Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Об условиях совпадения сингулярных чисел (3×3) -матриц с одноточечным спектром, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 187–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:20:31

УДК 519.6

ОБ УСЛОВИЯХ СОВПАДЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ (3 × 3)-МАТРИЦ С ОДНОТОЧЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

Х. Д. Икрамов

Для верхнетреугольной (3×3) -матрицы Γ_a , все три диагональных элемента которой равны числу a , найдены необходимые и достаточные условия совпадения сингулярных чисел. Эти условия много проще равенства $\text{discr } \varphi = 0$, где в левой части стоит дискриминант характеристического многочлена φ матрицы $G_a = \Gamma_a^* \Gamma_a$. Понимание характера поведения сингулярных чисел матрицы Γ_a важно в задаче о нахождении матрицы с тройным собственным значением нуля, ближайшей к заданной нормальной матрице A .

Библиография: 2 названия.

1. Введение. Пусть $M_n(\mathbb{C})$ – множество комплексных $(n \times n)$ -матриц, а $\mathcal{L}$ – его подмножество, состоящее из матриц с кратным собственным значением нуля. Для произвольной матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ определим (спектральное) расстояние до множества $\mathcal{L}$ формулой

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \min_{L \in \mathcal{L}} \|A - L\|_2.$$

В [1] показано, что

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \max_{\gamma \geq 0} \sigma_{2n-1}(F(\gamma)), \quad (1)$$

где

$$F(\gamma) = \begin{pmatrix} A & \gamma I_n \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

а $\sigma_{2n-1}(F(\gamma))$ – предпоследнее сингулярное число матрицы $F(\gamma)$ при упорядочении сингулярных чисел по убыванию.

Для нормальной матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, где

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|,$$

в [2] найдена формула

$$\rho_2(A, \mathcal{L}) = \left(\frac{|\lambda_{n-1}|^2 + |\lambda_n|^2}{2} \right)^{1/2}.$$

Вывод этой формулы основывался на равенстве (1) и исследовании поведения сингулярных чисел матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & \gamma \\ 0 & a \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При фиксированном $a \neq 0$ старшее сингулярное число такой матрицы есть монотонно возрастающая и неограниченная функция неотрицательного параметра γ , а младшее сингулярное число монотонно убывает к нулю.

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$, состоящее из $(n \times n)$ -матриц с собственным значением нуль кратности по меньшей мере три (таким образом, $n \geq 3$). Пусть, как и прежде, A – нормальная $(n \times n)$ -матрица. Определение расстояния $\rho_2(A, \mathcal{M})$ требует исследования поведения сингулярных чисел матриц вида

$$\Gamma_a(\gamma) = \begin{pmatrix} a & \gamma_1 & \gamma_3 \\ 0 & a & \gamma_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (3)$$

как функций от трехмерного векторного параметра

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (4)$$

Подобное исследование оказывается значительно более сложным, чем для двумерных матриц (2). В частности, нетривиальным оказывается вопрос об условиях совпадения сингулярных чисел матрицы $\Gamma_a(\gamma)$.

Заметим, что подлинной особенностью матрицы (3) является не треугольность ее формы (согласно теореме Шура к треугольному виду посредством унитарного подобия можно привести всякую комплексную квадратную матрицу), а одноточечность ее спектра. Если $a \neq 0$, то, пользуясь равенством $\Gamma_a(\gamma) = a\Gamma_1(\gamma/a)$, можно без ограничения общности считать, что $a = 1$. Далее, выполняя с матрицей (3) подходящее диагональное унитарное подобие, можно заменить комплексные числа γ_1 и γ_2 их модулями. Поэтому в дальнейшем мы считаем γ_1 и γ_2 вещественными неотрицательными числами.

Имеется очевидный подход к описанию условий совпадения сингулярных чисел матрицы (3). Квадраты этих чисел суть собственные значения матрицы $G_a = \Gamma_a^* \Gamma_a$, иначе говоря, корни ее характеристического многочлена

$$\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\operatorname{tr} G_a = -(3|a|^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2), \\ \alpha_2 &= 3|a|^4 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2)|a|^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{Re}(\gamma_3 a), \\ \alpha_3 &= -|\det \Gamma_a|^2 = -|a|^6. \end{aligned}$$

Многочлен (5) имеет кратный корень тогда и только тогда, когда равен нулю его дискриминант

$$D = \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 4\alpha_2^3 - 4\alpha_1^3 \alpha_3 + 18\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - 27\alpha_3^2. \quad (6)$$

Будем в соответствии со сказанным выше считать, что $a = 1$, а γ_1 и γ_2 вещественны и неотрицательны. Для комплексного (в общем случае) параметра γ_3 примем представление $\gamma_3 = \xi + i\eta$. Подстановка в (6) формул для коэффициентов α_1 , α_2 и α_3 приводит к громоздкому выражению, содержащему более 120 мономов от γ_1 , γ_2 , ξ и η .

