Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Тур, Асимптотика собственных значений для одного класса матриц Якоби с предельным точечным спектром, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 449–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:15:35

УДК 517.984.5, 512.643.5

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЦ ЯКОБИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

Э.А. Тур

В статье рассмотрен класс матриц Якоби с очень быстро убывающими весами. Показано, что функция Вейля (матричный элемент резольвенты оператора) для рассматриваемого класса представима в виде отношения двух целых трансцендентных функций нулевого порядка. При этом коэффициенты разложения этих функций в ряд Тейлора пропорциональны производящим функциям числа решений в целых числах определенных диофантовых уравнений. Найдена асимптотическая оценка собственных значений.

Библиография: 8 названий.

Введение. В статье рассматривается класс матриц Якоби вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & 0 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad b_{n-1} = q^{n^s}, \quad 0 < q < 1, \quad s = 1, 2, \dots,$$

с нулевой главной диагональю и весами b_n . Якобиева матрица с такими элементами определяет ограниченный самосопряженный оператор A , действующий в пространстве последовательностей l_2 . Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, по теореме М. Г. Крейна [1] оператор A является вполне непрерывным и, следовательно, его спектр имеет единственную предельную точку $\lambda = 0$. Спектр оператора A полностью определяется функцией Г. Вейля $R(\lambda)$:

$$R(\lambda) = (e_0, R_\lambda e_0) = (e_0, (A - \lambda E)^{-1} e_0),$$

где R_λ – резольвента оператора A , а e_0 – первый вектор базиса, в котором оператор A представлен якобиевой матрицей.

В работе показано, что для указанного выше класса матриц функция $R(\lambda)$ представима в виде отношения двух целых трансцендентных функций переменной λ^{-2} , т.е.

$$R(\lambda) = -\frac{f_1(\lambda^{-2})}{\lambda f_2(\lambda^{-2})},$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – целые функции нулевого порядка (первого порядка и минимального типа).

Таким образом, исследование поведения собственных значений $\pm \lambda_n$ ($\lambda_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$) оператора A сводится к изучению нулей функции $f_2(z)$, что и сделано в настоящей работе. Результат можно представить в виде следующей асимптотической оценки:

$$b_{2n+1} < \lambda_n < b_{2n-1}, \quad n > N,$$

где N – достаточно большое целое число.

1. Функция Вейля как предел отношения двух полиномов. Рассмотрим функцию Вейля $R(\lambda)$ для якобиевой матрицы общего вида

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & g b_0 & 0 & 0 & \dots \\ g b_0 & a_1 & g b_1 & 0 & \dots \\ 0 & g b_1 & a_2 & g b_2 & \dots \\ 0 & 0 & g b_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где перед коэффициентами b_n введен множителем параметр g .

Используем для функции $R(\lambda)$ формулу Стоуна [2]. Эта формула дает представление $R(\lambda)$ в виде непрерывной дроби вида

$$R(\lambda) = \frac{1}{a_0 - \lambda - \frac{g^2 b_0^2}{a_1 - \lambda - \frac{g^2 b_1^2}{a_2 - \lambda - \frac{g^2 b_2^2}{a_3 - \lambda - \dots}}}}.$$

Обозначая $z = g^2$, преобразуем эту дробь к виду

$$R(\lambda) = \frac{c_0(\lambda)}{1 + \frac{c_1(\lambda)z}{1 + \frac{c_2(\lambda)z}{1 + \dots}}}, \quad (1.1)$$

где последовательность функций $c_n(\lambda)$ определяется формулами

$$\begin{aligned} c_0(\lambda) &= \frac{1}{a_0 - \lambda}, \\ c_n(\lambda) &= \frac{-b_{n-1}^2}{(a_{n-1} - \lambda)(a_n - \lambda)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

В дальнейшем для сокращения будем опускать у функций $c_n(\lambda)$ аргумент λ .

Рассмотрим n -ю подходящую дробь к непрерывной дроби (1.1)

$$R_n(\lambda) = \frac{c_0}{1 + \frac{c_1 z}{1 + \dots + \frac{c_{n-1} z}{1 + c_n z}}} = \frac{M_n(z)}{N_n(z)}.$$

Здесь M_n и N_n – подходящие числители и знаменатели непрерывной дроби (1.1), удовлетворяющие, как известно, единым трехчленным рекуррентным соотношениям

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + c_{n+2}zQ_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

