ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ИЗ КОУРОВСКОЙ ТЕТРАДИ

В. А. Середа, А. И. Созутов

В 11-м издании Коуровской тетради [1] А. В. Тимофеев поставил следующий

Вопрос 11.101. *Существует ли группа Голода (см. 9.76) с конечным центром?*

В литературе пока нет единого мнения, какие группы называть группами Голода. Так в вопросе 8.67 [1] под группой Голода понимается конечно порожденная нильпотентная подгруппа присоединенной группы ассоциативного нилькольца. В вопросе А. В. Тимофеев, как и в 9.76 [1], речь идет о более узком классе групп. Для ясности приведем вопрос В. П. Шункова 9.76 из Коуровской тетради [1].

Вопрос 9.76. *Назовем группой Голода r -порожденную, $r \geq 2$, подгруппу $\text{gr}(1 + x_1 + I, 1 + x_2 + I, \dots, 1 + x_r + I)$ присоединенной группы $1 + F/I$ фактор-алгебры F/I , где F – свободная алгебра многочленов без свободного члена от непостоянных переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$ над полем характеристики $p > 0$, а I – такой ее идеал, что F/I – нильпотентная нильалгебра (см. Е. С. Голод, Изв. АН СССР, 1964, сер. матем., 28, № 1, с. 273–276). Доказать, что в группах Голода централизатор любого элемента бесконечен.*

Заметим, что Тимофеев (Матем. заметки, 39, № 5 (1986), с. 647–650) построил группы Голода с бесконечным центром; независимо и другим способом такой же результат получил в середине 90-х г. Л. Гамуди (L. Hamtoudi).

В данной заметке под группой Голода понимается группа Голода в смысле Шункова. Положительный ответ на вопрос 11.101 Тимофеев вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Если P – группа Голода, то некоторая ее фактор-группа является группой Голода и имеет тривиальный центр.*

Итак, пусть $F = \Phi(x_1, \dots, x_d)$ – ассоциативная алгебра многочленов над полем Φ простой характеристики p от непостоянных переменных $x_1, \dots, x_d$. Алгебра F градуирована, т.е. разлагается в прямую сумму $F = F_0 \oplus F_1 \oplus \dots$ подпространств F_n , где $F_0 \simeq \Phi$, а F_n – векторное пространство над Φ с базисом из d^n мономов $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$ [2]. Обозначим $F^{(1)} = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots$. Рассмотрим ассоциативную алгебру $A = \langle x_1, \dots, x_d \mid f_1, f_2, \dots \rangle$ с единицей, где слева черты стоят порождающие элементы $x_1, \dots, x_d$ алгебры A , а справа – определяющие соотношения $f_1, f_2, \dots$. Алгебра A есть фактор-алгебра свободной алгебры F по идеалу I , порожденному многочленами $f_1, f_2, \dots$ [2]. Указанные соотношения таковы, что $I \leq F^{(1)}$ и $A^{(1)} = F^{(1)}/I$ – бесконечномерная нильалгебра. Легко проверить, что множество элементов $G = 1 + A^{(1)} = \{1 + a \mid a \in A^{(1)}\}$ замкнуто относительно умножения и является p -группой. Группа G называется *присоединенной* к алгебре $A^{(1)}$ [3]. Нильалгебра $A^{(1)}$ над полем Φ бесконечномерна, а подгруппа P группы G , порожденная образами элементов $1 + x_1, \dots, 1 + x_d$, бесконечна, поскольку линейная оболочка множества P совпадает с алгеброй A и P содержит некоторый базис алгебры A . В дальнейшем элементы $f + I$ из фактор-алгебр $A = F/I$, $A^{(1)}$ и элементы $1 + f + I \in G$ будем записывать в коротком виде f и $1 + f$, что не должно вызвать недоразумений.

Группа Голода P , как правило, не совпадает с присоединенной группой G нильалгебры $A^{(1)}$. Одну из причин этого можно увидеть уже в таком простом наблюдении. Пусть для элемента $g \in A^{(1)}$ выполняется $g^n = 0$ и $g^{n-1} \neq 0$. Тогда подалгебра в A , порожденная единицей и элементом g , содержит, по меньшей мере, pn элементов, в то время как подгруппа, порожденная элементом $1 + g$, состоит из $p^k < pn$ элементов $(1 + g)^m = \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i g^i$, где $1 \leq m \leq p^k$, а число k определяется из неравенств

Работа поддержана Красноярским краевым фондом науки, грант 11F202С.

