Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Шерстюков, О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 119–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:46:10

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ПОЛНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В. Б. Шерстюков

В заметке усилены предыдущие результаты автора о наличии вполне регулярного роста у целой функции экспоненциального типа с последовательностью простых (всех) нулей $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для функции с вещественными нулями условия регулярности ее роста (на действительной оси и во всей плоскости) выписываются только через оценки снизу на значения модуля производной в точках λ_k . Получен также аналог одной теоремы М. Г. Крейна о функции, обратная величина которой раскладывается в соответствующий ряд простых дробей.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Используемые всюду ниже понятия и факты теории целых функций хорошо известны и содержатся, например, в монографиях [1], [2]. Рассматривается целая функция экспоненциального типа (ЦФЭТ) $\mathcal{L}(\lambda)$, все нули которой простые и образуют последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$). Пусть $h(\mathcal{L}, \theta)$ – индикатор функции $\mathcal{L}$, $\theta \in [0, 2\pi)$. В настоящей заметке, служащей продолжением статьи автора [3], изучается следующая общая задача: в какой мере поведение производной $\mathcal{L}'(\lambda)$ в точках последовательности Λ влияет на регулярность роста самой функции $\mathcal{L}(\lambda)$? Исследование этого вопроса инициировано так называемой проблемой А. Ф. Леонтьева [4]: будет ли $\mathcal{L}(\lambda)$ иметь вполне регулярный рост (ВРР) во всей плоскости, если выполняется

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} + h(\mathcal{L}, \arg \lambda_k) \right\} \leq 0? \quad (1) \quad \{1\}$$

Условие (1) и близкие ему по характеру играют важную роль при установлении критериев представимости аналитических функций рядами экспонент или обобщенных экспонент (см., например, [2], [5]) и затрагивают целый ряд смежных вопросов: интерполяции, слабой достаточности (γ -достаточности) и максимальности множеств в различных классах целых функций. Из большого количества соответствующих работ упомянем лишь [6]–[9], имеющие некоторое отношение к данной статье. Несмотря на усилия ряда авторов [10], [11], [3], сама задача Леонтьева до сих пор не решена. Чтобы отметить некоторые результаты частного характера, полученные в этом направлении, условимся в обозначениях. Класс всех функций, удовлетворяющих “условию Леонтьева” (1), обозначим через L . Определим еще подкласс $L_0 \subset L$,

состоящий из функций с вещественными нулями λ_k , $k = 1, 2, \dots$. В работе [11] А. В. Братищев построил пример четной ЦФЭТ $\mathcal{L}(\lambda) \in L_0$, т.е. имеющей вид

$$\mathcal{L}(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad \lambda_k \nearrow +\infty, \quad (2) \quad \{2\}$$

которая не является функцией ВРР. В этом примере индикаторная диаграмма $D(\mathcal{L})$ функции $\mathcal{L}$ есть отрезок мнимой оси, поэтому задачу Леонтьева следует решать при дополнительном предположении о наличии внутренних точек у множества $D(\mathcal{L})$. В классе же L_0 естественной выглядит такая задача: найти условие на последовательность $\{\mathcal{L}'(\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$, влекущее полную регулярность роста $\mathcal{L}(\lambda)$. Обе эти задачи рассматривались в статье [3], основными результатами которой являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА А [3; теорема 2]. *Условие*

$$\exists \alpha > 0: \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = O(|\lambda_k|^\alpha), \quad k \rightarrow \infty, \quad (3) \quad \{3\}$$

где $\mathcal{L}$ – произвольная ЦФЭТ с простыми нулями $\lambda_k \in \mathbb{R}$, выделяет подкласс $L_1 \subset L_0$ такой, что всякая функция $\mathcal{L} \in L_1$ имеет ВРР.

ТЕОРЕМА В [3; теорема 3]. *Если $\mathcal{L} \in L$ имеет положительный индикатор и*

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \lambda \in S_\gamma}} |\mathcal{L}(\lambda)| > 0 \quad (4) \quad \{4\}$$

(γ – некоторая проходящая через начало координат прямая; S_γ – относительно плотное по мере множество на γ), то $\mathcal{L}$ – функция ВРР.

Там же отмечено, что условие (4) заведомо выполняется, если нижний индикатор функции $\mathcal{L}$

$$h_-(\mathcal{L}, \theta) := \sup_E \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(re^{i\theta})|}{r}$$

на прямой γ положителен ($\sup$ берется по множествам E нулевой относительной меры).

Ниже (п. 2, теорема 1) установлены некоторые свойства функций класса L_0 , в частности, полная регулярность роста на вещественной прямой функций вида (2). Этот результат не противоречит цитированному примеру из [11], так как теорема В в этой ситуации, очевидно, неприменима ($\text{int } D(\mathcal{L}) = \emptyset$).

