [7], и затем построил его точное описание по mod 2, см. [1]. Прежде чем формулировать результат работы [1] (в применении к случаю $n = 3$) введем некоторые дополнительные обозначения.

Будем считать, что фиксированное линейное вложение $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (с которым совпадают длинные узлы вне некоторого зависящего от узла компактного подмножества прямой) в координатах (x, y, z) есть $t \mapsto (t, t, 0)$. Также будем считать, что направление $\partial_z = (0, 0, 1)$ – есть направление “вверх”. В случае если для двух точек A и B вектор $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с вектором ∂_z , будем говорить, что точка B находится над точкой A , а точка A – под B . Мы будем рассматривать вертикальную проекцию узлов на плоскость (x, y) , при этом полагая, что направление $\partial_x = (1, 0)$ в плоскости (x, y) есть направление “вправо”.

ТЕОРЕМА 0 Васильев [1]. Значение по mod 2 коцикла v_3^1 на произвольном одномерном цикле общего положения в пространстве длинных узлов равно четности числа точек этого цикла (взятых с учетом кратности), отвечающих отображениям $f: \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, которые удовлетворяют одному из условий:

- а) имеется 5 точек $a < b < c < d < e$ на прямой $\mathbb{R}^1$ таких, что $f(a)$ находится над $f(d)$, $f(e)$ находится над $f(b)$ и $f(c)$;
- б) имеется 4 точки $a < b < c < d$ на прямой $\mathbb{R}^1$ таких, что $f(a)$ находится над $f(c)$, $f(b)$ – под $f(d)$, а также проекция производной $f'(b)$ на плоскость (x, y) направлена вправо;
- в) имеется 3 точки $a < b < c$ на прямой $\mathbb{R}^1$ таких, что $f(a)$ находится над $f(b)$, но под $f(c)$, а также угол, образованный проекциями векторов $f'(a)$, $f'(b)$ на плоскость (x, y) не содержит направление вправо.

Эти точки 1-цикла необходимо брать с учетом кратности, равной числу конфигураций точек прямой, удовлетворяющих соответствующему условию: для выполнения условия а) точки a и d могут быть выбраны неоднозначно; для выполнения условия б) точки a и c могут быть выбраны неоднозначно; условие в) всегда если выполняется, то с кратностью 1. Условия а) и в) могут быть выполнены одновременно, кратности в этом случае суммируются.

0.3. Диаграммное описание коцикла v_3^1 . Цель работы [1] – дать общий метод нахождения явных комбинаторных выражений когомологических коциклов конечного порядка. Получающиеся формулы по сути есть обобщение формул Поляка–Виро–Гусарова (используемые для инвариантов конечного порядка, см. [8], [9]) и также описываются диаграммами. Условиям а), б) и в) из теоремы 0 отвечают соответственно 3 диаграммы:

FIG. 1. Коцикл v_3^1

Стрелочки, соединяющие пару точек, говорят о том, что эти точки имеют одну и ту же проекцию на плоскость (x, y) . Направление стрелки указывает какая точка выше, а какая ниже: например, в диаграмме а) первая точка находится над четвертой, а пятая – над второй и третьей. В записях под диаграммами б) и в) зашифрованы ограничения на направление касательных векторов. Условие $\xrightarrow{2}$ следует понимать как то, что проекция на плоскость (x, y) производной во второй (слева)

существенной точке диаграммы направлена вправо. Условие $\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \rightarrow$ означает, что угол, образованный проекциями на плоскость (x, y) производных, в первой и второй точках диаграммы не содержит направление вправо. В работе мы будем использовать аналогичные диаграммы, по ходу объясняя появляющиеся новые обозначения.

1. Исчисление коцикла v_3^1

1.1. Примитивность. Предположим, что нам даны узел k (который мы будем рассматривать как 0-цикл) и некоторый 1-цикл c в пространстве узлов. Пространство длинных узлов является H -пространством – умножение задается композицией узлов. Рассмотрим произведения $k * c$ и $c * k$ этих циклов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Циклы $k * c$ и $c * k$ гомологичны: действительно, цикл c можно сжать до маленьких размеров и протащить через узел k .

