Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Абанин, И. С. Шабаршина, Характеризация порождающих идеалов в некоторых кольцах целых функций, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 483–493

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 08:23:29

УДК 517.5

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОРОЖДАЮЩИХ ИДЕАЛОВ В НЕКОТОРЫХ КОЛЬЦАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин, И. С. Шабаршина

Пусть E – некоторое кольцо целых в $\mathbb{C}^N$ функций относительно операции поточечного умножения; $f_1, \dots, f_m$ – фиксированный набор ненулевых элементов из E . Идеал $E(f_1, \dots, f_m)$ в E с образующими $f_1, \dots, f_m$ называется порождающим, если $E(f_1, \dots, f_m) = E$. Получена характеристика порождающих идеалов в кольцах целых в $\mathbb{C}^N$ функций, определяемых ростом их максимума модуля, в зависимости от распределения нулевых множеств их образующих. При дополнительном условии быстрого изменения весовых последовательностей, определяющих кольца, установлены критерии для порождающих идеалов, формулируемые в терминах $d(z) := \max_{1 \leq j \leq m} d_j(z)$, где $d_j(z)$ – расстояние от точки $z \in \mathbb{C}^N$ до нулевого множества f_j , $1 \leq j \leq m$. Показано, что в кольцах целых функций, имеющих при фиксированном порядке конечный или минимальный тип, подобная характеристика (т.е. характеристика через $d(z)$) невозможна.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть E – некоторое кольцо целых в $\mathbb{C}^N$ функций относительно операции поточечного умножения; $f_1, \dots, f_m$ – фиксированный набор ненулевых элементов из E . Через $E(f_1, \dots, f_m)$ обозначим идеал в кольце E , порожденный функциями $f_1, \dots, f_m$, т.е.

$$E(f_1, \dots, f_m) := \left\{ f = \sum_{j=1}^m g_j f_j, \quad g_j \in E, \quad 1 \leq j \leq m \right\}.$$

При этом, $f_1, \dots, f_m$ называют его *образующими*. Введенный идеал называется *порождающим*, если $E(f_1, \dots, f_m) = E$. Начиная с работы Карлесона [1], относящейся к кольцу аналитических ограниченных в единичном круге функций, характеристика порождающих идеалов дается через оценки снизу для величины $|f_1(z)| + \dots + |f_m(z)|$ [2]–[5]. В [6] наряду с традиционным получено описание таких идеалов в кольце G всех целых в комплексной плоскости функций конечного порядка в терминах функции расстояния до нулей их образующих. Именно, пусть

$$G := \{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \exists \rho > 0 \exists C > 0 : \ln |f(z)| \leq |z|^\rho + C \quad \forall z \in \mathbb{C} \},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-01041.

$f_j \in [\infty, 0)$, $f_j(z) \neq 0$, $1 \leq j \leq m$. Положим

$$d(z) := \max\{d \geq 0 \mid \exists j : 1 \leq j \leq m, f_j(\zeta) \neq 0 \text{ при } |\zeta - z| \leq d\}.$$

Тогда для того чтобы $G(f_1, \dots, f_m) = G$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $\rho > 0$, что $d(z) \geq \rho^{-1} \exp(-\rho|z|^\rho)$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Отметим, что в [6] аналогичная оценка приводится в несколько более сложной эквивалентной форме.

В настоящей работе получена характеристизация порождающих идеалов в кольцах целых в $\mathbb{C}^N$ функций, определяемых ростом их максимума модуля, в зависимости от распределения нулевых множеств их образующих. В числе примеров пространств, укладывающихся в рамки сформулируемых ниже общих результатов, содержится как G , причем в многомерной ситуации, так и более “тонкие” кольца $[\rho, \infty)$, $[\rho, 0]$ всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций, имеющих соответственно порядок не выше ρ , конечный или минимальный тип при этом порядке. Кроме того, показано, что в этих более “тонких” кольцах полное описание порождающих идеалов в терминах функции $d(z)$ невозможно.

