Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Костенко, О подобии самосопряженному некоторым J -неотрицательных операторов, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 1, 135–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2789>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 02:19:27

О ПОДОБИИ САМОСОПРЯЖЕННОМУ НЕКОТОРЫХ J -НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. С. Костенко

1. Введение. Пусть $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ – неотрицательная функция на $\mathbb{R}$ такая, что $\omega(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\omega(x) > 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Обозначим через $L^2(\mathbb{R}, \omega)$ гильбертово пространство измеримых функций, квадратично суммируемых на оси с весом $\omega(x)$; внутреннее произведение функций $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \omega)$ определяется обычным образом: $(f, g)_\omega = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\omega(t) dt$. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R}, \omega)$ линейный оператор

$$L_\omega = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\omega(x)} \frac{d^2}{dx^2}, \quad \operatorname{dom}(L) = \{f \in L^2(\mathbb{R}, \omega) : f, f' \in W^1_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}), L_\omega f \in L^2(\mathbb{R}, \omega)\}. \quad (1) \quad \{1\}$$

В заметке изучается вопрос о подобии самосопряженному оператору L_ω . Напомним, что операторы A_1 и A_2 , действующие в B -пространстве X с областями определения $\operatorname{dom}(A_1)$ и $\operatorname{dom}(A_2)$ называют *подобными*, если найдется ограниченный и ограниченно обратимый оператор T в пространстве X такой, что $T(\operatorname{dom}(A_1)) = \operatorname{dom}(A_2)$ и $A_2 = TA_1T^{-1}$.

Впервые подобие несамосопряженного оператора L_ω вида (1) самосопряженному было установлено Б. Чургусом и Б. Найманом [1] (случай $\omega(x) = 1$), а также А. Фляйге и Б. Найманом [2] ($\omega(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > -1$) при помощи теории Крейна–Лангера дефинизируемых операторов в пространствах Крейна. Затем эти результаты обобщались во многих работах (см. [3]–[7], а также библиографию в них). Так, в работах [3] и [5] получен критерий подобия самосопряженному или нормальному оператору в терминах величины взаимодействия c для операторов, задаваемых в $L^2(\mathbb{R}, |x|^\alpha)$ дифференциальным выражением

$$l_c := \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + c\delta \right), \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (2) \quad \{2\}$$

В работах М. М. Фаддеева, Р. Г. Штеренберга [6] и И. М. Карабаша, М. М. Маламуда [4] получены достаточные условия подобия самосопряженному для операторов Штурма–Лиувилля

$$A_q := \operatorname{sgn} x \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3) \quad \{3\}$$

соответственно с быстроубывающим и конечнозонным потенциалами $q(\cdot)$. Фаддеев и Штеренберг в [7] получили следующее достаточное условие подобия оператора L_ω вида (1) самосопряженному.

ТЕОРЕМА 1 [7]. Пусть $\omega(x) = p(x)|x|^\alpha$, $\alpha > -1$, а функция $p(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ вместе со своей первой производной и удовлетворяет двусторонней оценке $0 < c \leq p(x) \leq C < \infty$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть также выполнены условия

$$\int_{\mathbb{R}_\pm} \frac{|x|^\alpha |p(x) - c_\pm|}{(|x|^{\alpha/2} + 1)^{\operatorname{sgn} \alpha}} dx < \infty, \quad c_\pm > 0, \quad (4) \quad \{4\}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|3(u''(x))^2/u'(x) - 2u'''(x)|}{(u'(x))^2(|u(x)|^{\alpha/2} + 1)^{\operatorname{sgn} \alpha}} dx < \infty, \quad (5) \quad \{5\}$$

где $u(x)$ определяется следующим образом:

$$u(x) := \operatorname{sgn} x \left(\left| \frac{\alpha + 2}{2} \int_0^x \sqrt{p(t)} |t|^{\alpha/2} dt \right| \right)^{2/(2+\alpha)}.$$

Тогда оператор L_ω подобен самосопряженному.