В п. 3 получено усиление теоремы А: в условии (3) под знаком O можно записать $|w(\lambda_k)|$, где $w(\lambda)$ – целая функция экспоненциального типа нуль ($w(\lambda) \in [1; 0]$) со специальными свойствами. Наконец, заключительная часть работы посвящена собственно задаче Леонтьева. В теореме 3 п. 4 приводится ряд новых дополнительных условий на функцию $\mathcal{L} \in L$, при выполнении которых $\mathcal{L}$ – функция ВРР. Одно из них: $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ |x| \notin E}} |\mathcal{L}(x)| \cdot |x|^\alpha > 0$ с каким-то $\alpha > 0$ и E^0 -множеством E (ср. с неравенством (4) из теоремы В). Обсуждается жесткость этих условий и их независимость. В качестве приложения установлен аналог одной теоремы М. Г. Крейна о разложении обратной величины целой функции класса Картрайт.

2. Для канонического произведения (2) определяются величины

$$h(\Lambda) := \varliminf_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$$

(шаг последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$) и

$$\delta(\Lambda) := \varliminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|}$$

(индекс конденсации Леонтьева). Как отмечалось выше, функция $\mathcal{L} \in L_0$ не обязана иметь во всей плоскости ВРР, однако справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Индикаторная диаграмма произвольной функции $\mathcal{L} \in L_0$ есть отрезок, параллельный мнимой оси. Далее, четная функция (2) из класса L_0 имеет ВРР на вещественной оси и*

$$\delta(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что

$$\mathcal{L}(\lambda) = e^{a\lambda+b} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Положив $\mathcal{L}_1(\lambda) := \mathcal{L}(\lambda) \cdot e^{-(i \operatorname{Im} a) \cdot \lambda}$, получим $|\mathcal{L}_1(i\mu)| \geq e^{\operatorname{Re} b} \forall \mu \in \mathbb{R}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} h\left(\mathcal{L}_1; \frac{\pi}{2}\right) &= \varliminf_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\mathcal{L}_1(i\mu)|}{\mu} = \varliminf_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\ln \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\lambda_k^2}}}{\mu} \\ &= \varliminf_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\mathcal{L}_1(-i\mu)|}{\mu} = h\left(\mathcal{L}_1; \frac{3\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Если бы индикаторная диаграмма $D(\mathcal{L})$ имела внутренние точки, то при соответствующем выборе $c \in \mathbb{R}$ мы бы получили $h(\mathcal{L}_2, \theta) > 0 \quad \forall \theta$, где $\mathcal{L}_2(\lambda) := e^{c\lambda} \cdot \mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2$ удовлетворяет условию (1). По теореме В $\mathcal{L}_2$ имеет ВРР и, следовательно, $D(\mathcal{L}_2)$ – отрезок, что противоречит условию $\operatorname{int} D(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Таким образом, $D(\mathcal{L})$ суть отрезок. Индикаторная диаграмма функции $\mathcal{L}$ всегда имеет ось симметрии, параллельную вещественной оси. Поэтому путем параллельного переноса можно добиться того, чтобы $D(\mathcal{L})$ лежала на мнимой оси, что доказывает первую часть теоремы.

Пусть теперь $\mathcal{L} \in L_0$ и является четной. По доказанному $h(\mathcal{L}; 0) = h(\mathcal{L}; \pi) = h(\mathcal{L}; \arg \lambda_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, неравенство (1) превращается в равенство

$$\delta(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = 0.$$

Относительно недавно А. Ю. Поповым было установлено, что

$$\varliminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = \varliminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\frac{1}{\mathcal{L}_0(x)})}{x},$$

где $\mathcal{L}_0(x) = |\mathcal{L}(x)|/\rho(x)$, $\rho(x) = \inf_{k \geq 1} |x - \lambda_k|$, а $\mathcal{L}(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_k^2)$ – произвольная четная ЦФЭТ, у которой $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – строго возрастающая к $+\infty$ последовательность положительных чисел с шагом $h(\Lambda)$ (доказательство результата при $h(\Lambda) > 0$ имеется в работе [12; предложение 2]). Положим $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\lambda_k - 1/k; \lambda_k + 1/k]$ и оценим в условиях теоремы 1 величину $\rho(x)$ снизу на множестве $\mathbb{R}_+ \setminus E$. Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет конечную верхнюю плотность: $\bar{\Delta} := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\lambda_k} < +\infty$. В случае $\bar{\Delta} = 0$ функция $\mathcal{L}(\lambda) \in [1; 0]$ и имеет ВРР во всей плоскости. Пусть $\bar{\Delta} > 0$. Для каждого достаточно большого положительного $x \notin E$ найдется номер $n = n(x) : \lambda_n < x < \lambda_{n+1}$ и при этом $\lambda_k/k > 1/(2\bar{\Delta}) \forall k \geq n$.

