КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЯ

А. В. Кривко, В. В. Кучеренко

Рассмотрим матричную задачу Штурма–Лиувилля

$$\left(-ih\frac{d}{dx}\right)^2 y + A(x)y = Ey, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad y(x) \in L_2(\mathbb{R}^1), \quad (1) \quad \{1\}$$

где $y \in \mathbb{C}^n$, $h \in [0, 1)$ является малым параметром. Пусть $A(x) = A(x)^*$ является $(n \times n)$ -матричной функцией из класса $C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Обозначим собственные значения самосопряженной матрицы $A(x)$ через $\lambda_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, и через $e_j(x)$ обозначим ортонормированные собственные вектора матрицы $A(x)$: $A(x)e_j(x) = \lambda_j(x)e_j(x)$. В случае, когда матрица $A(x)$ является аналитической функцией на открытом множестве $V \subseteq \mathbb{R}^1$, все ее собственные значения и собственные вектора также являются аналитическими функциями в V [1]. Таким образом, без потери общности предположим, что выполняются следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. Пусть $A(x)$ есть матрица вида $A(x) = \mathbf{U}(x)\|\lambda_j(x)\delta_{ij}\|\mathbf{U}^*(x)$, где $\mathbf{U}(x)$ – унитарная бесконечно дифференцируемая матрица и $\lambda_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – вещественные собственные значения матрицы $A(x)$. Обозначим через D множество точек x , в которых собственные значения меняют кратность. Предположим, что D является дискретным множеством, и разность $(\lambda_i - \lambda_j)$ собственных значений λ_j , λ_i , которые совпадают на множестве D , имеет нуль конечного порядка на D .

УСЛОВИЕ 2. Обозначим через γ_j кривые в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{x,p}^2$, удовлетворяющие уравнениям

$$p^2 + \lambda_j(x) = E, \quad j = 1, 2. \quad (2) \quad \{2\}$$

Предположим, что кривые γ_j компактны и в точках x : $\lambda_j(x) = E$ выполнено условие $d\lambda_j(x)/dx \neq 0$. Допустим, что множество $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, не содержит непрерывного спектра и $E \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$.

Таким образом, кривые γ_j являются одномерными компактными многообразиями класса C^∞ в $\mathbb{R}_{x,p}^2$. Обозначим через $\pi_x(\gamma_1 \cup \gamma_2)$ проекцию множества $\gamma_1 \cup \gamma_2$ на $\mathbb{R}_x^1$ и пусть U это некоторая окрестность множества $\pi_x(\gamma_1 \cup \gamma_2)$.

УСЛОВИЕ 3. Предположим, что собственные значения $\lambda_j(x)$, $j = 1, 2$, совпадают лишь в одной точке $x_0 \in \pi_x(\gamma_1 \cup \gamma_2)$ в окрестности U и $\lambda_1(x_0) = \lambda_2(x_0) \neq E$. Допустим, что в окрестности U собственные значения $\lambda_j(x)$, $j = 3, \dots, n$, не равны $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, и их кратность равна единице.

Из условия 1 следует, что $\lambda_j(x)$, $e_j(x)$: $j = 1, \dots, n$, являются $C^\infty(U)$ -функциями. Очевидно, ортонормированные вектора $e_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, являются столбцами матрицы $\mathbf{U}(x)$. Условие квантования Борна–Зоммерфельда–Маслова [2], [3] выполняется в случае, когда кривые γ_j , $j = 1, 2$, не пересекаются. В данной работе мы приводим условие квантования в случае, когда кривые γ_j , $j = 1, 2$, пересекаются.

Напомним некоторые свойства стандартных ВКБ асимптотик [4]. Предположим, что в точке x_1 собственные значения $\lambda_j(x_1)$, $j = 1, \dots, n$, различны, а импульсы $p_j(x_1)$ имеют вид $p_j(x_1) = \sqrt{E - \lambda_j(x_1)} > 0$. В этом случае в некоторой окрестности V_{x_1} точки x_1

Данная работа была проделана при частичной поддержке гранта CONACYT Мексика No. 4297F и гранта CGEPI IPN Мексика.

