КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ СВЯЗЬЮ

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Введение

В работе [1] была рассмотрена задача о движении динамически симметричного уравновешенного круглого диска по горизонтальной поверхности, покрытой гладким льдом. Последнее означает, что на систему наложена неголономная связь – скорость точки касания диска параллельна его горизонтальному диаметру. В [1] были получены явные квадратуры, показано, что диск почти никогда не упадет на плоскость, а точка касания в общем случае совершает сложное движение – она движется периодически по замкнутой аналитической кривой, которая вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки.

В работе [2] были изучены стационарные движения диска по горизонтальному льду и их устойчивость. В [3] была изучена вероятность падения и указаны частные решения уже неинтегрируемой задачи о движении диска по ледяной плоскости, наклоненной к горизонту. Используя наличие инвариантной меры и применяя теорему Шварцшильда–Литтлвуда [4], установлено, что множество траекторий падения диска имеет меру нуль (но не является пустым).

В работе [5] поставлен вопрос о вероятности падения круглого диска при наличии динамической несимметрии. В этом случае для уравнений не удастся найти инвариантную меру (видимо, она не существует) и теорема Шварцшильда–Литтлвуда не применима. Мы в этой работе показываем, что при скольжении по ледяной сфере в поле тяжести диска, центр масс которого произвольно располагается на оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, инвариантная мера существует. Это приводит к нулевой мере траекторий падения. При движении по инерции задача является интегрируемой и удается получить решение в квадратурах.

1. Уравнения движения и инвариантная мера

Пусть тело с острым краем в форме окружности движется по поверхности сферы, покрытой льдом. Это означает, что точка касания окружности со сферой не может двигаться (проскальзывать) в направлении, перпендикулярном плоскости окружности. Будем также предполагать, что центр масс системы располагается на оси симметрии окружности и отстоит от ее плоскости на расстояние b .

Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ”, грант № НШ 136.2003.1, при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-05-64367, 05-01-01058, фонда CRDF, грант RU-M1-2583-MO-04, и INTAS, грант № 04-80-7297.

Свяжем с телом систему координат $Cx_1x_2x_3$ с началом в центре масс; тогда уравнения связей можно представить в форме

$$f_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{r}) = 0, \quad f_2 = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \mathbf{e}_3) = 0, \quad (1) \quad \{1\}$$

где $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ – скорость центра масс и угловая скорость тела, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки контакта в системе координат $Cx_1x_2x_3$, $\mathbf{e}_3$ – вектор нормали к плоскости окружности.

Записывая уравнения Пуанкаре–Суслова с неопределенными множителями Лагранжа [6], уравнения движения представим в форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) \cdot &= \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{F}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) \cdot &= \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (2) \quad \{2\}$$

где λ_i – неопределенные множители, $\mathbf{F}$, $\mathbf{K}$ – внешняя сила и момент, действующие на тело, T – кинетическая энергия тела без учета связей:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}).$$

Эти (динамические) уравнения необходимо дополнить кинематическим уравнением, которое получается, если вычислить скорость точки контакта двумя различными способами:

$$R_s \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times R_s \boldsymbol{\gamma} = \mp \dot{\mathbf{r}}, \quad (3) \quad \{3\}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – нормаль к сфере в точке контакта (в направлении тела), R_s – радиус сферы, верхний знак соответствует внутреннему обкату, а нижний – внешнему. Радиус-вектор точки контакта в выбранной системе координат выражается через нормаль $\boldsymbol{\gamma}$ по формулам

$$\mathbf{r} = \left(-\frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}, -\frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}, -b \right).$$

Исключая неопределенные множители с помощью уравнений связей (1), получим замкнутую систему для переменных $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Тем не менее, удобнее записать уравнения движения в других переменных:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_2 &= \sin \theta \cos \varphi, & \gamma_3 &= \cos \theta, \\ v_\sigma &= \frac{v_1 \gamma_2 - v_2 \gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}, & v_\tau &= -\frac{v_1 \gamma_1 + v_2 \gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}, \\ \omega_\sigma &= \frac{\omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}, & \omega_\tau &= -\frac{\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}. \end{aligned} \quad (4) \quad \{4\}$$

Эти переменные имеют ясный физический смысл: θ , φ – сферические углы вектора нормали, v_σ , ω_σ – проекции векторов $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$ на ось, лежащую в плоскости векторов окружности, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{\gamma}$, v_τ , ω_τ – проекции вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на ось, лежащую в плоскости окружности вектора.