Если $\rho(x) = x - \lambda_n$, то

$$\rho(x) > \frac{1}{n} > \frac{1}{2\bar{\Delta} \cdot \lambda_n} > \frac{1}{2\bar{\Delta} \cdot x}.$$

Если же $\rho(x) = \lambda_{n+1} - x$, то

$$\rho(x) > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2\bar{\Delta} \cdot \lambda_{n+1}} = \frac{1}{2\bar{\Delta} \cdot (x + \rho(x))}.$$

Отсюда $2\bar{\Delta} \cdot \rho^2(x) + 2\bar{\Delta} \cdot x \cdot \rho(x) - 1 > 0$, а значит,

$$\rho(x) > \frac{-\bar{\Delta} \cdot x + \sqrt{(\bar{\Delta} \cdot x)^2 + 2\bar{\Delta}}}{2\bar{\Delta}} = \frac{1}{\bar{\Delta} \cdot x + \sqrt{(\bar{\Delta} \cdot x)^2 + 2\bar{\Delta}}}.$$

Итак, $1/\rho(x) = O(x)$, $x \rightarrow +\infty$, $x \notin E$, поэтому $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \frac{\ln \rho(x)}{x} \geq 0$. Выше установлено, что $\delta(\Lambda) = 0$. Это влечет

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{\rho(x)}{|\mathcal{L}(x)|}\right)}{x} \geq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \left\{ \frac{\ln \rho(x)}{x} + \frac{\ln \frac{1}{|\mathcal{L}(x)|}}{x} \right\} \geq \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \frac{\ln \rho(x)}{x} + \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \frac{\ln \frac{1}{|\mathcal{L}(x)|}}{x} \\ &\geq \overline{\lim}_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \frac{\ln \frac{1}{|\mathcal{L}(x)|}}{x} = - \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(x)|}{x}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(x)|}{x} \geq 0 = h(\mathcal{L}; 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\mathcal{L}(x)|}{x}.$$

Следовательно, существует обычный $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(x)|}{x} = 0$. При этом E – множество нулевой относительной меры. В самом деле, обозначив через $N_{\Lambda}(r) = \sum_{\lambda_k \leq r} 1$ считающую функцию последовательности Λ , имеем $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (N_{\Lambda}(r)/r) = \bar{\Delta}$. Далее,

$$\frac{\text{mes}(E \cap [0, r])}{r} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N_{\Lambda}(r)} \frac{2}{k}}{r} = \frac{O(\ln N_{\Lambda}(r))}{r} = \frac{O(\ln r)}{r}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

поэтому

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes}(E \cap [0, r])}{r} = 0.$$

Следовательно, четная функция $\mathcal{L}(\lambda)$ имеет ВРР на луче $\arg \lambda = 0$. Теорема доказана.

3. Следующий результат, усиливающий теорему А, дает признак полной регулярности роста ЦФЭТ с простыми вещественными нулями.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $w(\lambda)$ – функция класса $[1; 0]$, нулевое множество которой имеет вид $\mathcal{N} \cup \mathcal{M}$, где $\mathcal{N} = \{\nu_n\}_{n=1}^N$, $\mathcal{M} = \{i\mu_j\}_{j=1}^\infty$, $\nu_n \in \mathbb{C}$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, $n = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, \infty}$ (одно из множеств $\mathcal{N}$ или $\mathcal{M}$ может отсутствовать). При этом все нули из последовательности $\mathcal{M}$ являются простыми, а ν_n – произвольной кратности $s_n \geq 1$. Предположим еще (если $\mathcal{M}$ наличествует), что

$$\exists \alpha > 0: \inf_{j \geq 1} |w'(i\mu_j)| \cdot |\mu_j|^\alpha > 0. \quad (5) \quad \{5\}$$

Тогда если $\mathcal{L}(\lambda)$ – ЦФЭТ с простыми вещественными нулями $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$: $\Lambda \cap \mathcal{N} = \emptyset$, то справедлива импликация: $1/|\mathcal{L}'(\lambda_k)| = O(|w(\lambda_k)|)$, $k \rightarrow +\infty$, $\implies \mathcal{L}$ – функция ВРР и $D(\mathcal{L})$ – отрезок мнимой оси.

Доказательству теоремы 2 предположим лемму, имеющую на наш взгляд, и самостоятельный интерес.

ЛЕММА. Пусть $w(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 с заменой условия (5) на более жесткое:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|w'(i\mu_j)|} < +\infty. \quad (6) \quad \{6\}$$

Тогда найдется относительно плотное по мере множество $S \subseteq \mathbb{R}$ такое, что

$$\inf_{\mu \in S} |w(i\mu)| > 0. \quad (7) \quad \{7\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Если нулевое множество функции w содержит $\mathcal{N}$, то, умножив w на соответствующую рациональную функцию, мы получим функцию класса $[1; 0]$ с простыми чисто мнимыми нулями, удовлетворяющую (6). Поэтому будем сразу предполагать, что множество $\mathcal{N}$ отсутствует, т.е.