собственные значения различны и импульсы $p_j(x)$ положительны. В окрестности V_{x_1} существует $2n$ линейно независимых решений $y_j^\pm$ задачи (1) со следующими ВКБ асимптотиками:

$$y_j^\pm = \exp\left(\pm \frac{i}{h} S_j(x)\right) \left[\frac{e_j(x) \rho_j^\pm}{\sqrt{p_j}} + h \psi_j^\pm + O(h^2) \right], \quad S_j(x) = \int_{x_0}^x p_j(x) dx. \quad (3) \quad \{3\}$$

Остаточный член удовлетворяет условиям $O(h^2) \in C^\infty(V_{x_1})$ и $d^j O(h^2)/dx^j = O(h^2)$, $j = 1, 2$. Амплитуды $\rho_j^\pm$ являются решениями уравнений переноса

$$\frac{d\rho_j^\pm}{dx} + \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \rho_j^\pm = 0. \quad (4) \quad \{4\}$$

Уравнение (4) может быть записано в инвариантной форме для карт в “ x ” и “ p ” представлении [3]. А именно, на кривых γ_j амплитуды $\rho_j^\pm$ можно считать функциями от некоторого глобального параметра t [2], [5]. Функции $x_j(t)$, $p_j(t)$ на кривой γ_j являются решением Гамильтоновой системы

$$\frac{dx}{dt} = 2p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{d\lambda_j}{dx}, \quad \{x(0), p(0)\}_{\gamma_j} \in \gamma_j. \quad (5) \quad \{5\}$$

Очевидно, что решения Гамильтоновых систем (5) для $j = 1, 2$ являются периодическими функциями от t с периодами T_j . Мы выбираем начальную точку на кривых γ_j , $j = 1, 2$, равной $\{x(0), p(0)\}_{\gamma_j} = \{x_0, p = \sqrt{E - \lambda_j(x_0)}\}$. Далее положим $A = \{x_0, p = \sqrt{E - \lambda_1(x_0)}\}$ и $B = \{x_0, p = -\sqrt{E - \lambda_1(x_0)}\}$. Очевидно, эти две точки принадлежат пересечению $\gamma_1 \cap \gamma_2$.

В инвариантной форме на кривой γ_j уравнение переноса (4) имеет вид

$$\frac{d\rho_j^\pm}{dt} + 2p \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \rho_j^\pm = 0, \quad p = p_j(t), \quad x = x_j(t), \quad \text{Re} \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) = 0. \quad (6) \quad \{6\}$$

Важно отметить, что из условия 1 следует, что уравнение переноса (6) выполняется даже в случае, когда собственные значения меняют кратность.

Функции $\psi_j^\pm$ в (3) определяются равенствами

$$\psi_j^\pm = i2p_j \frac{\rho_j^\pm}{\sqrt{|p_j|}} [p_j^2 + A(x) - E]^{-1} \left(\frac{de_j}{dx} - e_j(x) \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) \right). \quad (7) \quad \{7\}$$

Сейчас рассмотрим ВКБ асимптотики на интервалах $(x_0 - \delta < x < x_0)$ и $(x_0 < x < x_0 + \delta)$, где точка x_0 удовлетворяет условию 3. Выберем δ таким, что эти интервалы не содержат точек множества D . В дальнейшем мы предполагаем, что выполняются условия 1, 2, 3. Мы определяем начальные данные для $t = 0$ в уравнении переноса и для фазы S_j на кривых γ_j для ВКБ асимптотики слева и справа от точки x_0 . На кривых γ_j фаза $\tilde{S}_j(t)$ определяется формулой $\tilde{S}_j(t) = \int_0^t p_j(t) [dx_j(t)/dt] dt$, и пусть $t_j(x)$ будет решением уравнения $x_j(t) = x$. В дальнейшем мы считаем, что $S_j(x) = \tilde{S}_j(t)|_{t_j(x)}$. Очевидно, что в случае, когда проекция π_x карты U_x кривой γ_j является дифеоморфизмом $U_x \rightarrow \pi_x(U_x)$, мы имеем $t_j(x) \in C^\infty(\pi_x(U_x))$. Заметим, что функции $t_j(x)$ определены с точностью до периода T_j . Из работ [4], [5] следует следующая лемма.

