Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Баранов, Некоторые суммы произведений полиномов Лежандра, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 171–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 03:09:37

УДК 517.514.3; 517.564.4

НЕКОТОРЫЕ СУММЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

А. С. Баранов

Найдены простые выражения для сумм рядов, составленных из произведений трех и четырех полиномов Лежандра порядка n с коэффициентом $2n + 1$ (других переменных, кроме аргументов полиномов, ряды не содержат). Показано, что в случае трех полиномов ряд выражается через величину, обратную корню из четырех синусов, а в случае четырех полиномов эта величина дополнительно умножается на эллиптический интеграл $\mathbf{K}(k)$. Указаны аналогии и частные случаи, обближающие материал заметки с результатами, полученными в различных областях математической физики и классического анализа.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Ряды, составленные из полиномов Лежандра, широко используются в различных областях математической физики. Иногда возникают более сложные случаи, когда суммируются произведения таких полиномов; например, при определении потенциалов заряженных или гравитирующих тел [1], [2]. Суммировать произведения полиномов Лежандра с некоторым коэффициентом приходится и в собственно математических преобразованиях.

Мы вычисляем суммы только весьма частного вида, которые, однако, интересны для теории потенциала. Коэффициентом при произведении полиномов Лежандра одного и того же порядка от разных аргументов служит сомножитель $2n + 1$. Возможность сходимости начинается с тройных произведений (поскольку сам полином Лежандра при больших n ведет себя как $n^{-1/2}$). Мы рассматриваем далее также четверные произведения. Возможно, аналитические приемы позволят выразить в явном виде и суммы с произведениями пяти и более сомножителей.

2. Тройные суммы. Поставим задачу вычисления суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(x) P_n(y) P_n(z), \quad (2.1)$$

где P_n – полиномы Лежандра, а аргументы x, y, z принадлежат интервалу $(-1, 1)$.

Для решения поставленной задачи исходим из известной формулы Кристоффеля–Дарбу [3]

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k + 1}{2} P_k(x) P_k(t) = \frac{n + 1}{2} \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x - t}. \quad (2.2)$$

В дальнейшем будем использовать в качестве независимых угловых переменных λ , φ , ψ и связанные с ними переменные x , y , z :

$$x = \cos \lambda, y = \cos \varphi, z = \cos \psi. \quad (2.3)$$

Введем в обе части (2.2) вместо t выражение

$$t = t(\varphi, \psi, \theta) \equiv \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta,$$

проинтегрируем получившееся равенство по θ от 0 до 2π и применим для вычисления интеграла от $P_k(t(\varphi, \psi, \theta))$ по θ в левой части равенства (2.2) формулу сложения для полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} P_k(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta) = \\ = P_k(\cos \varphi)P_k(\cos \psi) + 2 \sum_{m=1}^k \frac{(k-m)!}{(k+m)!} P_k^m(\cos \varphi)P_k^m(\cos \psi) \cos m\theta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где P_k^m – присоединенная функция Лежандра. При интегрировании уравнения (2.4) по θ от 0 до 2π сумма по m в правой части (2.4) обращается в нуль благодаря сомножителям $\cos m\theta$. В результате интеграл от $P_k(t(\varphi, \psi, \theta))$ в левой части (2.2) сводится к выражению $2\pi P_k(\cos \varphi)P_k(\cos \psi) \equiv 2\pi P_k(y)P_k(z)$. Получаем соотношение

$$2\pi \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(x)P_k(y)P_k(z) = \frac{n+1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} d\theta, \quad (2.5)$$

которое дает интегральное представление ряда (2.1). Это представление служит исходным пунктом дальнейших преобразований.