Основным результатом данной заметки является теорема 4. Используя теорию Крейна–Лангера дефинизируемых операторов (см. [8]), а также резольвентный критерий Набоко–Маламуда подобия самосопряженному ([9], [10]), мы покажем, что требования на функцию $p(\cdot)$ можно ослабить. А именно, для подобия оператора L_ω самосопряженному достаточно выполнения неравенства (4) и непрерывности функции $p(\cdot)$ в окрестности нуля (см. следствие 1).

2. О струне Крейна. Пусть $\omega_+(x) := \omega(x)$, $x > 0$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\int_{\mathbb{R}_+} t^2 \omega_+(t) dt = \infty$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, \omega_+)$ минимальный оператор, который соответствует струне Крейна S с плотностью распределения масс $\omega_+(x)$,

$$L_0^S := -\frac{d^2}{dm(x)dx}, \quad m(x) = \int_0^x \omega_+(t) dt; \quad (6) \quad \{6\}$$

$$\text{dom}(L_0^S) = \{f \in L^2(\mathbb{R}_+, \omega_+) : f, f' \in W_{1,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+), f(0) = f'(0) = 0, L_0^S f \in L^2(\mathbb{R}_+, \omega_+)\}.$$

Следуя [4], обозначим через $\varphi(x, \lambda)$ решение уравнения

$$-\frac{d^2 u(x)}{dm(x)dx} - \lambda u(x) = 0, \quad x > 0, \quad (7) \quad \{7\}$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Через $\psi(x, \lambda)$ обозначается решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Заметим, что в данном случае существует предел (см. [11])

$$M_{\omega_+}(\lambda) := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x, \lambda)}{\varphi(x, \lambda)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi'(x, \lambda)}{\varphi'(x, \lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad (8) \quad \{8\}$$

называемый *коэффициентом динамической податливости струны*. Функция $M_{\omega_+}(\cdot)$ принадлежит классу Крейна–Стилтеса, т.е. допускает интегральное представление

$$M_{\omega_+}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\tau_{\omega_+}(s)}{s - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{+\infty} \frac{d\tau_{\omega_+}(s)}{1 + s} < +\infty. \quad (9) \quad \{9\}$$

Здесь $\tau_{\omega_+}(\cdot)$ – неубывающая функция, заданная на промежутке $[0, +\infty)$.

Определим $\lambda^{1/(2+\alpha)}$ как ветвь многозначной аналитической функции на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_-$, выделяемую условием $(-1 + i0)^{1/(2+\alpha)} = e^{i\pi/(2+\alpha)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [5]. Если $\omega_+(x) = x^\alpha$, $\alpha > -1$, то коэффициент динамической податливости $M_{\omega_+}(\cdot)$ струны L_0^S вида (6) равен

$$M_{\omega_+}(\lambda) = M_\alpha(\lambda) := \frac{A_\alpha}{(-\lambda)^{1/(2+\alpha)}}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad (10) \quad \{10\}$$

где $A_\alpha := M_\alpha(-1) > 0$.

Далее, используя предложение 1, при помощи стандартных рассуждений мы можем получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть L_0^S оператор вида (6) и $\omega_+(x) = p(x)x^\alpha$, $\alpha > -1$. Если функция $p(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} \frac{|t|^\alpha |p(t) - c_+|}{(|t|^{|\alpha|/2} + 1)^{\text{sgn } \alpha}} dt < \infty, \quad c_+ > 0, \quad (11) \quad \{11\}$$

с некоторой константой c_+ , то

$$M_{\omega_+}(\lambda) = M_\alpha(\lambda)(c_+ + \bar{o}(\lambda^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}})) = \frac{A_\alpha}{(-\lambda)^{1/(2+\alpha)}}(c_+ + \bar{o}(\lambda^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}})), \quad |\lambda| \rightarrow 0. \quad (12) \quad \{12\}$$

В дальнейшем функция $M_{\omega_-}(\cdot)$ будет обозначать коэффициент динамической податливости струны S с плотностью распределения масс $\omega_-(x) := \omega(-x)$, $x > 0$.