ЛЕММА 1. 1° Пусть $y_j^\pm$, $j = 1, 2$, будут решениями системы (1), имеющими на левом интервале $(x_0 - \delta < x < x_0)$ асимптотики (3) со знаком “+”, амплитудой $\rho_{j,\text{left}}^+$ и начальными данными $\rho_{j,\text{left}}^+(0)$. Тогда существует унитарная (2×2) -матрица u_{left} такая, что на правом интервале $(x_0 < x < x_0 + \delta)$ решения $y_j^\pm$, $j = 1, 2$, имеют асимптотики

$$y_j^+ = \sum_{k=1}^2 \exp\left\{ \frac{i}{h} S_k(x) \right\} \left[\frac{e_k(x) \rho_{k,j,\text{right}}^+(x)}{\sqrt{p_k(x)}} + h \psi_{k,j,\text{right}}^+(x) + O(h^2) \right]. \quad (8) \quad \{8\}$$

Здесь начальные данные $\rho_{kj,\text{right}}^+(0)$ для амплитуд $\rho_{kj,\text{right}}^+$ имеют вид

$$\begin{aligned}\{\rho_{11,\text{right}}^+(0), \rho_{21,\text{right}}^+(0)\}^t &= u_{\text{left}}\{\rho_{1,\text{left}}^+(0), 0\}^t, \\ \{\rho_{12,\text{right}}^+(0), \rho_{22,\text{right}}^+(0)\}^t &= u_{\text{left}}\{0, \rho_{2,\text{left}}^+(0)\}^t.\end{aligned}$$

В формуле (1) символ $\{\dots\}^t$ обозначает транспонирование.

2° Пусть $y_j^-, j = 1, 2$, будут решениями системы (1), имеющими на правом интервале $(x_0 < x < x_0 + \delta)$ асимптотики (3) со знаком “–”, амплитудой $\rho_{j,\text{right}}^-$ и начальными данными $\rho_{j,\text{right}}^-(0)$. Тогда существует унитарная (2×2) -матрица u_{right} такая, что на левом интервале $(x_0 - \delta < x < x_0)$ решения $y_j^-, j = 1, 2$, имеют асимптотики

$$y_j^- = \sum_{k=1}^2 \exp\left\{-\frac{i}{h} S_k(x)\right\} \left[\frac{e_k(x) \rho_{k,\text{left}}^-(x)}{\sqrt{p_k(x)}} + h \psi_{k,\text{left}}^-(x) + O(h^2) \right]. \quad (9) \quad \{9\}$$

Здесь начальные данные $\rho_{kj,\text{left}}^-(0)$ для амплитуд $\rho_{kj,\text{left}}^-$ имеют вид

$$\begin{aligned}\{\rho_{11,\text{left}}^-(0), \rho_{21,\text{left}}^-(0)\}^t &= u_{\text{right}}\{\rho_{1,\text{right}}^-(0), 0\}^t, \\ \{\rho_{12,\text{left}}^-(0), \rho_{22,\text{left}}^-(0)\}^t &= u_{\text{right}}\{0, \rho_{2,\text{right}}^-(0)\}^t.\end{aligned}$$

3° Для детерминантов матриц $u_{\text{left}}, u_{\text{right}}$ выполняется равенство

$$\det u_{\text{left}} = \det u_{\text{right}} + O(h^2). \quad (10) \quad \{10\}$$