Имеет место и более общее утверждение. В работе [10] Р. Будни построил действие операды квадратиков на пространстве, слабо гомотопически эквивалентном пространству длинных узлов, из чего немедленно вытекает слабая гомотопическая коммутативность умножения в пространстве длинных узлов.

Заметим, что ни одну из 3 диаграмм, представляющих коцикл v_3^1 , никакой точкой прямой нельзя разбить на две диаграммы. Следовательно, значение данного коцикла на циклах $k * c$ и $c * k$ равно его значению на самом цикле c . Другими словами, данный коцикл примитивен:

$$\Delta v_3^1 = v_3^1 \otimes 1 + 1 \otimes v_3^1,$$

где 1 обозначает единицу алгебры когомологий – инвариант, равный 1 на любом узле.

1.2. 1-циклы. В этом разделе мы опишем естественно возникающие 1-циклы, на которых будет вычислено значение коцикла v_3^1 . Мы также сформулируем результаты этих вычислений.

Будем рассматривать 3 типа циклов.

1) Пусть дан узел k . Обозначим через $\hat{k}$ 1-цикл, получающийся вращением узла k вокруг оси $\{(t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ – фиксированной прямой.

Напомним, что *оснащением* длинного узла называется тривиализация его нормального расслоения, которая вне некоторого компакта прямой (там, где узел уже совпадает с фиксированным линейным вложением) совпадает с фиксированной *стандартной тривиализацией*. Поскольку нормальное расслоение двумерно и ориентировано, то для выбора оснащения достаточно фиксировать лишь первый вектор тривиализации. *Коэффициентом оснащения* принято называть число, равное коэффициенту зацепления узла с узлом, полученным сдвигом каждой его точки в направлении первого вектора тривиализации. Говорят, что оснащение *нулевое*, если коэффициент оснащения равен нулю.

2) Пусть даны 2 узла k_1 и k_2 . Рассмотрим их композицию $k_1 * k_2$ – это будет начальная точка цикла. Затем фиксируем нулевое оснащение на узле k_1 ; узел k_2 сжимаем и протаскиваем по узлу k_1 влево как бусинку, поворачивая ее в соответствии с оснащением узла k_1 . Далее узел k_2 растягиваем до предыдущих размеров и сдвигаем узлы вправо так, чтобы узел k_1 оказался на месте k_2 , а k_2 на месте k_1 . Далее наоборот узел k_1 сжимаем и протягиваем влево по узлу k_2 по заранее выбранному нулевому оснащению узла k_2 . В конечном итоге возвращаемся в исходную точку $k_1 * k_2$. Полученный 1-цикл обозначим через $[k_1, k_2]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Как уже было сказано, на пространстве длинных узлов определено действие операды квадратиков, и, тем самым, группы гомологий $H_*(\mathcal{K})$ образуют алгебру Герстенхабера, т.е. градуированную коммутативную алгебру со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$, повышающей градуировку на 1 и согласованной с умножением:

$$[a, b \cdot c] = [a, b] \cdot c + (-1)^{\tilde{b}\tilde{c}} [a, c] \cdot b.$$

Наше определение цикла $[k_1, k_2]$ есть частный случай этой операции в применении к нулевым гомологиям.

Из работ [10], [11] следует, что алгебра Герстенхабера $H_*(\mathcal{K}, \mathbb{Q})$ есть свободная алгебра (Герстенхабера), ее пространством образующих является прямая сумма групп гомологий $H_*(\mathcal{K}_p, \mathbb{Q})$ пространства простых узлов $\mathcal{K}_p$ (объединения тех компонент связности пространства $\mathcal{K}$, которые отвечают простым узлам).

3) Применим предыдущую конструкцию к двум одинаковым циклам k и k . Заметим, что уже при первом протаскивании одного узла через другой мы вернемся в исходную точку $k * k$. Обозначим получающийся цикл через $k \circ k$. Очевидно, $[k, k] = 2k \circ k$.