Уравнения связей (1) в новых переменных принимают вид

$$v_3 = R \omega_\sigma, \quad v_\tau = b \omega_\tau;$$

тем самым уравнения, описывающие эволюцию v_3 , v_τ , исключаются с помощью неопределенных множителей. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_\sigma, & \dot{\varphi} &= \frac{\omega_3 \sin \theta + \omega_\tau \cos \theta}{k - \sin \theta}, & I_3 \dot{\omega}_3 &= K_3, \\ I_1 \dot{\omega}_\tau &= \frac{\omega_\sigma (I_1 \omega_\tau \cos \theta + I_3 \omega_3 \sin \theta + k(I_1 - I_3) \omega_3)}{k - \sin \theta} - K_1 \sin \varphi - K_2 \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I_1 + m(R^2 + b^2))\dot{\omega}_\sigma &= I_3\omega_3\omega_\tau - mRv_\sigma\omega_\tau + \frac{(k\omega_3 + \omega_\tau \cos \theta)(I_1\omega_\tau - mbv_\sigma)}{k - \sin \theta} \\
&\quad + K_1 \cos \varphi - K_2 \sin \varphi + RF_3 - b(F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi), \\
m\dot{v}_\sigma &= m\omega_\sigma \left(R\omega_\tau + \frac{b(k\omega_3 + \omega_\tau \cos \theta)}{k - \sin \theta} \right) + F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi,
\end{aligned} \tag{5} \quad \{5\}$$

где $k = R/R_s$.

Если внешняя сила и момент не зависят от скорости $\mathbf{v}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, то уравнения (5) допускают инвариантную меру $\rho dv_\sigma d\omega_\sigma d\omega_\tau d\omega_3 d\theta d\varphi$ с плотностью

$$\rho = \sin \theta - k. \tag{6} \quad \{6\}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если на тело действует поле тяжести, то в уравнениях (2) внешняя сила записывается в форме $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, где $\mathbf{g}$ — фиксированный в пространстве вектор (определяющий ускорение свободного падения). В этом случае уравнения движения необходимо дополнить уравнением Пуассона

$$\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega},$$

описывающим эволюцию $\mathbf{g}$ в подвижных осях. Как несложно показать, полная система уравнений также обладает инвариантной мерой с плотностью (6).

2. Интегрируемые случаи

Рассмотрим подробнее некоторые частные случаи системы (5), для которых решение может быть получено в квадратурах.

2.1. Движение диска по плоскости в поле тяжести. В этом случае $R_s \rightarrow \infty$, т.е. в уравнениях (5) необходимо положить $k = 0$, а внешняя сила и момент

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}\boldsymbol{\gamma} = (mg \sin \theta \sin \varphi, mg \sin \theta \cos \varphi, mg \cos \theta), \quad \mathbf{K} = 0.$$

Как уже было указано во введении, случай уравновешенного диска ($b = 0$) был проинтегрирован и изучен в работе [1].