В (2.5) нам следует перейти к интегрированию по t вместо θ . Имеем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\sin \varphi \sin \psi \sin \theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{[\cos(\varphi - \psi) - t][t - \cos(\varphi + \psi)]}}. \quad (2.6)$$

В дальнейшем предполагаем для определенности

$$x < y < z, \quad \pi > \lambda > \varphi > \psi > 0. \quad (2.7)$$

В (2.6) выбор знака перед радикалом обусловлен тем, что t как функция θ сначала убывает от $\cos(\varphi - \psi)$ при $\theta = 0$ до $\cos(\varphi + \psi)$ при $\theta = \pi$, а при $\pi < \theta < 2\pi$ возрастает симметрично по отношению к предыдущему интервалу. Следовательно, из (2.5) получаем

$$\begin{aligned} \pi \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(x)P_k(y)P_k(z) = \int_{\cos(\varphi+\psi)}^{\cos(\varphi-\psi)} \frac{(n+1)[P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)]}{x-t} \\ \times \frac{dt}{\sqrt{[\cos(\varphi - \psi) - t][t - \cos(\varphi + \psi)]}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для перехода в левой части (2.8) к ряду (2.1) необходимо осуществить предельный переход $n \rightarrow \infty$. Поэтому для представления числителя в правой части (2.8) следует использовать соответствующую асимптотику полиномов Лежандра. В ходе преобразований необходимо также учитывать, что разность $x - t$ в знаменателе

подынтегральной дроби в (2.8) в некоторых случаях может принимать малые, в том числе нулевые значения. Таким образом, упомянутый числитель (в квадратных скобках в (2.8)) в точности равен нулю при $x = t$, а в окрестности этой точки по известной асимптотической формуле [3; с. 138], [4; с. 787] получается после элементарных преобразований

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t) = \\ = \frac{2\left[\sin \frac{\lambda-\mu}{2} \cos(n+1)(\lambda+\mu) - \sin \frac{\lambda+\mu}{2} \sin(n+1)(\lambda-\mu)\right]}{\pi(n+1)\sqrt{\sin \mu \sin \lambda}} + A_n(x, t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\mu = \arccos t$, а поправка A_n удовлетворяет неравенству

$$|A_n(x, t)| < \frac{c}{n^2}, \quad (2.10)$$

причем под c мы понимаем положительную величину, зависящую от x , но не от n и t .

Продифференцируем левую часть (2.9) по t . Поведение полученной производной при большом n следует из такой же асимптотики [4], которая применяется в данном случае и для присоединенных функций Лежандра. Формально обе асимптотики – для $P_n(x)$ и $P_n^1(x)$ – связаны обычным дифференцированием, причем поправочный член (тоже быстропеременный) получает при дифференцировании коэффициент $\sim n$. Соответствующее дифференцирование левой и правой части (2.9) также, следовательно, законно. Возвращаясь путем интегрирования по t от x до t к исходной функции, получаем вариант той же формулы (2.9), но с иной оценкой

$$|A_n(x, t)| < \frac{c_1|x-t|}{n} \quad (2.11)$$

(с другим $c_1 > 0$).

С возможностью малости $|x-t|$ надо считаться не всегда, а только в том случае, когда точка x попадает в интервал интегрирования в (2.8). Рассмотрим далее именно этот случай, выражаемый в терминах угловых переменных условием

$$\varphi - \psi < \lambda < \min\{\varphi + \psi, 2\pi - \varphi - \psi\}. \quad (2.12)$$

Из оценок (2.10) и (2.11) можно составить еще одну, взяв среднее геометрическое правых частей:

$$|A_n(x, t)| < \frac{\sqrt{cc_1|x-t|}}{n^{3/2}}. \quad (2.13)$$

Итак, при преобразовании (2.8) согласно (2.9) поправка A_n числителя подынтегрального выражения (2.8) мажорируется правой частью (2.13). Будучи проинтегрирована, эта поправка дает вклад порядка $n^{-1/2}$. Следовательно, обращение с (2.9) как с точной формулой меняет правую часть (2.8) только на бесконечно малую величину при $n \rightarrow \infty$.