Нетрудно видеть, что определение циклов $\hat{k}$, $[k_1, k_2]$ и $k \circ k$ функториально и, тем самым, значение любого 1-коцикла на них должно в первом и третьем случаях давать инварианты узлов, а во втором – биинвариант – инвариант пары узлов.

Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Значение коцикла v_3^1 , приведенного по mod 2, на циклах $[k_1, k_2]$ и $k \circ k$ равно нулю, а на цикле $\hat{k}$ равно значению, приведенному по mod 2, первого нетривиального инварианта второго порядка v_2 на узле k .

Инвариант v_2 называется инвариантом Кассона, он же приведенный по mod 2 – инвариантом Арфа, см. [8], [12]–[16]. Значение инварианта $v_2(k)$ может быть вычислено по плоской проекции узла в соответствии с диаграммой

Другими словами $v_2(k)$ равно числу конфигураций, учтенных с нужным знаком – см. [8], [16], четырех точек $a < b < c < d$ на прямой $\mathbb{R}^1$ таких, что $f(a)$ находится над $f(c)$, а $f(d)$ – над $f(b)$, где $f: \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ – отображение, задающее узел k .

Естественно задаться вопросом: а что произойдет, если во второй и третьей конструкциях рассматривать протаскивания по ненулевым оснащениям²? Легко понять, что в первом случае получится цикл, гомологичный сумме

$$[k_1, k_2] + N_1 \cdot k_1 * \hat{k}_2 + N_2 \cdot k_2 * \hat{k}_1,$$

где N_1 и N_2 – оснащения соответственно первого и второго узлов. Во втором случае цикл есть сумма

$$k \circ k + N \cdot k * \hat{k},$$

где N – оснащение узла k . Согласно теореме 1 и свойству примитивности коцикла v_3^1 значение этого коцикла на данных циклах будет по mod 2 равно $N_1 \cdot v_2(k_2) + N_2 \cdot v_2(k_1)$ и $N \cdot v_2(k)$ соответственно.

²Например, в работе [1] Васильев вычисляет значение коцикла v_3^1 на цикле, получающемся протаскиванием трилистника сквозь себя, но в его ситуации оснащение не является нулевым.

1.3. Плоская реализация 1-циклов. Пусть задана проекция узла k , находящегося в общем положении, на плоскость (x, y) . С этой проекцией естественно ассоциировано *плоское* оснащение узла k , т.е. такое оснащение, при котором во всех точках вектор нормали к узлу параллелен плоскости (x, y) . Плоские оснащения более удобны для описания циклов $[k_1, k_2]$ и $k \circ k$. Но не всегда такие оснащения являются нулевыми. Для того, чтобы плоское оснащение стало нулевым, добавим к плоским проекциям узлов k_1 , k_2 и k нужное количество петель или . Первая петелька увеличивает, а вторая уменьшает на единицу коэффициент плоского оснащения. Реализации циклов $[k_1, k_2]$ и $k \circ k$ с помощью плоских оснащений будем называть *плоскими реализациями*.

Осталось дать описание *плоской реализации* цикла $\hat{k}$. Пусть задан узел k . Скрутим слева от него петельку:

FIG. 2. Скручивание петельки

Далее сам узел сожмем и протащим сквозь петельку влево в соответствии с ее плоским оснащением. Протаскив узел влево, обратно его растянем до предыдущих размеров, петельку раскрутим и вернем узел в изначальное положение. Нетрудно понять, что получившийся цикл гомологичен циклу $\hat{k}$. Также ясно, что при скручивании и раскручивании петельки у нас ни разу не встретятся конфигурации из теоремы 0. Тем самым, остается посчитать число таких конфигураций только при (плоском) протаскивании узла сквозь петельку.

1.4. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим два узла B (большой) и M (маленький), последовательно завязанные на одной прямой и имеющие проекции общего положения на плоскость (x, y) . Посчитаем сколько раз при плоском протаскивании узла M через узел B мы встретим конфигурации точек из теоремы 0.

Для упрощения вычислений перед тем, как протаскивать, повернем локально точки самопересечения проекций узлов так, чтобы получалась одна из двух возможных *стандартных* картинок (см. рис. 3).