3. О подобии оператора L_ω самосопряженному. Пусть J – оператор в $L^2(\mathbb{R}, \omega)$ вида

$$(Jf)(x) := \operatorname{sgn} x f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что J – унитарный оператор в $L^2(\mathbb{R}, \omega)$. Рассмотрим пространство Крейна $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \tilde{\omega})$ с внутренним произведением $[\cdot, \cdot]_{\tilde{\omega}} = (J\cdot, \cdot)_\omega$. Здесь $\tilde{\omega} := J\omega$. Тогда J – это фундаментальная симметрия в пространстве Крейна $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \tilde{\omega})$. Заметим, что

$$[L_\omega f, f]_{\tilde{\omega}} = (JL_\omega f, f)_\omega > 0, \quad f \in \operatorname{dom}(L_\omega), \quad f \neq 0. \quad (13) \quad \{13\}$$

Справедлива следующая лемма

ЛЕММА 1. *Оператор L_ω вида (1) является положительным дефинизируемым оператором в пространстве Крейна $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}, \tilde{\omega})$ и*

$$\sigma(L_\omega) \subset \mathbb{R}. \quad (14) \quad \{14\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность оператора L_ω в пространстве $L^2(\mathbb{R}, \tilde{\omega})$ вытекает из (13). Для того, чтобы установить дефинизируемость, достаточно доказать, что резольвентное множество оператора L_ω не пусто.

Воспользовавшись тем фактом, что оператор L_ω является почти разрешимым (в смысле [12]) расширением симметрического оператора, можно получить простое описание комплексного спектра оператора L_ω . А именно,

$$\lambda \in \sigma(L_\omega) \setminus \mathbb{R} \quad \text{точно тогда, когда} \quad M_{\omega_+}(\lambda) + M_{\omega_-}(-\lambda) = 0. \quad (15) \quad \{15\}$$

Учитывая тот факт, что $M_{\omega_\pm}(\lambda)$ являются функциями класса S , и анализируя их поведение в окрестности вещественной оси, нетрудно доказать существование такого $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$, что $M_{\omega_+}(\lambda_0) + M_{\omega_-}(-\lambda_0) \neq 0$. Следовательно, $\lambda_0 \in \rho(L_\omega)$. Теперь соотношение (14) является следствием дефинизируемости J -неотрицательного оператора L_ω (см. [8]).

Дефинизируемые операторы в пространствах Крейна обладают спектральной функцией (см. подробности в [8]), свойства которой отличны от свойств спектральной функции самосопряженного оператора лишь в окрестности так называемых критических точек.

Если в окрестности критической точки спектральная функция дефинизируемого оператора ограничена, то такая точка называется *регулярной*. В противном случае эта точка называется *сингулярной* критической точкой. Критическими точками неотрицательных дефинизируемых операторов могут быть только нуль и бесконечность.

Известно (см., например, [3]), что для неотрицательных дефинизируемых операторов с тривиальным ядром подобие самосопряженному эквивалентно регулярности его критических точек.

Вопросу о регулярности критической точки “ ∞ ” посвящено много работ (см. [13] и приведенную там библиографию). Нам понадобится следующий факт (см. теорему 3.6, а также замечание 3.3 в [13]).

ТЕОРЕМА 3 [13]. *Пусть оператор L_ω имеет вид (1), $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\omega(x) > 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Если функция $\omega(\cdot)$ абсолютно непрерывна в некоторой проколотой окрестности нуля B_0 , и существуют числа $s_+ > 0$ и $s_- > 0$, $s_\pm \neq 1$, такие, что*

$$\lim_{\pm x \rightarrow +0} \frac{\omega(x)}{\omega(s_\pm x)} \neq s_\pm, \quad \left(\frac{\omega(x)}{\omega(s_\pm x)} \right)' \in L^\infty(B_0^\pm), \quad (16) \quad \{16\}$$

то бесконечность является регулярной критической точкой.

