ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ ФУНКЦИЯ ВЛИЯНИЯ ПРОЩЕ И ЛУЧШЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Ю. В. Покорный, Е. В. Гулынина, М. Б. Зверева

В классе абсолютно непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций рассматривается уравнение

$$-u'(x) + \int_0^x u \, dQ = F(x) - F(0), \quad 0 < x < 1, \quad (1) \quad \{1\}$$

возникающее при описании малых плоских поперечных деформаций упругой струны, натянутой вдоль отрезка $[0, 1]$, или малых продольных деформаций стержня, расположенного вдоль того же отрезка. Функции $Q(x)$ и $F(x)$ имеют ограниченные вариации. Исходя из физической, точнее – вариационной мотивации уравнения (1), мы даем точное описание функции влияния $K(x, \xi)$ для исходной системы, позволяющей выразить решение задачи (1) в традиционной для функции Грина форме

$$u(x) = \int_0^1 K(x, \xi) \, dF(\xi).$$

Подразумеваемые при определении функции влияния исходные физические условия на концах связываются нами со значениями скачков функций Q и F . Уравнение (1) оказывается носителем всех классических свойств обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а функция влияния успешно исполняет роль традиционной функции Грина, хотя в данной ситуации традиционное для функции Грина описание через аксиоматику весьма затруднительно и, более того, нерентабельно, поскольку она чрезвычайно трудно обозрима.

В работе показывается, что функция влияния строго положительна внутри квадрата $0 < x, s < 1$.

1. Предтечей рассматриваемого уравнения (1) для нас послужили работы М. Г. Крейна и И. С. Каца для уравнения вида

$$u'_+(x) = u'_-(0) - \lambda \int_0^{x+0} u \, dM, \quad (2) \quad \{2\}$$

где функция $M(x)$ определяется распределением масс струны, $u'_+(x)$ – правая производная. Интерес к этому уравнению авторы [1] мотивировали более ранними исследованиями Феллера [2], который в связи с задачей рассеяния (см. также комментарии в [3]) рассматривал уравнение

$$-\frac{d}{dM(x)} u'_+(x) = \lambda u(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3) \quad \{3\}$$

У Феллера псевдопроизводная $d/dM(x)$ определялась напрямую пределом соответствующих конечноразностных отношений. У М. Г. Крейна и И. С. Каца уравнение (3) было внешним символом (2). В отличие от (1) в (2) фигурирует величина $u'_-(0)$, которая вместе с $u'_+(1)$ должна быть задана с уравнением (2) заранее, и это именуется поиском

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобразования РФ (КЦСПбГУ), грант № Е02-1.0-46, Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 04-01-00049, 02-01-00307, программы “Университеты России”, проект УР.04.01.004, и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ № НШ-1643.2003.1.

решения уравнения (2) в классе продленных функций. Числа $u'_-(0)$ и $u'_+(1)$ требовались, чтобы придать смысл скачкам производной в конечных точках. Ниже будет показано, что в присутствии в уравнении (2) этих чисел нет нужды. Заметим, что в работах Феллера и М. Г. Крейна для уравнений (2), (3) обсуждались достаточно простые свойства, не выше уровня теорем о перемежаемости. Точное описание уравнения типа (3) в терминах производных по мере проведено в [4]. Вопрос о построении аналога функции Грина в этих работах не обсуждался.

2. Пусть $F(x)$ – внешняя нагрузка, приложенная к исследуемому континууму на промежутке от 0 до x . И пусть $Q(x)$ определяет распределение упругой реакции внешней среды на том же промежутке. Предполагая натяжение струны единичным, выпишем функционал потенциальной энергии

$$\Phi(u) = - \int_{(0,1)} \frac{u'^2}{2} dx - \int_{[0,1]} \frac{u^2}{2} dQ + \int_{[0,1]} u dF, \quad (4) \quad \{4\}$$

где через $u(x)$ обозначено смещение (деформация) точки струны от положения равновесия. Предположение об ограниченности вариаций $Q(x)$ и $F(x)$ естественно. Существенно отметить, что в правой части представления (4) интегралы участвуют по разным множествам. Первый – по интервалу $(0, 1)$, исключая концы, что естественно, поскольку на концах собственных значений u производной $u'(x)$ нет, и физически это означает, что в конечных точках у нас натяжение нулевое: струна растягивается в окрестности точек, но не в самих точках. А во втором и третьем слагаемом (4) существенно, что интегралы рассматриваются по отрезку $[0, 1]$, включая концы, поскольку оба интеграла берутся по Стильтесу, и это значит, что во втором и третьем слагаемых существенными оказываются скачки функций Q и F на концах

$$\begin{aligned} \Delta Q(0) &= Q(+0) - Q(0), & \Delta Q(1) &= Q(1) - Q(1-0), \\ \Delta F(0) &= F(+0) - F(0), & \Delta F(1) &= F(1) - F(1-0). \end{aligned}$$