2. Основной результат. Пусть $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная возрастающая функция, для которой $\ln r = o(h(r))$ при $r \rightarrow \infty$ и $h(\exp r)$ – выпуклая на $\mathbb{R}$ функция. Будем называть ее *весовой* или просто *весом*. Полагаем $h(z) := h(|z|)$ для $z \in \mathbb{C}^N$, где $|z|$ – обычная евклидова норма в $\mathbb{C}^N$. По h определим весовое пространство целых в $\mathbb{C}^N$ функций

$$E_h := \{f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \exists C = C_f > 0 : \ln |f(z)| \leq h(z) + C \quad \forall z \in \mathbb{C}^N\}.$$

В силу наложенных на h условий E_h содержит все полиномы. Для неубывающей (невозрастающей) по k последовательности $H = \{h_k\}_{k=1}^\infty$ весов рассмотрим пространство $E(H) := \bigcup_{k=1}^\infty E_{h_k}$ (соответственно $E(H) := \bigcap_{k=1}^\infty E_{h_k}$). Если нам необходимо отличить эти ситуации друг от друга, будем обозначать H через H_∞ в первом случае и через H_0 – во втором. В последующем предполагается и не оговаривается дополнительно, что H_∞ (соответственно H_0) удовлетворяет такому ограничению:

$$\begin{aligned} \forall n \exists m \exists C > 0 : 2h_n(2r) &\leq h_m(r) + C \quad \forall r \geq 0 \\ (\text{соответственно } 2h_m(2r) &\leq h_n(r) + C \quad \forall r \geq 0). \end{aligned} \quad (1)$$

Очевидно, что тогда $E(H)$ имеет структуру кольца относительно операции поточечного умножения и инвариантно относительно дифференцирования.

Пусть g – целая в $\mathbb{C}^N$ отличная от тождественного нуля функция. При фиксированном ζ , лежащем на единичной сфере $S_1 := \{z \in \mathbb{C}^N \mid |z| = 1\}$, обозначим через $n_g(t; \zeta)$ число нулей функции $g(\zeta u)$ в круге $\{u \in \mathbb{C} \mid |u| \leq t\}$, $t > 0$. Положим

$$\mathcal{N}_g(r) := \frac{1}{\sigma_N} \int_{S_1} d\sigma_\zeta \int_0^r n_g(t; \zeta) d \ln t,$$

где $d\sigma$ – элемент площади поверхности сферы S_1 в $\mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$, а $\sigma_N = \int_{S_1} d\sigma$. Для характеристики массивности нулевого множества функции g относительно произвольной фиксированной точки z из $\mathbb{C}^N$ будем использовать величину $\mathcal{N}(g; z; r) := \mathcal{N}_{g(z+w)}(r)$, $r > 0$. Ясно, что $\mathcal{N}(g; z; r)$ конечна тогда и только тогда, когда $g(z) \neq 0$. С целью упрощения записи полагаем $\mathcal{N}(g; z) = \mathcal{N}(g; z; |z|)$ при $z \neq 0$; $\mathcal{N}(g; 0) = 0$, если $g(0) \neq 0$, и $\mathcal{N}(g; 0) = \infty$, если $g(0) = 0$.

Основной результат работы составляет

ТЕОРЕМА 1. Следующие условия эквивалентны:

- (i) идеал в кольце $E(H_\infty)$ (соответственно $E(H_0)$) с образующими $(f_1, \dots, f_m)$ является порождающим;
- (ii) существует $k \in \mathbb{N}$ (соответственно для любого $k \in \mathbb{N}$) существует $D (= D(k)) > 0$ такое, что

$$\min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) \leq h_k(z) + D \quad \forall z \in \mathbb{C}^N. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 разобьем на несколько этапов, проводя его по мере возможности одновременно для противоположных друг другу случаев $H = H_\infty$ и $H = H_0$.

1. Стандартным образом устанавливается, что (i) эквивалентно условию типа Карлесона

- (iii) существует $s \in \mathbb{N}$ (соответственно для любого $s \in \mathbb{N}$) существует $c (= c(s)) > 0$ такое, что

$$|f_1(z)| + \dots + |f_m(z)| \geq c \exp(-h_s(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}^N. \quad (3)$$

Именно, справедливость импликации (i) $\Rightarrow$ (iii) следует из того, что $f(z) \equiv 1 \in E(H)$, а обратной – (iii) $\Rightarrow$ (i), например, из результатов [5] (мы опускаем рутинные выкладки, связанные с применением упомянутых результатов к рассматриваемым кольцам).

