Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Жижиашвили, О некоторых интегральных свойствах многомерного оператора Гильберта, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 179–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:06:54

УДК 517.518

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТА

Л. В. Жижиашвили

В настоящей статье исследуется вопрос об интегральных свойствах многомерных преобразований Гильберта.

Библиография 15 названий.

Посвящается 100-летию
со дня рождения С. М. Никольского.

1. Обозначения и определения. В дальнейшем $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, будет обозначать n -мерное евклидово пространство с обычными линейными операциями; при этом считается, что $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Точки пространства $\mathbb{R}^n$ обозначаются через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $\dots$. Мы будем пользоваться некоторыми обозначениями из работ [1], [2]. Пусть $M = \{1, 2, \dots, n\}$, а B – его произвольное подмножество. Считаем, что $B' = M \setminus B$, $|B|$ – число элементов множества M . Если $x \in \mathbb{R}^n$, то для произвольного непустого подмножества B символом x_B обозначим такую точку из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, координаты которой с индексами из множества B совпадают с соответствующими координатами точки x , координаты же с индексами из множества B' – нули ($x_M \equiv x$). Символом $\mathbb{R}^n(B)$ обозначим гиперплоскость, натянутую на координатные векторы, индексы которых составляют множество B , а через dx – меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать вещественные функции $f: R^n \rightarrow R$. Если функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1, +\infty[$, то

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Если функция $f \in L(\mathbb{R}^n)$, то выражение

$$\tilde{f}_B(x) = \frac{1}{\pi^{|B|}} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n(B)} f(x_{B'} + s_B) \prod_{i \in B} \frac{1}{t_i - x_i} dt_i \quad (1.1)$$

будем называть *преобразованием (оператором) Гильберта n переменных* относительно тех переменных, индексы которых составляют множество B .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $n = 1$ и функция $f \in L(\mathbb{R})$, то $\tilde{f}_B(x) \equiv \tilde{f}(x)$ – одномерное преобразование Гильберта, которое [3], [4], [5; с. 191], [6; с. 364], [7; с. 127–135] определено для почти всех $x \in \mathbb{R}$ равенством

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt.$$

В случае $n \geq 2$ при $2 \leq |B| \leq n$ преобразование $\tilde{f}_B$ функции $f \in L(\mathbb{R}^n)$ может не существовать почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Поэтому при $n \geq 2$ определение (1.1) формальное.

Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Положим

$$\mathbb{R}^n(B, x, \varepsilon) = \{t \in \mathbb{R} : |t_i - x_i| \geq \varepsilon_i, \quad i \in B\}. \quad (1.2)$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ максимальный оператор по координатам, индексы которых составляют множество B , определяем (при $n \geq 2$ – формально) как

$$F_1(x) \equiv F_1(x, f, B) = \sup_{\varepsilon} \left| \frac{1}{\pi^{|B|}} \int_{\mathbb{R}^n(B, x, \varepsilon)} f(x_{B'} + t_B) \prod_{i \in B} \frac{1}{t_i - x_i} dt_i \right|. \quad (1.3)$$

Заметим, что одномерный максимальный оператор F_1 конечен почти всюду на $\mathbb{R}$.

Далее, для функции $f \in L(\mathbb{R}^n)$ будем полагать, что

$$\tilde{f}_B(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi^{|B|}} \int_{\mathbb{R}^n(B, x, \varepsilon)} f(x_{B'} + t_B) \prod_{i \in B} \frac{dt_i}{t_i - x_i}. \quad (1.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ниже через $A, A(p), A(f), A(p, n), \dots$ обозначаются, вообще говоря, различные положительные величины, зависящие лишь от указанных параметров.

2. Постановка вопроса. Хорошо известно ([8], [9], [5; с. 176], [6; с. 383], [7; с. 127–135], [10], [11; с. 243–247]), что если функция $f \in L^p(\mathbb{R})$ при некотором $p \in]1, +\infty[$, то $\tilde{f}$ существует почти всюду, $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ и

$$\|\tilde{f}\|_p \leq A(p) \|f\|_p, \quad (2.1)$$

причем соотношение (2.1) справедливо и для F_1 , т.е.

$$\|F_1\|_p \leq A(p) \|f\|_p. \quad (2.2)$$

Если же $f \in L(R)$, то $\tilde{f}$ существует почти всюду (см., например, [5; с. 191–192]), и для любого $p \in]0, 1[$ справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{1+x^2} dx < +\infty. \quad (2.3)$$

Добавим, что условие $f \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mathbb{R})$ не гарантирует суммируемости на $\mathbb{R}$ преобразования $\tilde{f}$.