Далее, переходим в (2.8) к переменной интеграции μ и выделим более простую сингулярность:

$$\frac{1}{x-t} = \frac{1}{\cos \lambda - \cos \mu} = -\frac{1}{(\lambda - \mu) \sin \lambda} + f(\lambda, \mu),$$

где f – непрерывная функция. С учетом (2.10) вкладом от нее в (2.8) можно пренебречь, так как он имеет порядок n^{-1} . С указанными оговорками (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \pi \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(z) = \\ = \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{\sin((\lambda - \mu)/2) \cos(n+1)(\lambda + \mu) - \sin((\lambda + \mu)/2) \sin(n+1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{[\cos(\varphi - \psi) - \cos \mu][\cos \mu - \cos(\varphi + \psi)]}} \\ \times \sqrt{\frac{\sin \mu}{\sin^3 \lambda}} \frac{d\mu}{\mu - \lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $a = \varphi - \psi$, $b = \varphi + \psi$ (или $2\pi - \varphi - \psi$). В последующих формулах также верхний предел $\varphi + \psi$ заменяется на $2\pi - \varphi - \psi$, если $\varphi + \psi > \pi$.

Первый член подынтегрального выражения в (2.14) опять-таки мал. Действительно, его можно записать в виде

$$\int_{\varphi-\psi}^{\varphi+\psi} q(\mu) \cos[(n+1)(\lambda + \mu)] d\mu, \quad (2.15)$$

где $q(\mu)$ не зависит от n и представляется как

$$q(\mu) = \frac{\xi}{\sqrt{\mu - (\varphi - \psi)}} + \frac{\eta}{\sqrt{\varphi + \psi - \mu}} + q_1(\mu) \quad (2.16)$$

с некоторыми $\xi, \eta = \text{const}$ и выделенной непрерывной частью $q_1(\mu)$. Так как

$$\begin{aligned} \int_{\varphi-\psi}^{\varphi+\psi} \frac{\cos(n+1)(\lambda + \mu)}{\sqrt{\mu - (\varphi - \psi)}} d\mu &= 2 \int_0^{\sqrt{2\psi}} \cos[(n+1)(\lambda + \varphi + \psi + s^2)] ds \\ &= \frac{2 \cos(\lambda + \varphi + \psi)}{\sqrt{n+1}} \int_0^{\sqrt{2(n+1)\psi}} \cos s^2 ds - \frac{2 \sin(\lambda + \varphi + \psi)}{\sqrt{n+1}} \int_0^{\sqrt{2(n+1)\psi}} \sin s^2 ds, \end{aligned}$$

где интегралы Френеля сходятся при больших значениях аргумента, то вклад от сингулярных членов (2.16) имеет порядок $1/\sqrt{n}$. От регулярной же части (2.16), если формально ее доопределить на всю вещественную ось переменной μ , положив равной нулю вне интервала интегрирования $(\varphi - \psi, \varphi + \psi)$, получается вклад

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} q_1(\mu) \cos[(n+1)(\lambda + \mu)] d\mu \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[q_1(\mu) - q_1\left(\mu - \frac{\pi}{n+1}\right) \right] \cos[(n+1)(\lambda + \mu)] d\mu, \end{aligned}$$

также стремящийся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Наконец, интеграл от второго члена в (2.14) представляется в виде

$$\begin{aligned} \int_{\varphi-\psi}^{\varphi+\psi} \frac{\sin[(n+1)(\mu - \lambda)]}{\mu - \lambda} T(\mu) d\mu \\ = \int_{\varphi-\psi}^{\varphi+\psi} \left\{ \sin[(n+1)(\mu - \lambda)] T(\lambda) + \sin[(n+1)(\mu - \lambda)] [T(\mu) - T(\lambda)] \right\} \frac{d\mu}{\mu - \lambda}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$T(\mu) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin((\lambda + \mu)/2)}{\sqrt{[\cos(\varphi - \psi) - \cos \mu][\cos \mu - \cos(\varphi + \psi)]}} \sqrt{\frac{\sin \mu}{\sin^3 \lambda}}. \quad (2.18)$$

Последний член в (2.17) дает малый вклад. Это доказывается по предыдущему образцу. В результате правая часть (2.17) приобретает форму выражения

$$T(\lambda) \int_{\varphi-\psi}^{\varphi+\psi} \frac{\sin(n+1)(\mu - \lambda)}{\mu - \lambda} d\mu = T(\lambda) \int_{(n+1)(\varphi-\psi-\lambda)}^{(n+1)(\varphi+\psi-\lambda)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau.$$