$$w(\mu) = e^{a\mu+b} \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu}{i\mu_j}\right) e^{\frac{\mu}{i\mu_j}}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Введем функцию $w_0(\mu) := w(\mu)e^{-\mu \operatorname{Re} a}$. Легко видеть, что $|w_0(\mu)| \geq e^{\operatorname{Re} b} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$. Оценим на вещественной оси ЦФЭТ

$$\varphi(\mu) := \frac{1}{w_0(\mu)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w'_0(i\mu_j)(\mu - i\mu_j)}.$$

Для всех $\mu \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(\mu)| \leq \frac{1}{|w_0(\mu)|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|w'_0(i\mu_j)||\mu - i\mu_j|} \leq e^{-\operatorname{Re} b} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|w'_0(i\mu_j)||\mu_j|}.$$

Привлекая (6), получаем ограниченность $|\varphi(\mu)|$ на $\mathbb{R}$. Следовательно, $\varphi(\mu)$ – функция ВРР. Тогда из представления

$$\varphi(\mu)w_0(\mu) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_0(\mu)}{w'_0(i\mu_j)(\mu - i\mu_j)},$$

в котором правая часть есть ЦФЭТ $\psi(\mu)$ с $h(\psi; \theta) \leq h(w_0; \theta)$ для всех θ , выводим $h(\varphi; \theta) \equiv 0$. Итак, $\varphi \in [1; 0]$ и ограничена на $\mathbb{R}$, поэтому $\varphi \equiv c$. Имеем

$$\frac{1}{w_0(\mu)} = c + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{w'_0(i\mu_j)(\mu - i\mu_j)} \quad \text{для всех } \mu \notin \mathcal{M}.$$

Положим $S := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\mu \in \mathbb{R} : |\mu - \mu_j| < 1\}$. Из того, что плотность последовательности $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ равна нулю, немедленно следует, что S относительно плотно по мере на $\mathbb{R}$; при этом $\forall \mu \in S$

$$\frac{1}{|w_0(i\mu)|} \leq c + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|w'_0(i\mu_j)|} < +\infty,$$

что доказывает лемму ($|w_0(i\mu)| = |w(i\mu)| \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$).

ДОКАЖЕМ ТЕПЕРЬ ТЕОРЕМУ 2. Введем вспомогательную функцию

$$w_1(\lambda) := \frac{w(\lambda)(\lambda^{2s+1} - 1)}{\prod_{n=1}^N (\lambda - \nu_n)^{s_n}} \in [1; 0]$$

с нулями $\mathcal{M} \cup \{\xi_m\}_{m=1}^{2s+1}$, где ξ_m – все значения $^{2s+1}\sqrt{1}$, а $s \in \mathbb{N}$: $2s \geq \alpha + \sum_{n=1}^N s_n + 1$, α взято из условия (5). При этом

$$\frac{1}{|w'_1(i\mu_j)|} = O\left(\frac{1}{|\mu_j|^2}\right), \quad j \rightarrow +\infty,$$

что следует из выбора s и условия (5). Поскольку показатель сходимости $\mathcal{M}$ не превосходит 1, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|w'_1(i\mu_j)|} < +\infty.$$

Таким образом, функция $w_1(\lambda)$ удовлетворяет всем требованиям леммы. Найдем по лемме относительно плотное на $\mathbb{R}$ по мере множество S так, чтобы для функции $w_1(\lambda)$ выполнялось условие (7). Считая $\mathcal{L}(0) \neq 0$, представим функцию $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L}(\lambda) = e^{c+d\lambda} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}$$

и возьмем $\mathcal{L}_1(\lambda) = w_1(\lambda)e^{-\lambda i \operatorname{Im} d} \mathcal{L}(\lambda)$ – ЦФЭТ с простыми нулями $\{\xi_m\}_{m=1}^{2s+1} \cup \mathcal{M} \cup \Lambda$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathcal{L}'(\lambda_k)| |w(\lambda_k)| > 0$ и

$$\frac{1}{|w_1(\lambda_k)|} = O\left(\frac{1}{|w(\lambda_k)| |\lambda_k|^{\alpha+2}}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{L}'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|} &= \frac{1}{|\lambda_k| |w_1(\lambda_k)| |\mathcal{L}'(\lambda_k)|} \\ &= O\left(\frac{1}{|w(\lambda_k)| |\lambda_k|^{\alpha+3} |\mathcal{L}'(\lambda_k)|}\right) = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^{\alpha+3}}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathcal{L}'_1(\lambda_k)| |\lambda_k|} < +\infty. \quad (8) \quad \{8\}$$

Далее, из условия (7) для $w_1(\lambda)$ выводим ($\mu \in S$)

$$\frac{1}{|\mathcal{L}_1(i\mu)|} = \frac{e^{-\operatorname{Re} c}}{|w_1(i\mu)| \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + (\frac{\mu}{\lambda_k})^2}} = O(1),$$

т.е.