Значит, доказательство теоремы 1 сводится к проверке равносильности условий (2) и (3) в согласованном относительно H_∞ и H_0 виде. При этом, как (2), так и (3) влечет отсутствие общих нулей у $f_1, \dots, f_m$ всюду в $\mathbb{C}^N$. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что $|f_1(z)| + \dots + |f_m(z)| \neq 0$ в $\mathbb{C}^N$.

2. Для произвольной отличной от тождественного нуля целой в $\mathbb{C}^N$ функции f и $z \in \mathbb{C}^N$ будем обозначать через $\mathfrak{M}(f; z; t)$ среднее функции $\ln |f|$ по сфере $\{w \in \mathbb{C}^N \mid |w - z| = t\}$, а через $\mathfrak{N}(f; z; t)$ – по шару $B(z; t) := \{w \in \mathbb{C}^N \mid |w - z| \leq t\}$, $t > 0$.

Пусть $f \in E_h$, $f(z) \neq 0$, h – какой-либо вес. Тогда при некотором $C = C(h; f) > 0$

$$\ln |f(z)| \leq h(z) + C \quad \forall z \in \mathbb{C}^N. \quad (4)$$

Отсюда, при любом $z \in \mathbb{C}^N$, $z \neq 0$, выполнено

$$\mathfrak{M}(f; z; |z|) \leq \ln \max\{|f(\zeta)| : |\zeta| \leq 2|z|\} \leq h(2z) + C. \quad (5)$$

Чтобы установить противоположную оценку, предположим сначала, что $f(z)$ не является тождественной постоянной (по-прежнему, $f \in E_h$). Тогда имеется $\xi \in \mathbb{C}^N$ с $|f(\xi)| \geq 1$. В силу плюрисубгармоничности $\ln |f(w)|$ в $\mathbb{C}^N$ при любом $z \in \mathbb{C}^N$ с $|z| > r_0 = |\xi|$ имеем $\mathfrak{N}(f; \xi; 2|z|) \geq \ln |f(\xi)| \geq 0$. Отсюда, привлекая (4), получим при $|z| > r_0$

$$\begin{aligned} \int_{B(z; |z|)} \ln |f(w)| d\omega_w &\geq - \int_{B(\xi; 2|z|) \setminus B(z; |z|)} \ln |f(w)| d\omega_w \\ &\geq -\omega_N 2^{2N} |z|^{2N} (h(2|z| + r_0) + C) \geq -\omega_N 2^{2N} |z|^{2N} (h(3z) + C), \end{aligned}$$

где $d\omega$ – элемент объема в $\mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$, $\omega_N = \int_{B(0;1)} d\omega$. Поэтому

$$\Re(f; z; |z|) \geq -2^{2N}(h(3z) + C), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad |z| > r_0.$$

Поскольку всегда $\Re(f; z; |z|) \geq \Re(f; z; |z|)$ (при $z \neq 0$), то и

$$\Re(f; z; |z|) \geq -2^{2N}(h(3z) + C), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad |z| > r_0. \quad (6)$$

Очевидно, что если $f(z) \equiv c \neq 0$ в $\mathbb{C}^N$, то (6) выполняется при $r_0 = 0$.

3. Допустим, что каждая из функций набора $f_1, \dots, f_m$ принадлежит весовому пространству E_h . Тогда, используя определение E_h и оценки (5), (6), получим, что имеются такие постоянные $C > 0$ и $r_0 \geq 0$, для которых

$$\ln \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(z)| \leq h(z) + C \quad \forall z \in \mathbb{C}^N; \quad (7)$$

$$\max_{1 \leq j \leq m} \Re(f_j; z; |z|) \leq h(2z) + C \quad \forall z \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}; \quad (8)$$

$$\min_{1 \leq j \leq m} \Re(f_j; z; |z|) \geq -2^{2N}(h(3z) + C), \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad |z| > r_0. \quad (9)$$

По формуле Йенсена (см., например, [7, с. 13]) для тех j , $1 \leq j \leq m$, для которых $f_j(z) \neq 0$ (так как $f_1, \dots, f_m$ не имеют общих нулей в $\mathbb{C}^N$, то для любого $z \in \mathbb{C}^N$ имеется хотя бы один такой индекс) выполнено равенство

$$\mathcal{N}(f_j; z) + \ln |f_j(z)| = \Re(f_j; z; |z|).$$

Отсюда с учетом (8) и (9) заключаем, что при $|z| > r_0$ выполнена оценка

$$-2^{2N}(h(3z) + C) \leq \min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) + \ln \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(z)| \leq h(2z) + C. \quad (10)$$

Предположим теперь, что при некотором $c > 0$

$$|f_1(z)| + \dots + |f_m(z)| \geq c \exp(-h(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}^N. \quad (11)$$

Тогда $\ln \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(z)| \geq -h(z) + \ln(c/m)$ для всех $z \in \mathbb{C}^N$, и из (10) следует

$$\min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) \leq h(2z) + h(z) + C + \ln \frac{m}{c} \leq 2h(2z) + C_1, \quad (12)$$

где $C_1 = C + \ln(m/c)$.