Отметим, что нуль действительно является критической точкой оператора L_ω , так как $x \notin L^2(\mathbb{R}_\pm, \omega_\pm)$ и, следовательно, нуль принадлежит непрерывному спектру оператора L_ω .

Используя теорему 3, спектральное представление неотрицательных дефинизируемых операторов, а также резольвентный критерий подобия Набоко–Маламуда [9], [10], мы выводим из теоремы 2 следующее достаточное условие регулярности критической точки нуль.

Представим функцию $\omega \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$\omega(x) := \begin{cases} p(x)|x|^{\alpha_+}, & x > 0, \\ p(x)|x|^{\alpha_-}, & x < 0, \end{cases} \quad \alpha_\pm > -1. \quad (17) \quad \{17\}$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор L_ω определен соотношениями (1) и (17), а функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда для регулярности критической точки нуль, а значит и для подобия оператора L_ω самосопряженному, достаточно, чтобы

$$\int_1^{+\infty} |t|^{\alpha_+/2} |p(t) - c_+| dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^{-1} |t|^{\alpha_-/2} |p(t) - c_-| dt < \infty, \quad c_\pm > 0, \quad (18) \quad \{18\}$$

с некоторыми константами c_+ и c_- .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $\omega(\cdot)$ имеет вид (17), а неотрицательная функция $p(\cdot)$ непрерывно дифференцируема в некоторой проколотой окрестности нуля B_0 , удовлетворяет условиям (18) и $p(\pm 0) \neq 0$. Тогда оператор L_ω подобен самосопряженному.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Маламуду за руководство работой, а также И. М. Карабашу за многочисленные полезные обсуждения и замечания.

Часть этой работы была проделана автором в Ягелонском университете (г. Краков), в связи с чем хочется упомянуть поддержку Фонда королевы Ядвиги.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ćurgus, B. Najman, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 1125–1128. [2] A. Fleige, B. Najman, “Nonsingularity of critical points of some differential and difference operators”, *Oper. Theory Adv. and Appl.*, **102**, Birkhäuser, Basel, 1998, 85–95. [3] И. М. Карабаш, А. С. Костенко, *Матем. заметки*, **74**:1 (2003), 127–131. [4] И. М. Карабаш, М. М. Маламуд, *Докл. РАН*, **395**:3 (2004), 303–307. [5] А. С. Костенко, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 147–151. [6] М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, “О подобии некоторых сингулярных дифференциальных операторов самосопряженным”, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **270** (2000), 336–349. [7] М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг, *Матем. заметки*, **72** (2002), 292–303. [8] H. Langer, “Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces”, *Functional analysis. Proceedings (Dubrovnik 1981)*, Lecture Notes in Math., **948**, 1982, 1–46. [9] С. Н. Набоко, *Функцион. анализ и его прилож.*, **18**:1 (1984), 16–27. [10] М. М. Маламуд, *Укр. матем. ж.*, **37**:1 (1985), 49–56. [11] И. С. Кац, М. Г. Крейн, “О спектральных функциях струны”, *Дополнение II к книге Ф. Аткинсона “Дискретные и непрерывные задачи”*, Мир, М., 1968. [12] В. А. Деркач, М. М. Маламуд, “Расширение теории эрмитовых операторов и проблема моментов”, *Анализ 3. Итоги науки и техники. Современ. матем. и ее прилож.*, **5**, ВИНТИ, М., 1993. [13] В. Ćurgus, H. Langer, *J. Diff. Eqs.*, **79** (1989), 31–61.

А. С. Костенко

Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: duzer80@mail.ru, duzer@skif.net

Поступило

02.01.2006