с начальными условиями

$$M_0 = c_0, \quad M_1 = c_0, \quad N_0 = 1, \quad N_1 = 1 + c_1z. \quad (1.4)$$

Величины $M_n(z)$ и $N_n(z)$ являются полиномами по z . Если n нечетное, то степень $M_{2k-1}(z)$ равна $(k-1)$, а степень $N_{2k-1}(z)$ равна k . Если n четное, то степени $M_{2k}(z)$ и $N_{2k}(z)$ одинаковы и равны k . Полиномы $M_n(z)$ и $N_n(z)$ лишь множителем отличаются от ортогональных полиномов первого и второго рода [3], через отношение которых также может быть выражена подходящая дробь $R_n(\lambda)$. Однако их структура намного проще, чем структура ортогональных полиномов. Этим мы и воспользуемся для нахождения явных выражений для коэффициентов при степенях z полиномов $M_n(z)$ и $N_n(z)$. Так как выкладки для полиномов $M_n(z)$ и $N_n(z)$ идентичны, проведем их подробно только для полиномов $N_n(z)$. Из сказанного выше следует, что эти полиномы можно представить в виде

$$N_n(z) = \sum_{m=0}^N B_m^{(n)} z^m, \quad \begin{cases} N = n/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ N = (n+1)/2, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Подставляя это выражение в рекуррентные соотношения (1.3) и учитывая начальные условия (1.4), нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов $B_m^{(n)}$:

$$\begin{aligned} B_0^{(n)} &= 1, \quad B_1^{(n)} = \sum_{k=1}^n c_k, \quad n \geq 1, \\ B_2^{(n)} &= c_3 B_1^{(1)} + c_4 B_1^{(2)} + \dots + c_n B_1^{(n-2)}, \quad n \geq 3, \\ B_3^{(n)} &= c_5 B_2^{(3)} + c_6 B_2^{(4)} + \dots + c_n B_2^{(n-2)}, \quad n \geq 5, \\ &\dots \dots \dots \\ \begin{cases} B_{(n-2)/2}^{(n)} = c_{n-3} B_{(n-4)/2}^{(n-5)} + \dots + c_n B_{(n-4)/2}^{(n-2)}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ B_{(n-1)/2}^{(n)} = c_{n-2} B_{(n-3)/2}^{(n-4)} + c_{n-1} B_{(n-3)/2}^{(n-3)} + c_n B_{(n-3)/2}^{(n-2)}, & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} B_{n/2}^{(n)} = c_{n-1} B_{(n-2)/2}^{(n-3)} + c_n B_{(n-2)/2}^{(n-2)}, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ B_{(n+1)/2}^{(n)} = c_n B_{(n-1)/2}^{(n-2)} = c_1 \cdot c_3 \cdot \dots \cdot c_n, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Из этих соотношений нетрудно получить компактное выражение коэффициентов $B_m^{(n)}$ через функции c_n :

$$B_m^{(n)} = \sum_{n_1=2m-1}^n \sum_{n_2=2m-3}^{n_1-2} \dots \sum_{n_m=1}^{n_{m-1}-2} c_{n_1} \cdot c_{n_2} \cdot \dots \cdot c_{n_m}, \quad B_0^{(n)} = 1.$$

Вводя новые индексы суммирования $n_1 = s_1 + 2m - 1$, $n_2 = s_2 + 2m - 3$ и т.д., можно записать это выражение также в виде

$$B_m^{(n)} = \sum_{s_1=0}^{n-2m+1} \sum_{s_2=0}^{s_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{s_{m-1}} c_{s_1+2m-1} \cdot c_{s_2+2m-3} \cdot \dots \cdot c_{s_m+1}, \quad B_0^{(n)} = 1. \quad (1.5)$$

Точно так же можно получить аналогичную формулу и для коэффициентов полинома $M_n(z)$. Если обозначить

$$M_n(z) = \sum_{m=0}^N A_m^{(n)} z^m, \quad \begin{cases} N = n/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ N = (n-1)/2, & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

то для коэффициентов $A_m^{(n)}$ справедлива формула

$$A_m^{(n)} = c_0 \sum_{s_1=0}^{n-2m} \sum_{s_2=0}^{s_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{s_{m-1}} c_{s_1+2m} \cdot c_{s_2+2m-2} \cdot \dots \cdot c_{s_m+2}, \quad A_0^{(n)} = c_0. \quad (1.6)$$

Таким образом, мы нашли, что подходящая дробь $R_n(\lambda)$ к функции Вейля равна отношению двух неортогональных полиномов по параметру z и установили явные выражения для коэффициентов при степенях z этих полиномов. Окончательно можно записать

$$R_n(\lambda) = \frac{M_n(z)}{N_n(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{N_1} A_m^{(n)} z^m}{\sum_{m=0}^{N_2} B_m^{(n)} z^m}, \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} N_1 = N_2 = n/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ N_1 = (n-1)/2, \quad N_2 = (n+1)/2, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Здесь согласно формулам (1.2), (1.5), (1.6) коэффициенты $A_m^{(n)}$ и $B_m^{(n)}$ являются функциями λ .