Входящий сюда интеграл в пределе сводится к интегралу Дирихле, что дает для этого выражения оценку $\pi T(\lambda)$. Остается подставить в (2.18) $\mu = \lambda$, и мы находим искомую сумму ряда

$$\pi \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(z) = 2[\cos(\varphi - \psi) - \cos \lambda]^{-1/2} [\cos \lambda - \cos(\varphi + \psi)]^{-1/2} \quad (2.19)$$

при

$$\varphi - \psi < \lambda < \min\{\varphi + \psi, 2\pi - \varphi - \psi\}. \quad (2.20)$$

Вне области (2.20) сингулярный член в (2.17) отсутствует и правую часть (2.19) надо просто заменить нулем. Элементарное преобразование приводит (2.19) к более симметричной форме

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(z) \\ = \frac{1}{\pi \sqrt{\sin \frac{\lambda - \varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi + \lambda}{2} \sin \frac{\varphi + \psi - \lambda}{2} \sin \frac{\varphi + \psi + \lambda}{2}}} \end{aligned} \quad (2.21)$$

в той же области (2.20). Условие (2.20) можно кратко выразить как требование положительности всех синусоидальных множителей (2.21).

Для проверки можно рассмотреть частный случай $x = y = 0$, т.е. $\varphi = \lambda = \pi/2$. Получаемая из (2.19) и (2.21) формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right]^2 P_{2n}(z) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-z^2}}, \quad |z| < 1,$$

тождественна с приводимой в руководствах [3; формула (12), с. 164], [5; 8.922 (3), с. 1041].

3. Четверные суммы. К четверным произведениям переходим, взяв две формулы (2.19), именно, для некоторых x, y, z и для другой тройки x', y', z , после чего перемножаем обе формулы и берем интеграл по z от -1 до 1 . Предварительно построим представляющие интерес неравенства для углов $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$, связанных с x, y, x', y' соотношениями прежнего вида $x = \cos \lambda, y = \cos \varphi, x' = \cos \lambda', y' = \cos \varphi'$.

Без ограничения общности далее предполагаем

$$\pi > \lambda > \varphi > \lambda' > \varphi' > 0. \quad (3.1)$$

Тогда в силу предыдущего вклад в интеграл по $z = \cos \psi$ отличен от нуля только при одновременном выполнении неравенств

$$\begin{aligned} 0 < \lambda - \varphi + \psi < 2\pi, & \quad 0 < \varphi - \psi + \lambda < 2\pi, \\ 0 < \varphi + \psi - \lambda < 2\pi, & \quad 0 < \varphi + \psi + \lambda < 2\pi, \\ 0 < \lambda' - \varphi' + \psi < 2\pi, & \quad 0 < \varphi' - \psi + \lambda' < 2\pi, \\ 0 < \varphi' + \psi - \lambda' < 2\pi, & \quad 0 < \varphi' + \psi + \lambda' < 2\pi. \end{aligned}$$

Из этих неравенств некоторые выполняются автоматически в силу (3.1). Остаются условия

$$\psi < \varphi' + \lambda', \quad \psi > \lambda - \varphi, \quad \psi < 2\pi - \varphi - \lambda, \quad \psi > \lambda' - \varphi'. \quad (3.2)$$

Остается открытым вопрос, является ли первое неравенство более сильным, чем третье или наоборот. Первый вариант означает

$$\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda < 2\pi, \quad (3.3)$$

а во втором случае

$$\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda > 2\pi. \quad (3.4)$$

Аналогично второе неравенство (3.2) может оказаться сильнее четвертого, тогда

$$\varphi' - \lambda' - \varphi + \lambda > 2\pi. \quad (3.5)$$

Возможно и обратное соотношение

$$\varphi' - \lambda' - \varphi + \lambda < 2\pi. \quad (3.6)$$

Всего возможны шесть случаев, получающихся комбинированием (3.3), (3.4) с (3.5), (3.6).