Тем контрастнее выглядит следующий результат, доказываемый в п. 2 настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$, а $\gamma_3 = \xi + i\eta$. Если $a = 1$, то необходимым и достаточным условием совпадения сингулярных чисел матрицы $\Gamma_1(\gamma)$ является выполнение равенств

$$\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma_0, \quad \gamma_0^2 = \frac{\xi^2}{1 + \xi}, \quad \eta = 0. \quad (7)$$

Соответствующее кратное сингулярное число равно

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}. \quad (8)$$

При $a = 0$ для совпадения сингулярных чисел необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad \text{либо} \quad \gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma_0, \quad \gamma_3 = 0. \quad (9)$$

В первом случае кратным сингулярным числом матрицы $\Gamma_0(\gamma)$ является нуль; во втором случае сингулярные числа равны γ_0 , γ_0 , 0.

2. Доказательство теоремы. Доказательство теоремы начнем с более простого случая $a = 0$. Очевидно, что одним из сингулярных чисел при любых γ_1 , γ_2 , γ_3 является $\sigma = 0$. Два других числа суть одновременно сингулярные числа (2×2) -матрицы

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Квадраты этих чисел являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2)x + (\gamma_1 \gamma_2)^2 = 0. \quad (10)$$

При $\gamma_1 \gamma_2 = 0$ один из корней равен нулю и $\sigma = 0$ есть кратное сингулярное число матрицы $\Gamma_0(\gamma)$. Если же $\gamma_1 \gamma_2 \neq 0$, то дискриминант уравнения (10) имеет вид

$$d = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2)^2 - 4(\gamma_1 \gamma_2)^2 = \{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + |\gamma_3|^2\} \{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + |\gamma_3|^2\}.$$

В этом случае условиями совпадения двух ненулевых сингулярных чисел матрицы $\Gamma_0(\gamma)$ являются равенства (9).

Перейдем к случаю $a = 1$. Кратное сингулярное число σ матрицы $\Gamma_1(\gamma)$, будучи возведено в квадрат, дает кратное собственное значение $\lambda = \sigma^2$ матриц

$$G_1(\gamma) = \Gamma_1^*(\gamma) \Gamma_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & 1 + \gamma_1^2 & \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \\ \bar{\gamma}_3 & \gamma_1 \bar{\gamma}_3 + \gamma_2 & 1 + \gamma_2^2 + |\gamma_3|^2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$F_1(\gamma) = \Gamma_1(\gamma) \Gamma_1^*(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 + \gamma_1^2 + |\gamma_3|^2 & \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 & \gamma_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 \bar{\gamma}_3 & 1 + \gamma_2^2 & \gamma_2 \\ \bar{\gamma}_3 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Поскольку матрицы (11) и (12) эрмитовы, кратное собственное значение λ является собственным значением и для каждой их главной (2×2) -подматрицы. В частности, λ есть собственное значение (2×2) -матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 1 + \gamma_1^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 + \gamma_2^2 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 1 + \gamma_1^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

равны

$$\nu_{1,2} = 1 + \frac{\gamma_1^2}{2} \pm \left(\gamma_1^2 + \frac{\gamma_1^4}{4} \right)^{1/2}.$$

Они совпадают при $\gamma_1 = 0$. При $\gamma_1 \neq 0$ больший (соответственно меньший) из корней строго монотонно растет (соответственно убывает) как функция от γ_1^2 . Аналогичные заключения (с заменой γ_1 на γ_2) справедливы для матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 + \gamma_2^2 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$$

(сводящейся к матрице вида (14) посредством транспозиции строк и столбцов).

Итак, λ тогда и только тогда может быть собственным значением сразу для обеих матриц в (13), когда

$$\gamma_1 = \gamma_2.$$

В дальнейшем анализе мы считаем это условие выполненным и полагаем $\gamma_0 \equiv \gamma_1 = \gamma_2$. Поэтому характеристическое уравнение матрицы (14) можно записать как

$$x^2 - (2 + \gamma_0^2)x + 1 = 0. \quad (15)$$

Обратимся теперь к главной подматрице матрицы $G_1(\gamma)$, расположенной в строках и столбцах с номерами 1 и 3. Ее характеристическое уравнение:

$$x^2 - (2 + \gamma_0^2 + |\gamma_3|^2)x + (1 + \gamma_0^2) = 0. \quad (16)$$

Будучи корнем уравнений (15) и (16), λ является корнем и для их разности, т.е. для уравнения