Укажем первые интегралы системы в случае $b \neq 0$, обобщающем [1], с помощью которых несложно представить решения в виде квадратур:

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= \text{const}, \quad M_z = (I\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = I\omega_3 \cos \theta - I_1\omega_\tau \sin \theta = \text{const}, \\
\Phi &= \frac{I_1 v_\sigma}{R} - I_3\omega_3 \ln \sin \theta + M_z \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{b}{R}(I_1\omega_\tau + I_3\omega_3\theta) = \text{const}, \\
E &= \frac{1}{2}mv_\sigma^2 + \frac{1}{2}(I_1\omega_\tau^2 + (I_1 + m(R^2 + b^2))\omega_\sigma^2 + I_3\omega_3^2) + mg(R \sin \theta + b \cos \theta) = \text{const}.
\end{aligned} \tag{7} \quad \{7\}$$

Выражая из первых трех интегралов v_σ , ω_τ , ω_3 через θ и константы интегралов и подставляя в последний интеграл (энергию системы), мы получим для $\omega_\sigma = \dot{\theta}$ единственную квадратуру, определяющую поведение угла нутации.

2.2. Свободное движение по поверхности сферы. В этом случае $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{F} = 0$; при $b = 0$ этот случай был рассмотрен в работе [7], где приведено обобщение интегралов (2), но не было установлено существование инвариантной меры (6).

Интегралы, аналогичные (7), в этом случае выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= \text{const}, \quad M_\theta = I_3\omega_3 \cos \theta - I_1(\sin \theta - k)\omega_\tau - k(I_1 - I_3)\omega_3\theta, \\
\Phi &= \frac{I_1 v_\sigma}{R} - I_3\omega_3 \ln(\sin \theta - k) + M_\theta \ln \left| \frac{1 - k \tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{1 - k^2}}{1 - k \tan \frac{\theta}{2} + \sqrt{1 - k^2}} \right| \\
&\quad + \frac{b}{R}(I_1\omega_\tau + I_3\omega_3\theta) + k(I_1 - I_3)\omega_3 \int^\theta \frac{\xi d\xi}{\sin \xi - k}, \\
E &= \frac{1}{2}mv_\sigma^2 + \frac{1}{2}(I_1\omega_\tau^2 + (I_1 + m(R^2 + b^2))\omega_\sigma^2 + I_3\omega_3^2) = \text{const}.
\end{aligned} \tag{8} \quad \{8\}$$

Как и в случае плоскости, несложно получить отсюда квадратуру для угла нутации $\dot{\theta} = \omega_\sigma$. Здесь мы представили интегралы в случае внутреннего обката сферы, когда $0 < k = R/R_s < 1$. При этом область допустимых значений угла нутации θ определяется неравенством

$$\sin \theta > k.$$

Ясно, что значения θ , удовлетворяющие уравнению $\sin \theta = k$, соответствуют моментам падения диска на сферу (диск касается сферы в двух диаметрально противоположных точках). Используя наличие инвариантной меры (6) и теоремы из [3], [4], можно установить нулевую вероятность падения диска на сферу (даже при наличии поля тяжести).

Интегралы (8) обобщаются на случай, когда $\mathbf{K} = 0$ и на тело действует потенциальная сила вида

$$\mathbf{F} = f(\theta)\boldsymbol{\gamma},$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ – нормаль к обкатываемой сфере. В этом случае первые три интеграла в (8) остаются без изменений, а к энергии E нужно добавить соответствующий потенциал.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Козлов, Н. Н. Колесников, *ПММ*, **42:1** (1978), 28–33. [2] А. П. Маркеев, *Изв. АН СССР. Мех. тв. тела*, 1986, № 4, 16–20. [3] В. В. Козлов, *Изв. РАН. Мех. тв. тела*, 1996, № 5, 29–35. [4] К. Л. Зигель, *Лекции по небесной механике*, Изд-во ИЛ, М., 1959. [5] А. А. Афонин, В. В. Козлов, *Изв. РАН. Мех. тв. тела*, 1997, № 1, 7–13. [6] Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, ГТТИ, М., 1947. [7] A. G. Kholmskaya, *Reg. & Chaot. Dyn.*, **3:2** (1998), 74–81.

А. В. Борисов

Институт компьютерных исследований, Удмуртский
государственный университет
E-mail: borisov@rcd.ru

Поступило

03.10.2005

И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований, Удмуртский
государственный университет
E-mail: mamaev@rcd.ru