Кобер [12], [13] усилил сформулированное утверждение Титчмарша (см. (2.3)). В частности, в работе [12] он установил, что если функция $f \in L(\mathbb{R})$, то для интегрируемости $\tilde{f}$ на $\mathbb{R}$ необходимо условие

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

Если $n \geq 2$, то для $f \in L(\mathbb{R}^n)$ преобразования Гильберта $\tilde{f}_B$ с $2 \leq |B| \leq n$ могут не существовать почти всюду на $\mathbb{R}^n$ (см. [1; с. 132–151, 161–164], [2; с. 32–40]). Стало быть, вопрос об их интегральных свойствах некорректен.

Используя метод Сокол-Соколовского [14] и результаты Рисса [8], [9], можно заключить, что если функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in]1, +\infty[$, то все операторы $\tilde{f}_B$ с $1 \leq |B| \leq n$ существуют почти всюду на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|\tilde{f}_B\|_p \leq A(p, n)\|f\|_p. \quad (2.5)$$

Аналогично, опираясь на известные результаты (см., например, [6; с. 450], [10], [11; с. 243–247]) убеждаемся, что если функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in]1, +\infty[$, то для любого B с $1 \leq |B| \leq n$ оператор F_1 из (1.3) принадлежит классу $L^p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|F_1\|_p \leq A(p, n)\|f\|_p. \quad (2.6)$$

Возник вопрос: какой аналог имеет результат Кобера [12] (см. (2.4)) для многомерных операторов Гильберта?

Ниже этот вопрос решается.

3. Об аналоге теоремы Кобера для многомерных операторов Гильберта. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f \in L(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Если для некоторого $B \subset M$ с $2 \leq |B| \leq n$ преобразование $\tilde{f}_B \in L(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(x) dx = 0. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже будет установлено более общее утверждение, из которого, в частности, вытекают соотношения (3.1).

Используя условия сформулированной теоремы и обозначения (1.1), (1.4), будем иметь

$$\lim_{\varepsilon_B \rightarrow 0+} \tilde{f}_B(x, \varepsilon) = \tilde{f}_B(x) \quad (3.2)$$

почти всюду на $\mathbb{R}^n$ при любом B с $1 \leq |B| \leq n$, причем $\tilde{f}_B \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{f}_B(\cdot, \varepsilon) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $F_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, где F_1 определено в силу (1.4).

Для преобразования Фурье функции f по тем координатам, индексы которых составляют множество B , будем использовать следующее обозначение:

$$T_B(f)(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{|B|} \int_{\mathbb{R}^n(B)} f(t_B + x_{B'}) e^{i(t_B \cdot x_B)} \prod_{i \in B} dt_i, \quad 2 \leq |B| \leq n. \quad (3.3)$$

Далее, если

$$g_\eta(s) = \begin{cases} 0, & |s| \leq \eta, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s}, & \eta < |s| < +\infty, \quad \eta > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

то согласно (1.4) выражение $\tilde{f}_B(x, \varepsilon)$ можно представить следующим образом:

$$\tilde{f}_{B, \varepsilon}(x) \equiv \tilde{f}_B(x, \varepsilon) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{|B|} \int_{\mathbb{R}^n(B)} f(t_B + x_{B'}) \prod_{i \in B} g_{\varepsilon_i}(t_i - x_i) dt_i. \quad (3.5)$$

Используя хорошо известные результаты (см., например, [5; с. 119–122], [11; с. 245]), можно сделать следующее заключение:

$$T_B(\tilde{f}_{B,\varepsilon})(x) = T_B(f)(x) \prod_{i \in B} T(g_{\varepsilon_i})(x_i), \quad (3.6)$$

где $T(g)(x)$ – одномерное преобразование Фурье функции g .