$$\inf\{|\mathcal{L}_1(i\mu)| : \mu \in S\} > 0. \quad (9) \quad \{9\}$$

Положим теперь

$$a(\lambda) := \sum_{m=1}^{2s+1} \frac{\mathcal{L}_1(\lambda)}{(\lambda - \xi_m) \mathcal{L}'_1(\xi_m)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_1(\lambda)}{(\lambda - i\mu_j) \mathcal{L}'_1(i\mu_j)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) \mathcal{L}'_1(\lambda_k)}.$$

Заметим, что в силу (6) для w_1 имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathcal{L}'_1(i\mu_j)|} < +\infty. \quad (10) \quad \{10\}$$

В самом деле, $|\mathcal{L}'_1(i\mu_j)| = |w'_1(i\mu_j)| e^{\mu_j \operatorname{Im} d} |\mathcal{L}(i\mu_j)| \geq e^{\operatorname{Re} c} |w'_1(i\mu_j)|$, $j \geq 1$. Привлекая еще (8), установим, что $a(\lambda)$ – ЦФЭТ с $h(a; \theta) \leq h(\mathcal{L}_1; \theta) \quad \forall \theta$. При этом $a(\lambda_k) = a(i\mu_j) = a(\xi_m) = 1$, $k, j \geq 1$, $m = 1, 2, \dots, 2s+1$, откуда $b(\lambda) := (a(\lambda) - 1)/\mathcal{L}_1(\lambda)$ – ЦФЭТ. Оценим $|b(i\mu)|$ при $\mu \in S$:

$$\begin{aligned} |b(i\mu)| &\leq \frac{1}{|\mathcal{L}_1(i\mu)|} + \sum_{m=1}^{2s+1} \frac{1}{|i\mu - \xi_m| |\mathcal{L}'_1(\xi_m)|} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|i\mu - \lambda_k| |\mathcal{L}'_1(\lambda_k)|} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu - \mu_j| |\mathcal{L}'_1(i\mu_j)|}. \end{aligned}$$

Первые три слагаемых ограничены сверху на S в силу (8) и (9).

Рассмотрим последнее слагаемое. На множестве S (см. доказательство леммы) $|\mu - \mu_j| \geq 1 \quad \forall j \geq 1$. Воспользовавшись (10), находим окончательно, что $|b(i\mu)|$ ограничен на S . Согласно известному результату Б. Я. Левина (см., например, [13]) $|b(\lambda)|$ ограничен на мнимой оси и, стало быть, $b(\lambda)$ – функция ВРР. Из соотношения $b(\lambda) \mathcal{L}_1(\lambda) = a(\lambda) - 1$ получаем $b(\lambda) \in [1; 0]$, откуда $b(\lambda) \equiv b$. Итак, установлено, что обратная величина целой функции $\mathcal{L}_1(\lambda)$ класса Картрайт допускает разложение вида

$$\frac{1}{\mathcal{L}_1(\lambda)} = -b + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda - \eta_k},$$

в котором $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – все нули $\mathcal{L}_1(\lambda)$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|/|\eta_k| < \infty$. По теореме М. Г. Крейна [1; с. 333] $\mathcal{L}_1(\lambda)$ – функция ВРР и $D(\mathcal{L}_1)$ – отрезок мнимой оси. Очевидно, $\mathcal{L}(\lambda)$ обладает теми же свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно привести примеры функций $w \in [1; 0]$, отличных от многочлена (это будет сделано ниже), удовлетворяющих предположениям доказанной теоремы, и получить для $|\mathcal{L}'(\lambda_k)|$ асимптотические неравенства, влекущие полную регулярность роста функции $\mathcal{L}(\lambda)$ из условия теоремы 2. Здесь возникает интересная и, по-видимому, трудная задача (на которую любезно обратил внимание автора А. Ю. Попов): довести результат теоремы 2 до неулучшаемого, или, другими словами, указать необходимые и достаточные условия на функцию $\Omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, обеспечивающие полную регулярность роста всякой ЦФЭТ $\mathcal{L}(\lambda)$ с простыми вещественными нулями λ_k со свойством $1/|\mathcal{L}'(\lambda_k)| = O(\Omega(\lambda_k))$, $k \rightarrow \infty$. Из цитированного во введении примера Братищева легко усмотреть необходимое условие такого рода: $\lim_{r \rightarrow \infty} (\ln \Omega(r))/|r| \leq 0$. Действительно, взяв какую-либо функцию $\Omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, не удовлетворяющую указанному условию, получим для произвольно зафиксированной последовательности $r = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел $\lim_{k \rightarrow \infty} (\ln \Omega(r_k))/|r_k| =: 2\beta_r > 0$. Тогда $e^{\beta_r |r_k|} = O(\Omega(r_k))$, $k \rightarrow \infty$. Как отмечалось выше (см. введение), существует функция $\mathcal{L} \in L_0$ вида (2), не являющаяся функцией ВРР. Тем не менее, равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = 0$$

дает

$$\frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = O(e^{\beta_r \lambda_k}) = O(\Omega(\lambda_k)), \quad k \rightarrow \infty.$$

В то же время достаточное условие выполнения нужной импликации, полученное в теореме 2, содержит неявно неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \Omega(r)}{|r|} \leq 0.$$

Устранение очевидного “зазора” и составляет содержание сформулированной задачи.