Сейчас мы вычислим ВКБ асимптотики некоторой серии собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (1) на интервале $(E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$. Введем следующие функции:

$$y_{j,\text{right}}^+ = \exp\left\{\frac{i}{h} S_j(x)\right\} \left[\sum_{k=1}^2 (u_{\text{left}})_{jk} \rho_{k,\text{left}}^+ \right], \quad y_{j,\text{left}}^- = \exp\left\{-\frac{i}{h} S_j(x)\right\} \left[\sum_{k=1}^2 (u_{\text{right}})_{jk} \rho_{k,\text{right}}^+ \right].$$

Здесь $(u_{\text{left}})_{jk}$ это элементы матрицы u_{left} (аналогичные обозначения используются для матрицы u_{right}). Из формул (8), (9) следует, что на интервале $(x_0 < x < x_0 + \delta)$ асимптотика решения $(y_1^+ + y_2^+)$ имеет вид $y_{1,\text{right}}^+ + y_{2,\text{right}}^+ + O(h)$, а асимптотика решения $(y_1^- + y_2^-)$ на интервале $(x_0 - \delta < x < x_0)$ имеет вид $y_{1,\text{left}}^- + y_{2,\text{left}}^- + O(h)$. Обозначим через $\text{as } y_j^+, \text{as } y_j^-$ ВКБ асимптотики (3) функции y_j^+ на интервале $(x_0 - \delta < x < x_0)$ и функции y_j^- на интервале $(x_0 < x < x_0 + \delta)$, соответственно.

Рис. 1

Мы вводим индекс на кривых γ_j , $j = 1, 2$, по направлению часовой стрелки. Обозначение $\overrightarrow{AB(\gamma_j)}$ означает, что мы движемся по дуге AB кривой γ_j из точки A в точку B в заданном направлении. Обозначим индекс Маслова [3], [2] дуги $\overrightarrow{AB(\gamma_j)}$ через $\text{Ind}(\overrightarrow{AB(\gamma_j)})$, и пусть p_j будет импульсом на кривой γ_j . В дальнейшем мы используем следующие обозначения:

$$\theta_j := \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{AB(\gamma_j)}} p_j dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\overrightarrow{AB(\gamma_j)}), \quad \varphi_j := \frac{1}{h} \int_{\overrightarrow{BA(\gamma_j)}} p_j dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\overrightarrow{BA(\gamma_j)}), \quad (11) \quad \{11\}$$

где $j = 1, 2$.

Теперь мы построим обобщение оператора Маслова [2], [3], [5] на случай пересекающихся кривых $\gamma_1 \gamma_2$. Пусть U_j , $j = 1, 2$, будут картами на γ_j такими, что $p|_{U_j} \geq 0$ и $\pi_x U_j$ диффеоморфно $(x_0 - \delta < x < x_0)$. Рассмотрим ВКБ асимптотики $\text{as } y_1^+$, $\text{as } y_2^+$ в картах U_j , $j = 1, 2$. Используя метод разработанный в работе [5], мы продолжаем ВКБ асимптотики из карт U_j , $j = 1, 2$, вдоль объединения $\gamma_1 \cup \gamma_2$ кривых γ_j , $j = 1, 2$, в направлении часовой стрелки. Определим следующие унитарные матрицы: $w(\overrightarrow{AB}): \|(w(\overrightarrow{AB}))_{i,j}\| := \|\delta_{ij} \exp\{\theta_j\}\|$, и $w(\overrightarrow{BA}): \|(w(\overrightarrow{BA}))_{i,j}\| := \|\delta_{ij} \exp\{\varphi_j\}\|$. Заметим, что кривые γ_j , $j = 1, 2$, и точки A , B симметричны относительно оси x . Следовательно,

$$\int_{\overrightarrow{AB(\gamma_j)}} p_j \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) dt = 0, \quad \int_{\overrightarrow{BA(\gamma_j)}} p_j \left(\frac{de_j}{dx}, e_j \right) dt = 0.$$

Следующая теорема может быть получена посредством продолжения асимптотики вдоль объединения $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