2. Приложение к рассматриваемому классу весов. Функция Вейля как отношение двух целых трансцендентных функций. Перейдем к частному случаю матриц Якоби, указанному во введении, т.е. рассмотрим веса вида

$$a_n = 0, \quad b_{n-1} = q^{n^s}, \quad 0 < q < 1, \quad s = 1, 2, \dots$$

В этом случае формулы (1.2) предыдущего пункта дают

$$c_0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}, \quad c_n(\lambda) = -\frac{b_{n-1}^2}{\lambda^2} = -\frac{q^{2n^s}}{\lambda^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для коэффициентов $A_m^{(n)}$ и $B_m^{(n)}$ из формул (1.5), (1.6) получим

$$B_m^{(n)} = \frac{(-1)^m}{\lambda^{2m}} \times \sum_{s_1=0}^{n-2m+1} \sum_{s_2=0}^{s_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{s_{m-1}} u^{(s_1+2m-1)^s + (s_2+2m-3)^s + \dots + (s_m+1)^s}, \quad u = q^2, \quad (2.1)$$

$$A_m^{(n)} = \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda^{2m+1}} \times \sum_{s_1=0}^{n-2m} \sum_{s_2=0}^{s_1} \cdots \sum_{s_m=0}^{s_{m-1}} u^{(s_1+2m)^s + (s_2+2m-2)^s + \dots + (s_m+2)^s}, \quad u = q^2. \quad (2.2)$$

Введем обозначения

$$\sigma_m(s_1, s_2, \dots, s_m) = (s_1 + 2m - 1)^s + (s_2 + 2m - 3)^s + \dots + (s_m + 1)^s, \quad (2.3)$$

$$\pi_m(s_1, s_2, \dots, s_m) = (s_1 + 2m)^s + (s_2 + 2m - 2)^s + \dots + (s_m + 2)^s, \quad (2.4)$$

$$\beta_m^{(n)}(u) = \sum_{s_1=0}^{n-2m+1} \sum_{s_2=0}^{s_1} \dots \sum_{s_m=0}^{s_{m-1}} u^{\sigma_m(s_1, s_2, \dots, s_m) - \sigma_m(0, 0, \dots, 0)}, \quad (2.5)$$

$$\gamma_m^{(n)}(u) = \sum_{s_1=0}^{n-2m} \sum_{s_2=0}^{s_1} \dots \sum_{s_m=0}^{s_{m-1}} u^{\pi_m(s_1, s_2, \dots, s_m) - \pi_m(0, 0, \dots, 0)}. \quad (2.6)$$

Тогда формулы (2.1), (2.2) запишутся в этих обозначениях в виде

$$B_m^{(n)} = \frac{(-1)^m}{\lambda^{2m}} u^{\sigma_m(0, 0, \dots, 0)} \beta_m^{(n)}(u), \quad (2.7)$$

$$A_m^{(n)} = \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda^{2m+1}} u^{\pi_m(0, 0, \dots, 0)} \gamma_m^{(n)}(u). \quad (2.8)$$

Рассмотрим величины $\beta_m^{(n)}(u)$ и $\gamma_m^{(n)}(u)$, определенные формулами (2.5), (2.6). Пусть $\mathcal{E}_m^{(\sigma)}$ — множество значений, которые принимает величина $\sigma_m(s_1, s_2, \dots, s_m) - \sigma_m(0, 0, \dots, 0)$ при целых s_i , удовлетворяющих условию $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m \geq 0$. Очевидно, что множество $\mathcal{E}_m^{(\sigma)}$ является подмножеством множества натуральных чисел, совпадающим с ним при $s = 1$. Мы можем заменить в формуле (2.5) многократные суммы одной суммой по множеству $\mathcal{E}_m^{(\sigma)}$:

$$\beta_m^{(n)}(u) = \sum_{k \in \mathcal{E}_m^{(\sigma)}} p_\sigma(n - 2m + 1, m, k) u^k. \quad (2.9)$$

Здесь через $p_\sigma(n - 2m + 1, m, k)$ обозначено число решений в целых неотрицательных числах s_i уравнения

$$\sigma_m(s_1, s_2, \dots, s_m) - \sigma_m(0, 0, \dots, 0) = k, \\ k \in \mathcal{E}_m^{(\sigma)}, \quad n - 2m + 1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m \geq 0,$$

которое, учитывая (2.3), можно переписать в виде

$$(s_1 + 2m - 1)^s + (s_2 + 2m - 3)^s + \dots + (s_m + 1)^s \\ - (2m - 1)^s - (2m - 3)^s - \dots - 3^s - 1 = k, \quad (2.10) \\ k \in \mathcal{E}_m^{(\sigma)}, \quad n - 2m + 1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_m \geq 0.$$

Рассмотрим теперь при фиксированном m предел при $n \rightarrow \infty$ величины $\beta_m^{(n)}(u)$, определенной суммой (2.9). При этом, очевидно, снимается ограничение $n - 2m + 1 \geq s_1$, и мы получаем

$$\beta_m(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_m^{(n)}(u) = \sum_{k \in \mathcal{E}_m^{(\sigma)}} p_\sigma(m, k) u^k. \quad (2.11)$$