Направление производной в нижней точке перекрестья должно быть сонаправлено с вектором $(1, 1)$ как в отрицательном $-$, так и в положительном $+$ случаях.

FIG. 3. Стандартные перекрестья

Направление производной в верхней точке перекрестья должно быть сонаправлено с вектором $(-1, 1)$ в отрицательном случае $-$, и с вектором $(1, -1)$ в положительном $+$ случаях.

Обозначим получающуюся в результате протаскивания 1-цепь через $B \circ M$. (Если плоские оснащения узлов B и M являются нулевыми, то, очевидно, $[B, M] = B \circ M + M \circ B$.)

Левая колонка табл. 1 описывает 6 возможных ситуаций появления конфигураций точек, описанных в теореме 0. Подписи M или B под точками диаграмм означают, что маленькому узлу M или, соответственно, большому узлу B принадлежат эти точки.

Нетрудно выписать правила, по которым мы исключили все остальные ситуации:

- 1) вершины диаграммы, принадлежащие узлу M , должны идти подряд;
- 2) если есть стрелочки, соединяющие точку из M с точкой из B , то все такие стрелочки должны иметь одно и то же направление: либо от M к B , либо B к M (эта ситуация отвечает тому, что узел M проходит точку самопересечения узла B ; в первом случае – проходит верхнюю точку, во втором – нижнюю);
- 3) в случае тройного самопересечения ровно одна вершина должна принадлежать B , а две другие – M (диаграммы а и в);
- 4) все вершины узла B , соединенные с вершинами M , должны идти подряд;
- 5) если в некоторой точке X диаграммы есть ограничение на направление касательной (проекция направлена вправо), то эта точка должна принадлежать маленькому узлу; если к тому же имеются стрелочки, соединяющие M с B , то вторая точка – соединенная стрелочкой с X – должна принадлежать узлу B (диаграмма б).

В табл. 1 есть два новых обозначения.

В первой строчке – двусторонняя стрелочка подразумевает, что точки узла находятся на одной вертикальной прямой: первая точка может быть как над, так и под второй.

В строчке VI минус над диаграммой означает, что имеется отрицательное самопересечение проекций, см. рис. 3.

Благодаря тому, что мы сделали самопересечения стандартными, рис. 3, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА (правило произведения). Число появлений конфигураций из первой колонки табл. 1 во всех шести случаях равно произведению числа конфигураций, отвечающих диаграмме из той же строчки второй колонки применительно к узлу B , на число конфигураций, отвечающих диаграмме из третьей колонки все той же строчки применительно к узлу M .

TABLE 1. Правило произведения

	$B \circ M$	B	M
I			
II			
III			
IV			
V			
VI			

Рассмотрим для примера первую строчку. Нетрудно видеть, что конфигурация

в нашей 1-цепи $B \circ M$ появляется тогда и только тогда, когда

маленький узел проходит через вторую точку конфигурации

большого узла в момент своего самопересечения, из чего вытекает правило произведения. Остальные случаи разбираются аналогично.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что справедливы равенства

$$\text{II} + \text{IV} + \text{VI} = 0 \bmod 2,$$

$$\text{I} + \text{V} = 0 \bmod 2.$$

В обоих случаях общий множитель, отвечающий узлу B , выносится за скобку, а то, что отвечает узлу M , равно нулю по модулю 2. Остается лишь слагаемое III. Первый множитель в нем равен по mod 2 оснащению узла B , второй – значению инварианта Арфа на узле M (простейшего $\mathbb{Z}_2$ -инварианта Васильева, имеющего порядок 2).

1.5. Открытые проблемы. Первым естественным вопросом является явное описание коцикла v_3^1 над $\mathbb{Z}$ через индекс пересечения с некоторым бесконечномерным циклом коразмерности 1 в пространстве узлов, и далее нахождение значения этого коцикла на циклах вида $[k_1, k_2]$, $k \circ k$ и $\hat{k}$.

ГИПОТЕЗА. Коцикл v_3^1 над $\mathbb{Z}$ равен нулю на циклах $[k_1, k_2]$, $k \circ k$, а на цикле $\hat{k}$ равен значению инварианта Кассона на узле k .