- I) $\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda < 2\pi$, $\varphi + \lambda' > \varphi' + \lambda$;
- II) $\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda > 2\pi$, $\varphi + \lambda' > \varphi' + \lambda$, $\varphi + \lambda + \lambda' - \varphi' < 2\pi$;
- III) $\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda > 2\pi$, $\varphi + \lambda' < \varphi' + \lambda$;
- IV) $\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda < 2\pi$, $\varphi + \lambda' < \varphi' + \lambda$, $\varphi' + \lambda' - \lambda + \varphi > 0$;
- V) $\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda > 2\pi$, $\varphi + \lambda' > \varphi' + \lambda$, $\varphi + \lambda + \lambda' - \varphi' > 2\pi$;
- VI) $\varphi' + \lambda' + \varphi + \lambda < 2\pi$, $\varphi + \lambda' < \varphi' + \lambda$, $\varphi' + \lambda' - \lambda + \varphi < 0$.

Последние два случая выражают возможность того, что неравенства (3.2) иногда оказываются взаимно несовместимыми.

Например, в случае I) интегрирование по ψ дает ненулевой вклад от $\lambda' - \varphi'$ до $\varphi' + \lambda'$, а по z соответственно от $\cos(\varphi' + \lambda')$ до $\cos(\lambda' - \varphi')$. Из формулы (2.19) после вышеуказанного перемножения и интегрирования находим в результате некоторых преобразований

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(x') P_k(y') = \\ = 4 \int_{\cos(\varphi' + \lambda')}^{\cos(\lambda' - \varphi')} \frac{dz}{\sqrt{[\cos(\lambda - \varphi) - z][z - \cos(\lambda + \varphi)][\cos(\lambda' - \varphi') - z][z - \cos(\lambda' + \varphi')]}}, \end{aligned}$$

Следуя [6], введем обозначения

$$\alpha_1 = \cos(\lambda - \varphi), \quad \alpha_2 = \cos(\lambda' - \varphi'), \quad \alpha_3 = \cos(\lambda' + \varphi'), \quad \alpha_4 = \cos(\lambda + \varphi).$$

Тогда получаем нормальную форму для эллиптического интеграла

$$2\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(x') P_k(y') = \frac{8}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} \mathbf{K}(k),$$

$$k^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_3} \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_4}.$$

Элементарные преобразования дают

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= 2 \sin \frac{\lambda' + \varphi' - \lambda + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda - \varphi + \lambda' + \varphi'}{2}, \\ \alpha_2 - \alpha_4 &= 2 \sin \frac{\lambda + \varphi - \lambda' + \varphi'}{2} \sin \frac{\lambda' - \varphi' + \lambda + \varphi}{2}, \\ k^2 &= \frac{\sin \lambda \sin \varphi \sin \lambda' \sin \varphi'}{\sin \frac{\lambda' + \varphi' - \lambda + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda - \varphi + \lambda' + \varphi'}{2} \sin \frac{\lambda + \varphi - \lambda' + \varphi'}{2} \sin \frac{\lambda' - \varphi' + \lambda + \varphi}{2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Итак, в данном случае

$$\begin{aligned} \pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(x') P_k(y') &= \\ &= 2\mathbf{K}(k) \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\lambda' + \varphi' - \lambda + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda - \varphi + \lambda' + \varphi'}{2} \sin \frac{\lambda + \varphi - \lambda' + \varphi'}{2} \sin \frac{\lambda' - \varphi' + \lambda + \varphi}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где модуль k задается формулой (3.7).

В случае II) интегрирование по ψ дает ненулевой результат от $\lambda' - \varphi'$ до $2\pi - \varphi - \lambda$, а по z соответственно от $\cos(\varphi + \lambda)$ до $\cos(\lambda' - \varphi')$. Получаем

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(x') P_k(y') &= \\ &= 4 \int_{\cos(\varphi + \lambda)}^{\cos(\lambda' - \varphi')} \frac{dz}{\sqrt{[\cos(\lambda - \varphi) - z][z - \cos(\lambda + \varphi)][\cos(\lambda' - \varphi') - z][z - \cos(\lambda' + \varphi')]}}, \end{aligned}$$