Здесь $p_\sigma(m, k)$ есть число решений уравнения (2.10) без ограничительного условия $n - 2m + 1 \geq s_1$, т.е. $p_\sigma(m, k)$ есть число решений уравнения

$$\begin{aligned} & (s_1 + 2m - 1)^s + (s_2 + 2m - 3)^s + \cdots + (s_m + 1)^s \\ & - (2m - 1)^s - (2m - 3)^s - \cdots - 3^s - 1 = k, \\ & k \in \mathcal{E}_m^{(\sigma)}, \quad s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m \geq 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Если в сумме (2.9) число слагаемых конечно в силу условия $n - 2m + 1 \geq s_1$, то в сумме (2.11) число слагаемых уже неограниченно. Ряд (2.11) является сходящимся при $|u| < 1$, что выполняется в данном случае, так как $u = q^2$, $0 < q < 1$. Действительно, мы имеем $p_\sigma(m, k) < p(k)$ для любых m, k и s , где $p(k)$ – число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_k = k, \quad s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k \geq 0.$$

Поэтому при $0 < u < 1$

$$\beta_m(u) < \sum_{k=0}^{\infty} p(k) u^k = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - u^k}.$$

Последняя же сумма представляет собой известную производящую функцию для функции разбиений $p(k)$ и является сходящейся при $|u| < 1$ (см., например, [4]).

Аналогично, функция $\beta_m(u)$ (2.11) является производящей функцией соответствующих величин $p_\sigma(m, k)$.

Совершенно так же можно рассмотреть и функцию $\gamma_m^{(n)}(u)$, определенную формулой (2.6). Приведем результаты:

$$\gamma_m(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_m^{(n)}(u) = \sum_{k \in \mathcal{E}_m^{(\pi)}} p_\pi(m, k) u^k, \quad (2.13)$$

где $p_\pi(m, k)$ есть число решений в целых неотрицательных числах s_i уравнения

$$\pi_m(s_1, s_2, \dots, s_m) - \pi_m(0, 0, \dots, 0) = k, \quad k \in \mathcal{E}_m^{(\pi)}, \quad s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m \geq 0,$$

которое, учитывая (2.4), можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (s_1 + 2m)^s + (s_2 + 2m - 2)^s + \cdots + (s_m + 2)^s - (2m)^s - (2m - 2)^s - \cdots - 2^s = k, \\ & k \in \mathcal{E}_m^{(\pi)}, \quad s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m \geq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Функция $\gamma_m(u)$ является производящей функцией величин $p_\pi(m, k)$, и ряд (2.13) сходится при $|u| < 1$.

Для функций $\beta_m(u)$ и $\gamma_m(u)$ не существует явных аналитических выражений, за исключением случая $s = 1$. В случае $s = 1$ уравнения (2.12) и (2.14) совпадают и принимают простой вид

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m \geq 0.$$

Поэтому в этом случае функции $\beta_m(u)$ и $\gamma_m(u)$ являются производящими функциями функции разбиений на не более чем m частей и равны [4]

$$\beta_m(u) = \gamma_m(u) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-u^k}, \quad s=1.$$

В дальнейшем, однако, нам не потребуется точный вид функций $\beta_m(u)$ и $\gamma_m(u)$ в случае произвольного s . Отметим только очевидные неравенства

$$\begin{aligned} 1 < \beta_m(u) &\leq \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-u^k}, & \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m(u) &= \beta(u) < \infty, \\ 1 < \gamma_m(u) &\leq \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-u^k}, & \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m(u) &= \gamma(u) < \infty, \end{aligned} \quad 0 < u < 1. \quad (2.15)$$

Вернемся к полиномам $M_n(z)$ и $N_n(z)$. Мы имели для них формулы

$$M_n(z) = \sum_{m=0}^{N_1} A_m^{(n)} z^m, \quad N_n(z) = \sum_{m=0}^{N_2} B_m^{(n)} z^m,$$

или, учитывая формулы (2.7), (2.8),

$$\begin{aligned} M_n(z) &= \sum_{m=0}^{N_1} \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda^{2m+1}} u^{\pi_m(0,0,\dots,0)} \gamma_m^{(n)}(u) z^m, \\ N_n(z) &= \sum_{m=0}^{N_2} \frac{(-1)^m}{\lambda^{2m}} u^{\sigma_m(0,0,\dots,0)} \beta_m^{(n)}(u) z^m. \end{aligned}$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ и используя полученные результаты, имеем

$$M(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\lambda^{2m+1}} u^{\pi_m} \gamma_m(u) z^m, \quad (2.16)$$

$$N(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\lambda^{2m}} u^{\sigma_m} \beta_m(u) z^m, \quad (2.17)$$