Принимая во внимание условия теоремы 3.1, согласно известной теореме Планшереля (см., например, [5; с. 92–102], [6; с. 374–375], [11; с. 25–26]) будем иметь

$$\|T_B(\tilde{f}_B) - T_B(\tilde{f}_{B,\varepsilon})\|_2 = \|\tilde{f}_B - \tilde{f}_{B,\varepsilon}\|_2. \quad (3.7)$$

Далее, предположим, что

$$\varepsilon_i = \frac{1}{m_i}, \quad m_i \rightarrow \infty, \quad i \in B,$$

и $m(B) = (m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_k})$ для $B = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Тогда в силу (3.7) находим

$$\lim_{m(B) \rightarrow \infty} \|T_B(\tilde{f}_B) - T_B(\tilde{f}_{B, \frac{1}{m}})\|_2 = 0. \quad (3.8)$$

Согласно нашим предложениям $(m(B))$ – k -кратная последовательность (так как $|B| = k$). Опираясь на (3.8), можно выделить подпоследовательность, зависящую лишь от одного натурального индекса $(\nu_1(\alpha), \dots, \nu_k(\alpha))$ такую, что если в $T_B(\tilde{f}_B, 1/m)(x)$ вместо $1/m$ возьмем $1/\nu(\alpha)$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T_B\left(\tilde{f}_B, \frac{1}{\nu(\alpha)}\right)(x) = T_B(\tilde{f}_B)(x)$$

почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Тогда, перейдя к пределу в равенстве (3.6), будем иметь

$$T_B(\tilde{f}_B)(x) = (-1)^{|B|} T_B(f)(x) \prod_{i \in B} \text{sign } x_i \quad (3.9)$$

почти всюду на $\mathbb{R}^n(B)$. Следует добавить, что x_ν , $\nu \in B'$, фиксированы. Затем, легко видеть, что

$$(-i)^{|B|} = 1 \quad \text{при} \quad |B| = 4k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.10)$$

$$(-i)^{|B|} = -1 \quad \text{при} \quad |B| = 2k - 2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

$$(-i)^{|B|} = i \quad \text{при} \quad |B| = 4k - 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

$$(-i)^{|B|} = -i \quad \text{при} \quad |B| = 4k - 3, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Далее, обозначим через U подмножества B с четным числом элементов. Будем также предполагать, что $V = B \setminus U$. Имеем

$$\prod_{i \in B} \text{sign } x_i = 1 \quad \text{при} \quad x_i \in]0, +\infty[, \quad i \in B, \quad (3.14)$$

$$\prod_{i \in B} \text{sign } x_i = 1 \quad \text{при} \quad x_i \in]-\infty, 0[, \quad i \in U, \quad x_j \in]0, +\infty[, \quad j \in V, \quad (3.15)$$

$$\prod_{i \in B} \text{sign } x_i = -1 \quad \text{при} \quad x_i \in]0, +\infty[, \quad i \in U, \quad x_j \in]-\infty, 0[, \quad j \in V. \quad (3.16)$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$H_1 \equiv H_1(B) = \{x_B: x_i \in]0, +\infty[, \quad i \in B, \quad |B| = 4k, \quad k \in \mathbb{N}\}, \quad (3.17)$$

$$H_2 \equiv H_2(B) \equiv H_2(B, U, V) = \{x_B: x_i \in]-\infty, 0[, \quad i \in U, \\ x_j \in]0, +\infty[, \quad j \in V, \quad |B| = 4k, \quad k \in \mathbb{N}\}, \quad (3.18)$$

$$H_3 \equiv H_3(B) = \{x_B: x_i \in]0, +\infty[, \quad i \in B, \quad |B| = 4k - 2, \quad k \in \mathbb{N}\}, \quad (3.19)$$

$$H_4 \equiv H_4(B) \equiv H_4(B, U, V) = \{x_B: x_i \in]-\infty, 0[, \quad i \in U, \\ x_j \in]0, +\infty[, \quad j \in V, \quad |B| = 4k - 2, \quad k \in \mathbb{N}\}, \quad (3.20)$$

$$H_5 \equiv H_5(B) = \{x_B: x_i \in]0, +\infty[, \quad i \in B, \quad |B| = 4k - 1, \quad k \in \mathbb{N}\}, \quad (3.21)$$

$$H_6 \equiv H_6(B) \equiv H_6(B, U, V) = \{x_B: x_i \in]-\infty, 0[, \quad i \in U, \\ x_j \in]0, +\infty[, \quad j \in V, \quad |B| = 4k - 1, \quad k \in \mathbb{N}\}, \quad (3.22)$$

$$H_7 \equiv H_7(B) = \{x_B: x_i \in]0, +\infty[, \quad i \in B, \quad |B| = 4k - 3, \quad k \in \mathbb{N}\}, \quad (3.23)$$

$$H_8 \equiv H_8(B) \equiv H_8(B, U, V) = \{x_B: x_i \in]-\infty, 0[, \quad i \in U, \\ x_j \in]0, +\infty[, \quad j \in V, \quad |B| = 4k - 3, \quad k \in \mathbb{N}\}. \quad (3.24)$$