Теперь в порядке убывания $\alpha_1 = \cos(\lambda - \varphi)$, $\alpha_2 = \cos(\lambda' - \varphi')$, $\alpha_3 = \cos(\lambda + \varphi)$, $\alpha_4 = \cos(\lambda' + \varphi')$, и поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3 &= 2 \sin \lambda \sin \varphi, \quad \alpha_2 - \alpha_4 = 2 \sin \lambda' \sin \varphi', \\ k^2 &= \frac{\sin \frac{\lambda' + \varphi' - \lambda + \varphi}{2} \sin \frac{\lambda - \varphi + \lambda' + \varphi'}{2} \sin \frac{\lambda + \varphi - \lambda' + \varphi'}{2} \sin \frac{\lambda' - \varphi' + \lambda + \varphi}{2}}{\sin \lambda \sin \varphi \sin \lambda' \sin \varphi'}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(x') P_k(y') = \frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi^2 \sqrt{\sin \lambda \sin \varphi \sin \lambda' \sin \varphi'}}. \quad (3.10)$$

В случае III) интегрирование по ψ дает ненулевой результат от $\lambda - \varphi$ до $2\pi - \varphi - \lambda$, а при интегрировании по z от $\cos(\varphi + \lambda)$ до $\cos(\lambda - \varphi)$. Поэтому

$$\begin{aligned} 2\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(x) P_k(y) P_k(x') P_k(y') &= \\ &= 4 \int_{\cos(\lambda + \varphi)}^{\cos(\lambda - \varphi)} \frac{dz}{\sqrt{[\cos(\lambda - \varphi) - z][z - \cos(\lambda + \varphi)][\cos(\lambda' - \varphi') - z][z - \cos(\lambda' + \varphi')]}}, \end{aligned}$$

так что теперь $\alpha_1 = \cos(\lambda' - \varphi')$, $\alpha_2 = \cos(\lambda - \varphi)$, $\alpha_3 = \cos(\lambda + \varphi)$, $\alpha_4 = \cos(\lambda' + \varphi')$ и формулы случая I) сохраняют силу.

Наконец, в случае IV) интегрирование по ψ дает ненулевой вклад от $\lambda - \varphi$ до $\varphi' + \lambda'$, а по z – от $\cos(\varphi' + \lambda')$ до $\cos(\lambda - \varphi)$. Этот случай симметричен случаю II) и формулы (3.9), (3.10) сохраняют силу. Наконец, в случаях V) и VI) сумма четвертых произведений обращается в нуль. Одна из возможностей проверки полученных формул состоит в подстановке $\lambda = \varphi = \lambda' = \pi/2$, $\varphi' \in (0, \pi/2)$. Тогда имеет место случай I), и мы приходим к тождеству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n+1) [(2n-1)!!]^3}{2^{3n} (n!)^3} P_{2n}(\cos \theta) = \frac{4\mathbf{K}(\sin \theta)}{\pi^2},$$

эквивалентному приведенному в [5; 8.928 (1), с. 1043]. (Правда, в [5] ошибочно не поставлен модуль полного эллиптического интеграла $\mathbf{K}$, именно $k = \sin \theta$.) Частный случай при $\theta = 0$ см. в [7; формула (1.2), с. 16].

4. Заключение. Подчеркнем, что изученные нами ряды являются, вообще говоря, лишь условно сходящимися (абсолютная сходимость начинается только с произведений пяти сомножителей). В оставленных нами в стороне случаях обращения неравенств, разграничивающих отдельные варианты, в точные равенства наши ряды расходятся – это нетрудно видеть уже из элементарного применения асимптотики полиномов Лежандра.

Некоторые сходные и частные результаты, как мы видим, содержатся в распространенных руководствах, но в целом приведенные результаты, видимо, являются новыми.

Автор искренне признателен В. А. Антонову за постоянный интерес и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова, К. В. Холшевников, *Введение в теорию ньютоновского потенциала*, Наука, М., 1988.
- [2] Б. П. Кондратьев, *Теория потенциала и фигуры равновесия*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2003.
- [3] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.
- [4] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, М., 1978.
- [5] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений*, Наука, М., 1971.
- [6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции Ламе и Маттье*, Наука, М., 1967.
- [7] Г. Харди, *Двенадцать лекций о Рамануджане*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.

А. С. Баранов

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория
E-mail: baranov@gao.spb.ru

Поступило

30.06.2004

Исправленный вариант

26.02.2006