С помощью этих скачков мы можем все выражения в (4) свести к общему интегралу по интервалу $(0, 1)$ с дополнительными внеинтегральными членами, а именно,

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \frac{u^2}{2} dQ &= \int_{(0,1)} \frac{u^2}{2} dQ + \frac{u^2(0)}{2} \Delta Q(0) + \frac{u^2(1)}{2} \Delta Q(1), \\ \int_{[0,1]} u dF &= \int_{(0,1)} u dF + u(0) \Delta F(0) + u(1) \Delta F(1), \end{aligned}$$

что отразится и на формуле (4).

В дальнейшем всюду мы в качестве области определения функционала Φ будем рассматривать множество E абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, 1]$. Естественно, мы предполагаем, что E содержит те функции, которые соответствуют реальным физическим деформациям, т.е. любой элемент E удовлетворяет исходным физическим предположениям на концах исходного отрезка $[0, 1]$.

Согласно принципу Ланранжа–Гамильтона реальная форма струны $u_0(x)$ должна являться минималью функционала (4). Первая вариация функционала (4) здесь находится по стандартной схеме Лагранжа. На минимали $u_0(x)$ она должна быть нулевой, что приводит к равенству

$$\begin{aligned} - \int_{(0,1)} u'_0 h' dx - \int_{(0,1)} u_0 h dQ + \int_{(0,1)} h dF \\ + [\Delta F(0) - u_0(0) \Delta Q(0)] h(0) + [\Delta F(1) - u_0(1) \Delta Q(1)] h(1) = 0. \end{aligned} \quad (5) \quad \{5\}$$

Проинтегрировав первое слагаемое по частям, приведем равенство (5) к виду

$$\int_{(0,1)} h d(u'_0 - g + F) + [\Delta F(0) - u_0(0)\Delta Q(0) + u'_0(0)]h(0) + [\Delta F(1) - u_0(1)\Delta Q(1) - u'_0(1)]h(1) = 0,$$

где мы обозначили $dg(x) = u_0(x) dQ(x)$, т.е. $g(x) = \int_{+0}^x u_0 dQ$ (обозначением нижнего предела в виде $+0$ мы подчеркиваем, что Q -мера точки $x = 0$ здесь не учитывается, т.е. не учитывается возможный скачок Q в нуле). Теперь в силу произвола h имеем

$$\int_{(0,1)} h d(u'_0 - g + F) = 0, \quad (6) \quad \{6\}$$

и вдобавок два соотношения на концах

$$[\Delta F(0) - u_0(0)\Delta Q(0) + u'_0(0)]h(0) = 0, \quad [\Delta F(1) - u_0(1)\Delta Q(1) - u'_0(1)]h(1) = 0. \quad (7) \quad \{7\}$$

Согласно естественному аналогу леммы Дюбуа–Реймонда, из (6) следует, что реальная форма струны $u_0(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$-u'(x) + \int_{+0}^x u dQ = F(x) + \text{const}. \quad (8) \quad \{8\}$$

Из (7) следует весьма примечательное обстоятельство. Для закрепленного конца, когда заранее предполагается, например, что $u(0) = 0$ (или $u(1) = 0$), вариации $h(x)$ в своем произволе должны удовлетворять на этом конце аналогичному условию $h(0) = 0$ (или $h(1) = 0$), и потому соответствующее условие в (7) выполняется автоматически. В противном случае, если один из концов (или оба) жестко не закреплен, должно выполняться

$$u(0)\Delta Q(0) - u'(0) = \Delta F(0), \quad (9) \quad \{9\}$$

или (для незакрепленного правого конца)

$$u(1)\Delta Q(1) + u'(1) = \Delta F(1). \quad (10) \quad \{10\}$$

Каждое из этих равенств естественно трактовать, как реализацию уравнения (8) в незакрепленном конце. Подчеркнем, что если струна изначально не закреплена на конце, то постановка какого-либо краевого условия в этом конце, как это обычно делается, исключена. Равенство (9) позволяет выразить в (8) константу, что дает вместо (8)

$$-u'(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0).$$

Заметим, что в отличие от (8), здесь мы учитываем (согласно (9)) возможные скачки $Q(x)$ и $F(x)$ в нуле.