Если в множествах (3.17)–(3.24) предполагается $x_i \in]-\infty, 0]$, $i \in U$, $x_j \in [0, +\infty[$, $j \in V$, $x_i \in [0, +\infty[$, $i \in B$, а остальные предположения не меняются, то их будем обозначать через $\overline{H}_s$, $s = \overline{1, 8}$.

Предположим, что

$$\varphi(t_B, x_B) = \sum_{U \subset B} i^{|U|} \prod_{i \in U} \sin t_i x_i \prod_{j \in V} \cos t_j x_j, \quad (3.25)$$

$$\psi(t_B, x_B) = \sum_{V \subset B} i^{|V|} \prod_{i \in V} \sin t_i x_i \prod_{j \in U} \cos t_j x_j, \quad (3.26)$$

причем считаем, что

$$\prod_{i \in U} \sin t_i x_i = 1 \quad \text{при} \quad |U| = 0, \quad \prod_{j \in V} \cos t_j x_j = 1 \quad \text{для} \quad |V| = 0.$$

Нетрудно проверить, что для $B \subset M$ с $2 \leq |B| \leq n$ каждое из выражений φ и ψ содержит $2^{|B|-1}$ слагаемых.

Затем, используя (3.25) и (3.26), будем иметь

$$e^{i(t_B \cdot x_B)} = \varphi(t_B, x_B) + i\psi(t_B, x_B), \quad 2 \leq |B| \leq n. \quad (3.27)$$

Вычисляя и приравнивая вещественные и мнимые части в равенстве (3.9) с использованием (3.10)–(3.27), находим

$$\int_{\mathbb{R}^n(B)} \tilde{f}_B(t_B + x_{B'}) \varphi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i = \int_{\mathbb{R}^n(B)} f(t_B + x_{B'}) \varphi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i \quad (3.28)$$

почти всюду на H_1 и H_2 ;

$$\int_{\mathbb{R}^n(B)} \tilde{f}_B(t_B + x_{B'}) \varphi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i = - \int_{\mathbb{R}^n(B)} f(t_B + x_{B'}) \varphi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i \quad (3.29)$$

почти всюду на H_3 и H_4 ;

$$\int_{\mathbb{R}^n(B)} \tilde{f}_B(t_B + x_{B'}) \varphi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i = - \int_{\mathbb{R}^n(B)} f(t_B + x_{B'}) \psi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i \quad (3.30)$$

почти всюду на H_5 и H_6 ;

$$\int_{\mathbb{R}^n(B)} \tilde{f}_B(t_B + x_{B'}) \varphi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i = \int_{\mathbb{R}^n(B)} f(t_B + x_{B'}) \psi(t_B, x_B) \prod_{i \in B} dt_i \quad (3.31)$$

почти всюду на H_7 и H_8 . Соотношения (3.28)–(3.31) справедливы для почти всех фиксированных x_ν , $\nu \in B'$. Учитывая, что по условию функции f и $\tilde{f}_B$ принадлежат к классу $L(\mathbb{R}^n)$, интегрирование равенств (3.28)–(3.31) дает

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi(t_B, x_B) dt \quad (3.32)$$

почти всюду на H_1 и H_2 ;

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = - \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi(t_B, x_B) dt \quad (3.33)$$

почти всюду на H_3 и H_4 ;

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = - \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \psi(t_B, x_B) dt \quad (3.34)$$

почти всюду на H_5 и H_6 ;

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \psi(t_B, x_B) dt \quad (3.35)$$

почти всюду на H_7 и H_8 .