где мы ввели сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} \pi_m &\equiv \pi_m(0, \dots, 0) = (2m)^s + (2m-2)^s + \dots + 2^s, \\ \sigma_m &\equiv \sigma_m(0, \dots, 0) = (2m-1)^s + (2m-3)^s + \dots + 3^s + 1. \end{aligned}$$

Оценим величины π_m и σ_m при больших m . Используя формулу суммирования Эйлера–Маклорена, можно получить следующие асимптотические выражения для этих величин:

$$\pi_m = \frac{2^s}{s+1} m^{s+1} (1 + O(m^{-1})), \quad \sigma_m = \frac{2^s}{s+1} m^{s+1} (1 + O(m^{-2})), \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Из этих формул следует, что величины u^{π_m} и u^{σ_m} при $0 < u < 1$ являются очень быстро убывающими функциями m . Так как при этом согласно неравенствам (2.15) величины $\gamma_m(u)$ и $\beta_m(u)$ являются монотонно возрастающими и ограниченными функциями m , то функции $M(z)$ и $N(z)$, определенные рядами (2.16), (2.17), являются целыми трансцендентными функциями нулевого порядка.

Таким образом последовательности полиномов $M_n(z)$ и $N_n(z)$ сходятся к целым трансцендентным функциям.

Положим теперь $z = 1$ и определим две функции

$$f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m u^{\pi_m} \gamma_m(u) x^m, \quad (2.19)$$

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m u^{\sigma_m} \beta_m(u) x^m. \quad (2.20)$$

Эти функции, очевидно, также являются целыми трансцендентными функциями нулевого порядка. Учитывая формулу (1.7), а также используя (2.16), (2.17), получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1. *Функция Вейля $R(\lambda)$ рассматриваемого класса операторов представима в виде*

$$R(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\lambda) = -\frac{f_1(\lambda^{-2})}{\lambda f_2(\lambda^{-2})}, \quad (2.21)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – целые функции нулевого порядка, имеющие представление рядами Тейлора (2.19), (2.20).

Собственные значения оператора соответствуют полюсам функции $R(\lambda)$, которые определяются, в свою очередь, корнями уравнения $f_2(\lambda^{-2}) = 0$. Так как собственные значения оператора A образуют бесконечное множество с точкой сгущения $\lambda = 0$, то функция $f_2(x)$ (а следовательно, и функция $f_1(x)$) имеет бесконечное число нулей (значение нуль не является особой точкой Пикара целой функции). Непосредственным следствием вещественности и простоты собственных значений оператора A является следующее утверждение относительно нулей функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

СЛЕДСТВИЕ. *Нули функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются простыми, вещественными, положительными и перемежаются друг с другом.*

Это следствие, являющееся практически очевидным с точки зрения спектральной теории и формулы (2.21), является отнюдь не тривиальным, если исходить из представления функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рядами Тейлора (2.19), (2.20).

Из формулы (2.21) следует, что спектр оператора A расположен симметрично относительно предельной точки $\lambda = 0$, являющейся существенно особой точкой функции Вейля $R(\lambda)$. Обозначим корни функции $f_2(x)$ через x_n ($f_2(x_n) = 0$), а собственные значения через $\pm \lambda_n$ ($\lambda_n > 0$). Тогда

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{x_n}}. \quad (2.22)$$

Функция $R(\lambda)$ является матричным элементом резольвенты оператора A . Для нее должно иметь место резольвентное разложение

$$R(\lambda) = \sum_n \frac{R_n^{(\pm)}}{\pm \lambda_n - \lambda}.$$

Группируя слагаемые с противоположными знаками λ_n , можем записать это равенство в виде

$$R(\lambda) = \sum_n \frac{\lambda_n(R_n^{(-)} - R_n^{(+)}) - \lambda(R_n^{(-)} + R_n^{(+)})}{\lambda^2 - \lambda_n^2}.$$

Здесь суммирование производится по абсолютным величинам собственных значений λ_n . Сравнивая это выражение с формулой (2.21), получаем равенство

$$\frac{f_1(\lambda^{-2})}{f_2(\lambda^{-2})} = -\lambda \sum_n \frac{\lambda_n(R_n^{(-)} - R_n^{(+)}) - \lambda(R_n^{(-)} + R_n^{(+)})}{\lambda^2 - \lambda_n^2}.$$

Но левая часть этого равенства является функцией λ^2 . Чтобы и правая часть была функцией λ^2 необходимо, чтобы $R_n^{(+)} = R_n^{(-)} = R_n$, и мы получаем, таким образом,

$$\frac{f_1(\lambda^{-2})}{f_2(\lambda^{-2})} = 2\lambda^2 \sum_n \frac{R_n}{\lambda^2 - \lambda_n^2},$$