Приведем два простых примера функции $w(\lambda)$, удовлетворяющей требованиям теоремы 2.

ПРИМЕР 1. Пусть $\rho < 1$ и $\rho(r) (\rightarrow \rho$ при $r \rightarrow \infty)$ – уточненный по Валирону порядок. Выберем последовательность положительных чисел $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что $\mu_{j+1} - \mu_j > d\mu_j^{1-\rho(\mu_j)}$ при $d > 0$, $j \geq j_0$, и имеющую плотность $\Delta > 0$ при порядке $\rho(r)$. Очевидно, функция $w_1(\lambda) := \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda^2/\mu_j^2) \in [1; 0]$. Как известно [2; с. 46–49], при $0 < \theta < \pi$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |w_1(re^{i\theta})|}{r\rho(r)} = \frac{\pi\Delta \cos \rho(\theta - \frac{\pi}{2})}{\sin \frac{\pi\rho}{2}}$$

и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln |\frac{1}{w'_1(\mu_j)}|}{\mu_j^{\rho(\mu_j)}} = -\pi\Delta \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{2}.$$

Следовательно, $\exists \sigma > 0$: $\ln |w'_1(\mu_j)| > \sigma\mu_j^{\rho(\mu_j)} \forall j \geq j_0$. Функция $w(\lambda) := w_1(i\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

ПРИМЕР 2. $w_1(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda/j^2) = \sin \pi \sqrt{\lambda} / (\pi \sqrt{\lambda})$ – целая функция порядка $\rho = 1/2$, поэтому $w_1(\lambda) \in [1; 0]$. Легко подсчитать, что $|w'_1(\mu_j)| |\mu_j| = 1/2 \quad \forall j \geq 1$, где $\mu_j = j^2$. Функция $w(\lambda) := w_1(i\lambda)$ нужная. Если взять ЦФЭТ $\mathcal{L}(\lambda)$ с вещественными нулями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, то асимптотика

$$\frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = O(|w(\lambda_k)|), \quad k \rightarrow \infty,$$

принимает вид

$$\frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} = O\left(\frac{e^{\pi \sqrt{|\frac{\lambda_k}{2}|}}}{\sqrt{|\lambda_k|}}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

и влечет (по теореме 2) вполне регулярный рост функции $\mathcal{L}(\lambda)$.

4. В этом пункте изучается вопрос о наличии вполне регулярного роста у функции класса L . Сформулируем полученные результаты в виде сводной теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{L} \in L$ и имеет положительный индикатор $h(\mathcal{L}; \theta)$. Каждое из следующих дополнительных условий обеспечивает BPP $\mathcal{L}(\lambda)$:

- 1) $\exists C > 1: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(C + \frac{1}{|\mathcal{L}(x)|})}{1+x^2} dx < +\infty$;
- 2) $\exists \alpha: 0 < \alpha < 1, \exists E^0$ -множество E , являющееся объединением не более чем счетного числа интервалов с конечной суммой длин, такое, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ |x| \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(x)|}{|x|^\alpha} > -\infty;$$

- 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ |x| \notin E}} |\mathcal{L}(x)| |x|^\alpha > 0$ (α и E – как в условии 2));

- 4) обратная величина функции $\mathcal{L}(\lambda)$ допускает представление

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty;$$

ряд сходится поточечно на множестве $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия 1)–4), конечно, не являются независимыми. В самом деле, возможность разложения

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1,$$

в котором ряд простых дробей сходится в каждой точке $\lambda \notin \Lambda$, позволяет сразу оценить снизу $|\mathcal{L}(\lambda)|$ вне фиксированного множества кружков нулевой линейной плотности. Во-первых, из поточечной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k / (\lambda - \lambda_k)$ на $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ и условия $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ следует его равномерная сходимость внутри области $\mathbb{C} \setminus \Lambda$. Пусть последовательность чисел $r_m > 0$ такова, что окружности $\gamma_m = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \lambda_m| = r_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, не пересекаются и внутри γ_m нет других точек последовательности Λ , кроме λ_m . Тогда

$$\frac{1}{\mathcal{L}'(\lambda_m)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{d\lambda}{\mathcal{L}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2\pi i} \int_{\gamma_m} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_k} = a_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Предположим, что $\{k^2/\mathcal{L}'(\lambda_k)\}_{k=1}^\infty \in \ell^1$ (это, очевидно, выполняется для функции $\mathcal{L} \in L$ с $h(\mathcal{L}, \theta) > 0$). Из условия 4) получим $\forall \lambda \notin U = \bigcup_{k=1}^\infty \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda - \lambda_k| < 1/k^2\}$ цепочку неравенств

$$\frac{1}{|\mathcal{L}(\lambda)|} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{|a_k|}{|\lambda - \lambda_k|} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{k^2}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} =: \frac{1}{C} > 0.$$