$p^{k-1} < n \leq p^k$. При этом для $m < k$ имеет место равенство $(1+g)^{p^m} = 1+g^{p^m} \neq 1$, а $(1+g)^{p^k} = 1+g^{p^k} = 1$.

Второй момент заключается в следующем. В группе $P = \langle 1+x_1, \dots, 1+x_d \rangle$ содержатся только образы многочленов из $\Phi_0(x_1, \dots, x_d)$, где $\Phi_0 = GF(p)$ – простое подполе поля Φ . Это непосредственно следует из вида порождающих группы P и формулы умножения в P : $(1+f) \cdot (1+g) = 1+f+g+fg$. Поэтому при изучении свойств группы Голода P в смысле Шункова можно считать, что поле Φ совпадает с простым полем $GF(p)$.

Но даже в случае, когда основное поле совпадает со своим простым подполем, у авто-ров есть гипотеза, что подгруппа P в G , как правило, имеет бесконечный индекс. Этим, в частности, можно объяснить долгую жизнь вопросов 8.67, 9.76 из Коуровской тетради, поскольку для всей присоединенной группы G ответы на них известны давно.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы. Итак, пусть $\Phi = GF(p)$. Предположим, что центр $Z(P)$ группы P нетривиален и $1 \neq 1+f \in Z(P)$. Тогда для $1 \leq i \leq d$ выполняется

$$1+x_i+f+x_if = (1+x_i) \cdot (1+f) = (1+f) \cdot (1+x_i) = 1+f+x_i+fx_i,$$

что влечет $fx_i = x_if$ для всех $1 \leq i \leq d$. Отсюда выводим, что элемент f перестановочен со всеми элементами алгебры A , а элемент $1+f$ содержится в центре $Z(G)$ всей присоединенной группы $G = 1+A^{(1)}$. В частности, $Z(P) = P \cap Z(G)$.

Далее, если нильиндекс элемента f равен n , т.е. $f^n = 0$, а $f^{n-1} \neq 0$, то идеал $A^{(1)}fA^{(1)} = K$ алгебры $A^{(1)}$ либо совпадает с нулевым, либо нильпотентен ступени $\leq n$, поскольку для любых элементов $a_1, \dots, a_n, g_1, \dots, g_n \in A^{(1)}$ очевидно выполняется равенство

$$(a_1fg_1) \cdot \dots \cdot (a_nfg_n) = a_1g_1 \cdot \dots \cdot a_ng_n \cdot f^n = 0.$$

Если $K = 0$, то элемент f принадлежит аннулятору $\text{Ann}(A^{(2)})$ подалгебры $A^{(2)}$. Поскольку аннулятор $\text{Ann}(A^{(2)})$ очевидно нильпотентен нильиндекса 3, то в любом случае элемент f принадлежит радикалу Левицкого $\mathfrak{L}(A^{(1)})$ (локально нильпотентному радикалу алгебры $A^{(1)}$ [2, с. 194].

Далее, присоединенная группа $N = 1+\mathfrak{L}(A^{(1)})$ есть нормальная подгруппа группы G [3]. Очевидно, что фактор-алгебра $\bar{A}^{(1)} = A^{(1)}/\mathfrak{L}(A^{(1)})$ порождена образами элементов $x_1, \dots, x_d$ и является нильалгеброй. Поскольку алгебра $A^{(1)}$ не нильпотентна, то и ее фактор-алгебра $\bar{A}^{(1)}$ не нильпотентна и ввиду элементарных свойств радикала Левицкого [2] $\bar{A}^{(1)}$ не содержит ненулевых нильпотентных идеалов.

Стандартные рассуждения показывают, что присоединенная группа $\bar{1}+\bar{A}^{(1)}$ совпадает с фактор-группой G/N , а ее подгруппа Голода, порожденная элементами $1+\bar{x}_1, \dots, 1+\bar{x}_n$, изоморфна фактор-группе $\bar{P} = P/W$, где $W = N \cap P$.

Если бы центр группы $\bar{P}$ был нетривиален, то как и выше, в фактор-алгебре $\bar{A}^{(1)}$ нашелся бы ненулевой нильпотентный идеал, вопреки сказанному выше. Следовательно, $Z(\bar{P}) = \bar{1}$, и теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп, 14-е издание, Новосибирск, 1999. [2] К. А. Жевлаков, А. М. Слинко, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов, *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука, М., 1978. [3] А. И. Мальцев, *Матем. сб.*, **25** (1949), 347–366.

В. А. Середа

Красноярский государственный аграрный университет

Поступило

25.11.2002

А. И. Созутов

Красноярская государственная архитектурно-строительная академия