или, учитывая (2.22),

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 2 \sum_n \frac{x_n R_n}{x_n - x}.$$

3. Асимптотика собственных значений. Скорость стремления к нулю абсолютных величин собственных значений λ_n определяется согласно (2.22) скоростью роста корней x_n функции $f_2(x)$. Поэтому достаточно найти асимптотику x_n . Функция $f_2(x)$ определялась рядом (2.20):

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m u^{\sigma_m} \beta_m(u) x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x). \quad (3.1)$$

Согласно теореме 2.1 эта функция является целой трансцендентной функцией нулевого порядка. Если $N(r)$ – число нулей $f_2(x)$, не превосходящих r , то согласно известной теореме [5] порядок функции $N(r)$ также равен нулю. То есть функция $N(r)$ возрастает медленнее любого полинома от r . Грубо можно оценить асимптотику x_n как

$$x_n \sim \frac{1}{(a_n)^{1/n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда, учитывая формулы (2.15) и (2.18), грубо имеем

$$x_n \sim \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{(2n)^s}{s+1}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{2(2n)^s}{s+1}}.$$

Перейдем к более точным оценкам. Найдем максимальный по модулю член в ряде (3.1). Приравнивая логарифмическую производную от $|v_n|$ к нулю и учитывая (2.15), (2.18), найдем, что асимптотически при больших $r = |x|$ номер максимального коэффициента равен

$$n_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln r}{\ln u^{-1}} \right)^{1/s} \cdot (1 + O(n_0^{-2})).$$

Возьмем достаточно большое n_0 и положим

$$r_0 = u^{-(2n_0)^s}, \quad n_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln r_0}{\ln u^{-1}} \right)^{1/s}. \quad (3.2)$$

Далее, учитывая определение величины σ_n , имеем

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| = r u^{(2n+1)^s} \frac{\beta_{n+1}(u)}{\beta_n(u)}.$$

Полагая $r = r_0$, получим неравенства

$$\begin{aligned} |v_{n_0+1}| &= u^{(2n_0+1)^s - (2n_0)^s} \frac{\beta_{n_0+1}(u)}{\beta_{n_0}(u)} |v_{n_0}| \leq u^{s(2n_0)^{s-1}} \frac{\beta_{n_0+1}(u)}{\beta_{n_0}(u)} |v_{n_0}|, \\ |v_{n_0+2}| &= u^{(2n_0+3)^s - (2n_0)^s} \frac{\beta_{n_0+2}(u)}{\beta_{n_0+1}(u)} |v_{n_0+1}| \leq u^{3s(2n_0)^{s-1}} \frac{\beta_{n_0+2}(u)}{\beta_{n_0+1}(u)} |v_{n_0+1}| \\ &\leq u^{4s(2n_0)^{s-1}} \frac{\beta_{n_0+2}(u)}{\beta_{n_0}(u)} |v_{n_0}|, \\ |v_{n_0+3}| &\leq u^{9s(2n_0)^{s-1}} \frac{\beta_{n_0+3}(u)}{\beta_{n_0}(u)} |v_{n_0}| \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \sum_{m=n_0+1}^{\infty} v_m(x_0) \right| \leq C |v_{n_0}| \sum_{m=1}^{\infty} u^{m^2 s (2n_0)^{s-1}}. \quad (3.3)$$

Здесь мы использовали неравенства (2.15).

Аналогично при $r = r_0$ имеем также следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |v_{n_0-1}| &= u^{(2n_0)^s - (2n_0-1)^s} \frac{\beta_{n_0-1}(u)}{\beta_{n_0}(u)} |v_{n_0}| < u^{s(2n_0-1)^{s-1}} \frac{\beta_{n_0-1}(u)}{\beta_{n_0}(u)} |v_{n_0}|, \\ |v_{n_0-2}| &= u^{(2n_0)^s - (2n_0-3)^s} \frac{\beta_{n_0-2}(u)}{\beta_{n_0-1}(u)} |v_{n_0-1}| \\ &< u^{3s(2n_0-3)^{s-1} + s(2n_0-1)^{s-1}} \frac{\beta_{n_0-2}(u)}{\beta_{n_0}(u)} |v_{n_0}| \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

И, следовательно,

$$\left| \sum_{m=0}^{n_0-1} v_m(x_0) \right| \leq C |v_{n_0}| \sum_{m=1}^{n_0} u^{(s(2(n_0-1)+1)^{s-1} + \dots + (2m-1)s(2(n_0-m)+1)^{s-1})}. \quad (3.4)$$

Из формул (3.3), (3.4) следует, что при больших по модулю $x_0 = r_0 e^{i\varphi}$ и при $s \neq 1$

$$f_2(x_0) = v_{n_0}(x_0)(1 + \epsilon(x_0)) = (-1)^{n_0} u^{\sigma_{n_0} - 2^s n_0^{s+1}} \beta_{n_0}(u) e^{in_0\varphi} (1 + \epsilon(x_0)),$$