Обозначим $E_1 = -(\mathbb{R}_- \cap U)$; $E_2 = \mathbb{R}_+ \cap U$; $E = E_1 \cup E_2$. Вне E^0 -множества E ($|x| \notin E$) на $\mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\mathcal{L}(x)| \geq C$, откуда подаловно имеем $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ |x| \notin E}} |\mathcal{L}(x)| |x|^\alpha = +\infty \quad \forall \alpha > 0$. Итак, в предположениях теоремы 3 4) $\Rightarrow$ 3). Проверим теперь, что для произвольной ЦФЭТ $\mathcal{L}(\lambda)$ выполнено 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1)'. Здесь 1)' получается из 1), если интегрирование вести по множеству $\mathbb{R} \setminus E$, $E = \bigcup_{k=1}^\infty (\alpha_k, \beta_k)$, $\sum_{k=1}^\infty (\beta_k - \alpha_k) < \infty$. Неравенство 3) влечет

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ |x| \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(x)|}{|x|^\alpha} \geq 0 > -\infty.$$

Далее, из 2) получим при некотором $\sigma > 0$ и всех $|x| \notin E$ $1/|\mathcal{L}(x)| \leq e^{\sigma|x|^\alpha}$.

Тогда при $C = e^\sigma > 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus E} \frac{\ln(C + \frac{1}{|\mathcal{L}(x)|})}{1+x^2} dx &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus E} \frac{\ln(C + e^{\sigma|x|^\alpha})}{1+x^2} dx < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(e^\sigma + e^{\sigma|x|^\alpha})}{1+x^2} dx \\ &= 2 \left[\int_0^1 \frac{\ln(e^\sigma + e^{\sigma x^\alpha})}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(e^\sigma + e^{\sigma x^\alpha})}{1+x^2} dx \right] \\ &\leq 2 \left[\int_0^1 \frac{\ln(2e^\sigma)}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(2e^{\sigma x^\alpha})}{1+x^2} dx \right] \\ &= 2 \left[\ln 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} + \sigma \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \sigma \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \right] \\ &< \pi \ln 2 + \sigma \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{1-\alpha} \right) =: M_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Заключение теоремы 3, как будет следовать из приводимого ниже доказательства, остается в силе, если заменить условие 1) на 1)'. Поскольку само доказательство почти не претерпевает изменений, то теорему 3, таким образом, достаточно установить при более естественном, нежели 1)', дополнительном предположении 1). Само условие 1) полезно сравнить с одним известным неравенством, имеющим место для произвольной ЦФЭТ [1; с. 296]:

$$\exists M_{\mathcal{L}} < +\infty: \forall R > 0 \quad \int_0^R \frac{\ln \frac{1}{|\mathcal{L}(x)| \cdot |\mathcal{L}(-x)|}}{1+x^2} dx < M_{\mathcal{L}}.$$

Известно также (частный случай теоремы 6 [7]), что всякая ЦФЭТ $\mathcal{L}$ с простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/|\lambda_k| \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| > -\infty$, удовлетворяет вне некоторой системы попарно непересекающихся кружков $|\lambda - \lambda_k| < r_k$, $\sum_{k=1}^\infty r_k < +\infty$, оценке: $\exists C_1, C_2 > 0: |\mathcal{L}(\lambda)| \geq C_1 \cdot \exp\{-C_2|\lambda|\}$, из которой легко следует:

$$2)' \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ |x| \notin E}} \frac{\ln |\mathcal{L}(x)|}{|x|} > -\infty$$

для некоторого E^0 -множества E (ср. с условием 2)).

Сформулируем, наконец, в виде отдельного утверждения содержащийся в теореме 3 аналог цитированного выше (см. доказательство теоремы 2) результата М. Г. Крейна о разложении обратной величины целой функции класса Картрайт.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть обратная величина ЦФЭТ $\mathcal{L}$ с простыми нулями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и положительным индикатором $h(\mathcal{L}; \theta)$ допускает разложение “типа М. Г. Крейна”:

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda,$$

коэффициенты a_k которого подчинены неравенству

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k|} \ln |a_k| - h(\mathcal{L}, \arg \lambda_k) \right\} \geq 0.$$

Тогда $\mathcal{L}$ – функция ВРР.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Следуя схеме доказательства теоремы В (см. [3; с. 307–309]), возьмем выпуклую область G с опорной функцией $h(-\theta)$ и рассмотрим аналитическую в G (при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$) функцию

$$\psi(\lambda, z) = \frac{e^{\lambda z}}{\mathcal{L}(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

В [3] отмечено, что $\psi(\lambda, z)$ является по λ ЦФЭТ (если зафиксировать $z \in G$). Кроме того, можно подобрать лежащий в G отрезок K , числа $\delta > 0$ и $A > 1$ так, чтобы для всех вещественных x вне объединения U кружков $U_k = \{\lambda: |\lambda - \lambda_k| < e^{-\delta|\lambda_k|}\}$ и всех $z \in K$ выполнялось неравенство

$$|\psi(x, z)| \leq \frac{1}{|\mathcal{L}(x)|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{|\lambda_k|(h_K(\arg \lambda_k) + \delta)}}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} \leq \frac{1}{|\mathcal{L}(x)|} + A. \quad (11) \quad \{12\}$$