Основное свойство циклов $[k_1, k_2]$, $k \circ k$, $\hat{k}$ – функториальность или независимость от представителей классов изотопий узлов. Имеется еще один тип 1-циклов, удовлетворяющий этому свойству – обозначим его через $\tilde{k}$. Он получается из узла k следующим образом. Фиксируем на узле k нулевое оснащение. Рассмотрим одноточечную компактификацию S^3 пространства $\mathbb{R}^3$. Пространство длинных узлов может быть рассмотрено как пространство узлов в S^3 с фиксированным началом и фиксированным направлением производной в точке начала. В пространстве таких узлов можно рассмотреть 1-цикл, получающийся проворачиванием узла через точку начала как будто бы он был из негнущейся проволоки, см. [17]. При этом поворот узла определяется оснащением в этой точке. На плоской проекции это выглядит как выворачивание узла наизнанку, см. [17]. Естественный вопрос будет ли значение коцикла v_3^1 на таких циклах инвариантом конечного порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. A. Vassiliev, “On combinatorial formulas for cohomology of spaces of knots”, *Moscow Math. J.*, **1**:1 (2001), 91–123.
- [2] V. A. Vassiliev, “Cohomology of knot spaces”, *Theory of Singularities and its Applications*, Advances in Soviet Math., **1**, ed. V. I. Arnold, AMS, Providence, RI, 1990, 23–69.
- [3] D. Bar-Natan, “On the Vassiliev knot invariants”, *Topology*, **34** (1995), 423–472.
- [4] S. V. Chmutov, S. V. Duzhin, S. K. Lando, “Vassiliev knot invariants. I. Introduction”, *Singularities and Bifurcations*, Adv. in Sov. Math., **21**, AMS, Providence, RI, 1994, 117–126.
- [5] M. Kontsevich, “Vassiliev’s knot invariants”, *Adv. in Sov. Math.*, **16**, № 2, AMS, Providence RI, 1993, 137–150.
- [6] V. A. Vassiliev, “Topology of two-connected graphs and homology of spaces of knots”, *Differential and Symplectic Topology of Knots and Curves*, AMS translations, Ser. 2, **190**, ed. S. Tabachnikov, AMS, Providence RI, 1999, 253–286.
- [7] V. A. Vassiliev, “Homology of spaces of knots in any dimensions”, *Philos. Transact. of the London Royal Society*, **359**:1784 (2001), 1343–1364.

- [8] M. Polyak, O. Viro, “Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants”, *Internat. Math. Res. Notes*, **11** (1994), 445–453.
- [9] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, “Finite type invariants of classical and virtual knots”, *Topology*, **39**:5 (2000), 1045–1068.
- [10] R. Budney, *Little cubes and long knots*, [GT/0309427](https://arxiv.org/abs/GT/0309427).
- [11] R. Budney, F. Cohen, *On the homology of the space of knots*, In preparation.
- [12] P. Gilmer, “A method for computing the Arf invariants for links”, *Quantum Topology, Series on Knots and Everything*, **3**, eds. L. Kauffman and R. Baadhio, World Sci., Singapore, 1993, 174–181.
- [13] L. H. Kauffman, “On Knots”, *Annals of Math., Studies* 115, Princeton University Press, 1987.
- [14] J. Lannes, “Sur les invariants de Vassiliev de degré inférieur ou égal à 3”, *Enseign. Math.* (2), **39**:3–4 (1993), 295–316.
- [15] Ng. Ka Yi, “Groups of ribbon knots”, *Topology*, **37** (1998), 441–458.
- [16] M. Polyak, O. Viro, “On the Casson knot invariant”, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **10**:5 (2001), 711–738; [GT/9903158v1](https://arxiv.org/abs/GT/9903158v1).
- [17] A. Hatcher, *Topological Moduli Spaces of Knots*, <http://math.cornell.edu/~hatcher>.

В. Турчин

Левенский католический университет,

Независимый московский университет

E-mail: turchin@math.ucl.ac.be, vitia-t@yandex.ru

Поступила в редакцию

09.09.2004