причем

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \epsilon(x_0) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Из этой формулы следует, что изменение аргумента функции $f_2(x_0)$ при обходе окружности достаточно большого радиуса $R = r_0$ в точности равно $2\pi n_0$. Поэтому по теореме Коши получаем, что число корней N функции f_2 в круге достаточно большого радиуса $r = u^{-(2N)^s}$ с учетом (3.2) в точности равно

$$N(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln r}{\ln u^{-1}} \right)^{1/s}, \quad s \neq 1. \quad (3.5)$$

Метод, которым мы здесь воспользовались для определения асимптотики корней, в сущности, аналогичен методу, который применялся Г. Харди [6] к функциям вида $\sum x^{\phi(n)} / \{\phi(n)\}!$, где $\phi(n)$ – достаточно быстро растущая функция.

Рассмотрим теперь случай $s = 1$. Если в предыдущем случае рост функции определялся максимальным по модулю членом ряда и мы имели $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \epsilon(x_0) = 0$, то здесь уже $\epsilon(x_0)$ не стремится к нулю. Поэтому можно было бы воспользоваться и тем же самым методом, но результат был бы справедлив далеко не для всех значений u . Чтобы получить результат, справедливый при всех значениях u , воспользуемся методом, который также восходит к Харди [7].

При $s = 1$ из предыдущих формул имеем

$$\sigma_m = (2m-1) + (2m-3) + \dots + 3 + 1 = m^2, \quad \beta_m(u) = \frac{1}{(1-u)(1-u^2) \cdot \dots \cdot (1-u^m)}$$

и, следовательно,

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{u^{m^2}}{(1-u)(1-u^2) \cdot \dots \cdot (1-u^m)} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x).$$

Это известная функция Роджерса–Рамануджана [4].

Выбирая достаточно большое N и полагая $M = [\ln N]$, разделим этот ряд на три части

$$f_2(x) = \sum_{m=0}^{N-M-1} v_m(x) + \sum_{m=N-M}^{N+M} v_m(x) + \sum_{m=N+M+1}^{\infty} v_m(x) = A + B + D.$$

Полагая $x = re^{i\varphi}$ и $r = u^{-2N}$, оценим каждую из частей:

$$B = u^{-N^2} e^{iN(\varphi-\pi)} \beta(u) \sum_{m=-M}^M u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)} \frac{\beta_{N+m}(u)}{\beta(u)}.$$

Так как

$$\frac{\beta_{N+m}(u)}{\beta(u)} = \prod_{k=N+m+1}^{\infty} (1 - u^k),$$

то

$$B = u^{-N^2} e^{iN(\varphi-\pi)} \beta(u) \sum_{m=-M}^M u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)} (1 + \rho_m), \quad \rho_m = O(u^{N+m+1}).$$

Представим B в виде

$$B = B_1 - B_2 - B_3 + B_4,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= u^{-N^2} e^{iN(\varphi-\pi)} \beta(u) \sum_{m=-\infty}^{\infty} u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)}, \\ B_2 &= u^{-N^2} e^{iN(\varphi-\pi)} \beta(u) \sum_{m=M+1}^{\infty} u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)}, \\ B_3 &= u^{-N^2} e^{iN(\varphi-\pi)} \beta(u) \sum_{m=-M-1}^{-\infty} u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)}, \\ B_4 &= u^{-N^2} e^{iN(\varphi-\pi)} \beta(u) \sum_{m=-M}^M \rho_m u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)}. \end{aligned}$$

Так как

$$\left| \sum_{m=M+1}^{\infty} u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)} \right| \leq \sum_{M+1}^{\infty} u^{m^2} < Cu^{M^2}, \quad \left| \sum_{m=-M-1}^{-\infty} u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)} \right| < Cu^{M^2},$$

где C – постоянная, учитывая, что $M = [\ln N]$, имеем для B_2 и B_3 оценки

$$|B_2| < C_1 u^{\ln^2 N} u^{-N^2}, \quad |B_3| < C_1 u^{\ln^2 N} u^{-N^2}, \quad (3.6)$$

где C_1 – также постоянная. Для B_4 получим следующую оценку:

$$|B_4| < Cu^{-N^2} \sum_{m=-M}^M u^{N+m+1} < Cu^{N-\ln N} u^{-N^2}. \quad (3.7)$$

Обозначим

$$\eta(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u^{m^2} e^{im(\varphi-\pi)}. \quad (3.8)$$

Эта функция непосредственно связана с эллиптической функцией $\vartheta_3(v)$ [8]:

$$\eta(\varphi) = \vartheta_3(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u^{m^2} e^{2\pi i m v}, \quad v = \frac{\varphi - \pi}{2\pi}.$$