Здесь $h_K(-\theta)$ обозначает опорную функцию компакта K . Можно считать, что $A \leq C$ (при $A > C$ все последующие рассуждения проходят для функции $(C/A)\psi(x, z)$). Покажем, что $\forall z \in K \exists C_z < \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln_+ |\psi(x, z)|}{1 + x^2} dx \leq C_z. \quad (12) \quad \{12\}$$

Из (11) следует

$$\ln_+ |\psi(x, z)| \leq \ln \left(\frac{1}{|\mathcal{L}(x)|} + A \right) \leq \ln \left(\frac{1}{|\mathcal{L}(x)|} + C \right) \quad \forall z \in K, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus U.$$

На множестве $\mathbb{R} \cap U$ (если оно не пусто) функция $\psi(\lambda, z)$ удовлетворяет оценке $\ln_+ |\psi(x, z)| \leq \sigma_z \cdot |x|$ ($0 < \sigma_z < +\infty \quad \forall z \in K$). Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\delta|\lambda_k|} < +\infty$ и $|x|/(1 + x^2) \leq 1/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, то, привлекая условие 1) теоремы 3, получаем нужное. Согласно теореме Картрайт [1; с. 315] при каждом $z \in K \psi(\lambda, z)$ в силу (12) является

(по λ) функцией вполне регулярного роста. Последнее обстоятельство позволяет из представления ($z \in K$)

$$\psi(\lambda, z)\mathcal{L}(\lambda) = e^{\lambda z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(\lambda_k)e^{\lambda_k z}}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)} \quad (13) \quad \{13\}$$

вывести $\forall \theta \in [0, 2\pi)$ следующее неравенство для индикаторов: $h_z(\psi, \theta) + h(\mathcal{L}, \theta) \leq h(\mathcal{L}, \theta)$. Итак, $\forall z \in K$ $\psi(\lambda, z) \in [1; 0]$ и поэтому $\forall \epsilon > 0 \exists B_{z, \epsilon} < +\infty$: $|\psi(\lambda, z)| \leq B_{z, \epsilon} e^{\epsilon|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Отрезок K можно взять таким: $[-ia, ia]$, $a > 0$. Положив в (13) $z = ia$, $\lambda = -ix$, $x \in \mathbb{R}_+ \setminus U$, имеем с некоторыми константами $B_a, C_a < +\infty$ неравенство $B_a e^{\frac{a}{2}x} |\mathcal{L}(-ix)| \geq e^{ax} - C_a |\mathcal{L}(-ix)|$, откуда $|\mathcal{L}(-ix)| \geq D_a e^{ax/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus U$. Аналогичное неравенство $|\mathcal{L}(ix)| \geq \tilde{D}_a e^{\frac{a}{2}x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus U$, выводится из (13) при $z = -ia$. Значит, на мнимой оси имеется относительно плотное по мере множество S , для которого $\lim_{\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in S} |\mathcal{L}(\lambda)| = +\infty$. Доказательство заканчивается применением теоремы В.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [2] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [3] В. Б. Шерстюков, “Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент”, *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 301–313.
- [4] А. Ф. Леонтьев, “Об условиях разрешимости аналитических функций в ряды Дирихле”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:6 (1972), 1282–1295.
- [5] Ю. Ф. Коробейник, “Представляющие системы”, *УМН*, **36**:1 (1981), 73–126.
- [6] А. В. Абанин, *Достаточные множества и абсолютно представляющие системы*, Дисс. . . . д.ф.-м.н., Екатеринбург, 1995.
- [7] А. В. Братищев, “Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:3 (1984), 451–475.
- [8] Ю. Ф. Коробейник, “Максимальные и γ -достаточные множества. Приложения к целым функциям. 2”, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, **55**, Харьков, 1991, 23–34.
- [9] В. Б. Шерстюков, “К вопросу о γ -достаточных множествах”, *Сиб. матем. ж.*, **41**:4 (2000), 935–943.
- [10] Ю. И. Мельник, “О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле”, *Исследование по теории приближений функций и их приложения*, Киев, 1978, 132–141.
- [11] А. В. Братищев, “К одной задаче А. Ф. Леонтьева”, *Докл. АН СССР*, **270**:2 (1983), 265–267.
- [12] А. Ю. Попов, “Точная оценка индекса конденсации”, *Mathematica Montisnigri*, **11** (1999), 67–103.
- [13] Б. Я. Левин, “Почти периодические функции с ограниченным спектром”, *Актуальные вопросы математического анализа*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1978, 112–124.

В. Б. Шерстюков

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию

24.03.2005

Исправленный вариант

24.10.2005