$$-|\gamma_3|^2 x + \gamma_0^2 = 0. \quad (17)$$

При $\gamma_3 = 0$ отсюда следует, что $\gamma_0 = 0$ и все условия (7), а также равенство (8) выполнены. Если $\gamma_3 \neq 0$, то из (17) находим, что

$$\lambda = \frac{\gamma_0^2}{|\gamma_3|^2}. \quad (18)$$

В матрице $G_1(\gamma)$ все еще не рассмотрена главная подматрица

$$\begin{pmatrix} 1 + \gamma_0^2 & \gamma_0(1 + \gamma_3) \\ \gamma_0(1 + \bar{\gamma}_3) & 1 + \gamma_0^2 + |\gamma_3|^2 \end{pmatrix},$$

расположенная в строках и столбцах с номерами 2 и 3. Комбинируя ее характеристическое уравнение

$$x^2 - (2 + 2\gamma_0^2 + |\gamma_3|^2)x + (1 + \gamma_0^2 + \gamma_0^4 + |\gamma_3|^2 - 2\gamma_0^2\xi) = 0 \quad (19)$$

с уравнением (16), получим линейное уравнение

$$-\gamma_0^2x + (\gamma_0^4 + |\gamma_3|^2 - 2\gamma_0^2\xi) = 0. \quad (20)$$

При $\gamma_0 = 0$ отсюда следует, что $\gamma_3 = 0$. Этот случай был рассмотрен выше. Если же $\gamma_0 \neq 0$, то число (18) должно быть решением уравнения (20), откуда получаем соотношение

$$-\gamma_0^4 + \gamma_0^4|\gamma_3|^2 + |\gamma_3|^4 - 2\gamma_0^2|\gamma_3|^2\xi = 0. \quad (21)$$

До сих пор использовались лишь следствия характеристических уравнений (15), (16) и (20), но не сами эти уравнения. Запишем теперь тот факт, что число (18) является корнем уравнения (15), а потому и двух других уравнений:

$$\gamma_0^4 - \gamma_0^4|\gamma_3|^2 + |\gamma_3|^4 - 2\gamma_0^2|\gamma_3|^2 = 0. \quad (22)$$

Складывая (21) и (22), имеем

$$|\gamma_3|^4 = \gamma_0^2|\gamma_3|^2(1 + \xi),$$

откуда следует, что

$$\xi > -1$$

(при $\xi = -1$ получим уже рассмотренный случай $\gamma_3 = 0$) и

$$|\gamma_3|^2 = \gamma_0^2(1 + \xi). \quad (23)$$

Сопоставляя это равенство с (18), находим

$$\lambda = \frac{1}{1 + \xi}, \quad (24)$$

что эквивалентно соотношению (8).

Вычтем теперь (21) из (22) и сократим полученное равенство на $2\gamma_0^2$. Это дает

$$\gamma_0^2 = |\gamma_3|^2(1 - \xi + \gamma_0^2).$$

Заменяя $|\gamma_3|^2$ в правой части в соответствии с (23) и сокращая на γ_0^2 , приходим к соотношению

$$1 = (1 + \xi)(1 - \xi + \gamma_0^2),$$

откуда

$$\xi^2 = \gamma_0^2(1 + \xi).$$

Сопоставляя это равенство с (23), заключаем, что

$$|\gamma_3|^2 = \xi^2,$$

т.е. $\eta = 0$. Таким образом, показана необходимость всех условий (7) и справедливость формулы (8).

Достаточность условий (7) устанавливается путем прямой подстановки выражения (24) в левые части уравнений (5), (15), (17) и (20). Тот факт, что результат подстановки всякий раз оказывается равным нулю, означает, что λ есть собственное значение самой матрицы $G_1(\gamma)$ и трех ее главных подматриц порядка 2. Иначе говоря, определитель и главные миноры порядка 2 эрмитовой матрицы $G_1(\gamma) - \lambda I_3$ равны нулю, откуда следует, что ее ранг не превосходит единицы, т.е. λ есть кратное собственное значение матрицы $G_1(\gamma)$, а $\sigma = \sqrt{\lambda}$ есть кратное сингулярное число матрицы $\Gamma_1(\gamma)$. Теперь теорема доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. N. Malyshev, "A formula for the 2-norm distance from a matrix to the set of matrices with multiple eigenvalues", *Numer. Math.*, **83** (1999), 443–454.
- [2] Х. Д. Икрамов, А. М. Назари, "Об одном замечательном следствии формулы Малышева", *Докл. РАН*, **385**:5 (2002), 599–600.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

26.04.2005

Исправленный вариант

19.12.2005