Функция $\vartheta_3(v)$ раскладывается в бесконечное произведение вида [7]

$$\vartheta_3(v) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - u^{2k}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u^{2k-1} e^{2\pi i v}) (1 + u^{2k-1} e^{-2\pi i v}). \quad (3.9)$$

Из (3.9) непосредственно следует, что все корни функции $\eta(\varphi)$ чисто мнимые, так как $0 < u < 1$. Поэтому

$$|\eta(\varphi)| > C > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3.10)$$

Объединяя полученные результаты и учитывая (3.6)–(3.8) и (3.10), получим

$$B = B_1(1 + \epsilon) = u^{-N^2} e^{iN(\varphi - \pi)} \eta(\varphi) \beta(u) (1 + \epsilon), \quad |\epsilon| < C u^{\ln^2 N}. \quad (3.11)$$

Перейдем теперь к оценке величин A и D . Мы имеем следующие неравенства при $r = u^{-2N}$:

$$|A| \leq \sum_{m=0}^{N-M-1} |v_m| < (N-M) |v_{N-M}|$$

и

$$|D| \leq \sum_{m=N+M+1}^{\infty} |v_m| < |v_{N+M}| \left(1 + \frac{|v_{N+M+1}|}{|v_{N+M}|} + \frac{|v_{N+M+1}|}{|v_{N+M}|} \frac{|v_{N+M+2}|}{|v_{N+M+1}|} + \dots \right).$$

Но при $n \geq N + M$ справедливо неравенство

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = u^{2(n-N)+1} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} < C u^{2 \ln N}.$$

Поэтому

$$|D| < C |v_{N+M}|.$$

Для величин $|v_{N \pm M}|$ нетрудно получить следующую оценку:

$$|v_{N \pm M}| < C u^{-N^2} u^{M^2} = C u^{-N^2} u^{\ln^2 N},$$

и для величин A и D окончательно имеем

$$|A| < C u^{-N^2} N u^{\ln^2 N}, \quad |D| < C u^{-N^2} u^{\ln^2 N}. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) найдем асимптотику функции $f_2(x)$

$$f_2(x) = u^{-N^2} e^{iN(\varphi - \pi)} \eta(\varphi) \beta(u) (1 + \epsilon), \quad N = \frac{\ln r}{2 \ln(u^{-1})}, \quad \epsilon = O(N u^{\ln^2 N}). \quad (3.13)$$

Из формулы (3.13) сразу следует, что число корней функции f_2 внутри окружности достаточно большого радиуса $r = u^{-2N}$ в точности равно

$$N(r) = \frac{\ln r}{2 \ln(u^{-1})},$$

так как изменение аргумента функции $\eta(\varphi)$ при обходе этой окружности в силу (3.9) равно нулю.

Таким образом, мы доказали, что формула (3.5) справедлива для любого натурального s . Отсюда, учитывая, что корни являются вещественными и положительными, получим асимптотическую оценку нулей функции f_2 :

$$u^{-(2n-2)^s} < x_n < u^{-(2n)^s}, \quad n > N, \quad s = 1, 2, \dots$$

Учитывая формулу (2.22), получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Для абсолютных величин собственных значений λ_n ($n = 0, 1, \dots$) оператора A справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$b_{2n+1} < \lambda_n < b_{2n-1}, \quad n > N,$$

где N – достаточно большое целое число.

В заключение докажем следующее простое предложение.

ТЕОРЕМА 3.2. Если $q > 1$, то оператор A неограничен и имеет индексы дефекта $(1, 1)$, т.е. проблема моментов полностью не определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q > 1$, то мы имеем следующие условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n} < \infty,$$

$$b_{n-1}b_{n+1} \leq b_n^2, \quad 0 < s \leq 1, \quad (*)$$

$$b_{n-1}b_{n+1} > b_n^2, \quad s > 1. \quad (**)$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы, являющейся аналогом одной теоремы Ю. М. Березанского [3] и, следовательно, оператор A является симметрическим с индексами дефекта $(1, 1)$. Условие $(**)$ в [3] отсутствует, однако его можно рассматривать наравне с условием $(*)$ (доказательство остается тем же).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. М.: ГОНТИ, 1938.
- [2] Stone M. Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis. Providence, RI: American Mathematical Society, 1932.
- [3] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961.
- [4] Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Мир, 1982.
- [5] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956.
- [6] Hardy G. On the zeroes of certain classes of integral Taylor series. Part 1 // Collected Papers of G. Hardy. V. 4, 1969. P. 54.
- [7] Hardy G. The zeros of the integral function $\sum x^{n^2}/(n^2)!$, and some similar functions // Collected Papers of G. Hardy. 1969. V. 4. P. 118.
- [8] Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. Л.-М., 1949.

E-mail: Teduard@cards.lanck.net

Поступило

20.05.2001

Исправленный вариант

12.09.2002