ТЕОРЕМА 1 (Условие квантования). Если начальные данные уравнения переноса для ВКБ-асимптотик $\text{as } y_1^+$, $\text{as } y_2^+$ и кривые $\gamma_j(E)$, $j = 1, 2$, в $E = E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ удовлетворяют условию

$$w(\overrightarrow{BA}) u_{\text{right}} w(\overrightarrow{AB}) u_{\text{left}} \{\rho_1^+(0), \rho_2^+(0)\}^t = \{\rho_1^+(0), \rho_2^+(0)\}^t, \quad (12) \quad \{12\}$$

то существуют собственные значения $E_{\text{eg}}(h)$ задачи (1) такие, что $E_n(h) - E(h) = O(h^2)$.

Продолжения асимптотик вдоль кривых были рассмотрены в работах [2], [5] и [6]. Существуют случаи, когда пересекаются более, чем две кривые γ_j , $j = 1, \dots, n$.

УСЛОВИЕ 4. Предположим, что кривые γ_j , $j = 1, \dots, n$, компактны и на них выполняется условие 1. Пусть уравнения $\lambda_j(x) = E$ имеют конечное число решений и в этих точках выполняется $d\lambda_j/dx(x) \neq 0$. Далее, пусть $\lambda_j|_D \neq E$, $j = 1, \dots, n$. Также предположим, что каждая пара пересекающихся кривых имеет конечное число пересечений и совпадающие в точках множества D собственные значения λ_j , λ_q удовлетворяют условию

$$\left. \frac{d(\lambda_j - \lambda_q)}{dx} \right|_D \neq 0, \quad j \neq q. \quad (13) \quad \{13\}$$

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что кривая γ_j пересекает только кривые γ_{i_k} , $k = 1, \dots, l$, $l \leq n - 1$, и выполняется условие 4. Пусть $E(h)$ будет функцией, определенной на интервале $(0, 1]$, такой, что $E(h) \in (E_0 - \varepsilon, E_0 + \varepsilon)$ и справедливы условия

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma_j(E)} p dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\gamma_j(E)) = 2\pi m(h), \quad m(h) \in \mathbb{Z}, \quad (14) \quad \{14\}$$

$$\left| \exp \frac{i}{h} \left\{ \int_{\gamma_{i_k}(E)} p dx - \frac{\pi}{2} \text{Ind}(\gamma_{i_k}(E)) \right\} - 1 \right| \geq c > 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad (15) \quad \{15\}$$

где c — это некоторая константа. Тогда существуют собственные значения $E_{\text{eg}}(h)$ задачи Штурма–Лиувилля (1) такие, что $E(h) - E_{\text{eg}}(h) = O(h^2)$.

Доказательство следует из локальных асимптотик, полученных в работе [5], и теоремы 1. Амплитуда соответствующей собственной функции на кривой γ_j имеет порядок 1 и на кривых γ_{i_k} , $k = 1, \dots, l \leq n - 1$, имеет порядок $\sqrt{\hbar}$. Задача Штурма–Лиувилля встречается в квантовой механике [7] и нанотехнологии [8], [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kurt O. Friedrichs, *Perturbation of Spectra in Hilbert Space*, American Mathematical Society, Providence, 1965. [2] В.П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Московского Ун-та, М., 1965. [3] В.П. Маслов, М.В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение в задачах квантовой механики*, Наука, М., 1976. [4] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGRAW-Hill Book Company inc., New York–Toronto–London, 1955. [5] В. В. Кучеренко, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **8**:3 (1974), 631–666. [6] Y. C. De Verdiere, B. Parisse, *Commun. Math. Phys.*, **205** (1999), 459–500. [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, М., 2002. [8] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, *Russ. J. Math. Phys.*, **11** (2004), 109–119. [9] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, *ТМФ*, **141** (2004), 267–303.

А. В. Кривко

Национальный Политехнический Институт, г. Мехико, Мексика

Поступило

20.12.2005

В. В. Кучеренко

Национальный Политехнический Институт, г. Мехико, Мексика

E-mail: valeri@esfm.ipn.mx