3. Далее мы для определенности ограничимся рассмотрением случая струны с закрепленным правым и незакрепленным левым концом. Согласно предыдущему мы будем иметь для нее уравнение (1). В равенствах (8)–(10) последнее оказывается бессодержательным. Тем самым мы игнорируем влияние на правый конец скачка $F(x)$, т.е. сосредоточенной нагрузки. Иначе, что очевидно интуитивно, и быть не может – конец закреплен. Точно также и о влиянии $\Delta Q(1)$.

Заметим, что если $s \in (0, 1)$ – точка разрыва функции $Q(x)$ или $F(x)$, то равенство (1) при $x = s$ означает, что

$$-u'(s+0) + u'(s-0) + u(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s),$$

где $u'(s+0)$ означает правую производную $u'_+(s)$, а $u'(s-0)$ – левую производную $u'_-(s)$. Если же в точке s функции $Q(x)$ и $F(x)$ непрерывны, то с толкованием уравнения (1) не возникает никаких сложностей, так как производная $u'(x)$ существует в обычном смысле и интеграл определяется однозначно.

ТЕОРЕМА 1. При любом c в предположении монотонности $Q(x)$ и $F(x)$ уравнение (1) имеет на $[0, 1]$ единственное решение, удовлетворяющее условию $u(1) = c$.

4. Обратимся к точному определению функции влияния, которое теперь можно сделать предельно корректным. На интуитивном уровне функция влияния $K(x, \xi)$ определяется как деформация исходной системы под влиянием единичной силы, приложенной к точке ξ . Для нас это означает, что $F(x) = \theta(x - \xi)$, где $\theta(x)$ – классическая функция Хевисайда, т.е. $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. Пользуясь вариационным описанием исследуемого объекта, мы определяем функцию влияния как решение $K(x, \xi)$ в E уравнения (1) при $F(x) = \theta(x - \xi)$, т.е. уравнения

$$-u'(x) + \int_0^x u dQ = \theta(x - \xi). \quad (11) \quad \{11\}$$

Описанный подход снимает необходимость использовать аппарат теории обобщенных функций, поскольку мы обходим стандартную при определении функции Грина трудность опоры на фундаментальное решение как на обобщенное (по Шварцу–Соболеву) решение уравнения типа $Lu = \delta(x - \xi)$. В рассматриваемом классе E аналог такого решения у нас всегда имеется.

Замечательно то, что равенством (11) можно пользоваться поточечно, что позволяет описать важнейшие свойства функции влияния.

ТЕОРЕМА 2. 1) Если $\xi \neq 0$, то $-K'_x(+0, \xi) + K(0, \xi)\Delta Q(0) = 0$.

2) При $\xi = 0$ $-K'_x(+0, 0) + K(0, 0)\Delta Q(0) = 1$.

3) Если в точке $s \in (0, 1)$ функция $Q(x)$ непрерывна, то

$$K'_x(s + 0, s) - K'_x(s - 0, s) = -1,$$

а если s – точка разрыва $Q(x)$, то

$$K'_x(s + 0, s) - K'_x(s - 0, s) - K(s, s)\Delta Q(s) = -1.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0, 1]$, и пусть $Q \neq \text{const}$. Тогда решение $K(x, \xi)$ уравнения (11) строго положительно на полуинтервале $[0, 1)$, причем максимум решения достигается в точке $\xi \in [0, 1)$ приложения импульса, т.е. $\max_{[0, 1]} K(x, \xi) = K(\xi, \xi)$.

ТЕОРЕМА 4. Решение $u(x)$ уравнения (1) представимо в виде

$$u(x) = \int_0^1 K(x, \xi) dF(\xi).$$

В ходе доказательства теоремы устанавливается, что функция влияния является двупарным ядром, т.е. представима в виде

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\varphi_2(0)} \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(\xi), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ \varphi_2(x)\varphi_1(\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – абсолютно непрерывные функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны. Дополнение II к книге* [3]. [2] W. Feller, *J. Math.*, 1:4 (1957), 459–504. [3] Ф. Аткинсон, *Дискретные и*

непрерывные граничные задачи, Мир, М., 1991. [4] Ю. В. Покорный, *Докл. РАН*, **383**:5 (2002), 1–4.

Ю. В. Покорный

Воронежский государственный университет

E-mail: pokorny@kma.vsu.ru

Поступило

25.09.2005

Е. В. Гулынина

Северо-Кавказский филиал Белгородского государственного
технологического университета им. В. Г. Шухова, г. Минеральные
Воды

E-mail: belgtasm@mw.narzan.com

М. Б. Зверева

Воронежский государственный университет

E-mail: margz@rambler.ru