С другой стороны, имеем

$$\|\tilde{f}\|_1 \leq A(\tilde{f}_B), \quad \|f\|_1 \leq A(f).$$

Тогда, опираясь на (3.32)–(3.35), приходим к заключению, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi(t_B, x_B) dt \quad (3.36)$$

всюду на $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$;

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = - \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi(t_B, x_B) dt \quad (3.37)$$

всюду на $\overline{H}_3$ и $\overline{H}_4$;

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = - \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \psi(t_B, x_B) dt \quad (3.38)$$

всюду на $\overline{H}_5$ и $\overline{H}_6$;

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_B(t) \varphi(t_B, x_B) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \psi(t_B, x_B) dt \quad (3.39)$$

всюду на множествах $\overline{H}_7$ и $\overline{H}_8$. Следует добавить, что при заданном B с $2 \leq |B| \leq n$ число этих множеств (в силу их зависимости от U и V) будет $2^{|B|+1}$. Стало быть, в (3.36)–(3.39) имеем $2^{|B|+1}$ равенств.

Таким образом, если в (3.36)–(3.39) положим $x_i = 0$, $i \in B$, то убеждаемся в справедливости (3.1).

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На самом деле, соотношения (3.25), (3.26) и (3.36)–(3.39) показывают, что было доказано более общее утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В том случае, когда $|B| = 1$, справедливость теоремы 1 можно получить с применением соответствующего результата Кобера [12]. Следует добавить, что при $|B| = 1$ требование $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ является лишним. Если же $2 \leq |B| \leq n$, то, как уже было сказано, $\tilde{f}_B$ в классе $L(\mathbb{R}^n)$ может не существовать почти всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q < +\infty$, $p \neq q$, не имеет место вложение пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$ и $L^q(\mathbb{R}^n)$, поэтому предположение $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ в теореме 1 нельзя считать существенным ограничением.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in]1, +\infty[$. Тогда, как уже было отмечено, оператор $\tilde{f}_B$ с $1 \leq |B| \leq n$ почти всюду существует на $\mathbb{R}^n$ и имеет место неравенство (2.1). Добавим, что почти всюду на $\mathbb{R}^n$ справедлива двойственная формула

$$f(x) = \left(-\frac{1}{\pi}\right)^{|B|} \int_{\mathbb{R}^n(B)} \tilde{f}_B(t_B + x_{B'}) \prod_{i \in B} \frac{dt_i}{t_i - x_i}. \quad (3.40)$$

Добавим также, что (3.40) определяется как несобственный интеграл. В частности, почти всюду на $\mathbb{R}^n$

$$\tilde{f}_M(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \prod_{i=1}^n \frac{dt_i}{t_i - x_i}$$

и

$$f(x) = \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_M(t) \prod_{i=1}^n \frac{dt_i}{t_i - x_i}$$

почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Схема доказательства основной теоремы показывает, что теорема справедлива для n -кратных сингулярных операторов в том случае, когда ядром интеграла является прямое произведение простых ядер типа Кальдерона–Зигмунда [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Zhizhiashvili, *Trigonometric Fourier Series and Their Conjugates*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 1996.
- [2] Л. В. Жижиашвили, *Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа*, ТГУ, Тбилиси, 1996.
- [3] A. Besicovitch, “Sur la nature des fonctions a carré sommable mesurables”, *Fund. Math.*, 4 (1923), 172–195.

- [4] A. Besicovitch, "On a general metric property of summable functions", *J. Lond. Math. Soc.*, **1** (1926), 120–128.
- [5] Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, Гостехиздат, М.–Л., 1948.
- [6] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965.
- [7] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Наука, М., 1984.
- [8] M. Riesz, "Les fonctions conjuguées et les series de Fourier", *Comp. Rend.*, **178** (1924), 1464–1467.
- [9] M. Riesz, "Sur les fonctions conjuguées", *Math. Z.*, **27** (1927), 218–244.
- [10] A. Zygmund, *Intégrales Singulières. Lecture Notes in Math.*, **204**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [11] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [12] H. Kober, "A note on Hilbert's operator", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**:1 (1942), 421–426.
- [13] H. Kober, "A note on Hilbert transforms", *J. Lond. Math. Soc.*, **18**:2 (1943), 66–71.
- [14] K. Sokol-Sokolowski, "On trigonometric series conjugate to Fourier series of two variables", *Fund. Math.*, **34** (1947), 166–182.
- [15] A. P. Calderon, A. Zygmund, "On the existence of certain singular integrals", *Acta Math.*, **88**:1–2 (1952), 85–139.

Л. В. Жижиашвили

Тбилисский государственный университет

Поступило

25.05.2005