Обратно, если существует такое $D > 0$, что

$$\min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) \leq h(z) + D \quad \forall z \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}, \quad (13)$$

то, снова привлекая (10), получим при $|z| > r_0$

$$\ln \max_{1 \leq j \leq m} |f_j(z)| \geq -2^{2N}(h(3z) + C) - h(z) - D.$$

Тем более, при тех же z выполняется неравенство

$$|f_1(z)| + \dots + |f_m(z)| \geq b \exp(-Bh(3z)), \quad (14)$$

где $b = \exp(-2^{2N}C - D) > 0$, $B = 2^{2N} + 1$.

4. Чтобы закончить доказательство, остается заметить следующее. В случае $H = H_\infty$ имеются такие $l \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, что (7)–(10) выполнены при всех $h = h_p$, $p \geq l$. Если теперь при $s \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ справедливо (3) (совпадающее с (11) для $h = h_s$), то верно и (12) при $h = h_n$, где $n = \max\{l; s\}$. Остается с помощью (1) выбрать такие $k \in \mathbb{N}$ и $A > 0$, чтобы выполнялось неравенство $2h_n(2z) \leq h_k(z) + A$ при всех $z \in \mathbb{C}^N$. Тогда (12) влечет справедливость (2) с $D = C_1 + A$.

Обратно, если выполняется (2) (т.е. (13) при $h = h_k$), то, привлекая импликацию (13) $\Rightarrow$ (14), а затем (1), получим, что при некоторых $s \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ для $|z| > r_0$ верно (3). При этом, тот факт, что (3) справедливо для $z \in \mathbb{C}^N$ с $|z| > r_0$, не играет роли, так как изначально $f_1, \dots, f_m$ не имеют общих нулей в $\mathbb{C}^N$ и за счет уменьшения $c > 0$ легко добиться его справедливости всюду в $\mathbb{C}^N$.

Аналогично рассматривается случай $H = H_0$. Теорема доказана.

3. Порождающие идеалы, характеризующиеся функцией расстояния до нулевых множеств. Пусть f – целая в $\mathbb{C}^N$ функция, V_f – ее нулевое множество и $d_f(z)$ – расстояние от точки $z \in \mathbb{C}^N$ до V_f . Для набора $f_1, \dots, f_m$ целых функций введем функцию $d(z) := \max_{1 \leq j \leq m} d_{f_j}(z)$, $z \in \mathbb{C}^N$. Рассмотрим задачу о том, когда порождающие идеалы в кольцах типа $E(H)$ полностью характеризуются через $d(z)$. С целью упрощения записи будем говорить, что весовая последовательность H_∞ (соответственно H_0) *быстро возрастает* (соответственно *убывает*), если для всех $k \in \mathbb{N}$ существуют $n \in \mathbb{N}$, $C > 0$ такие, что

$$h_k^2(r) \leq h_n(r) + C \quad (\text{соответственно } h_n^2(r) \leq h_k(r) + C) \quad \forall r \geq 0.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы идеал в кольце $E(H_\infty)$ (соответственно $E(H_0)$) с образующими $(f_1, \dots, f_m)$ был порождающим, необходимо, а если H_∞ (соответственно H_0) быстро возрастает (соответственно убывает), то и достаточно, чтобы*

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad (\text{соответственно } \forall k \in \mathbb{N}) \quad \exists A > 0 : \ln \frac{1}{d(z)} \leq h_k(z) + A \quad \forall z \in \mathbb{C}^N. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По-прежнему, не ограничивая общности, считаем, что $f_1, \dots, f_m$ не имеют общих нулей в $\mathbb{C}^N$. Кроме того, сразу отбросим тривиальный случай, когда хотя бы одна из функций рассматриваемого набора не обращается в нуль всюду в $\mathbb{C}^N$. Кстати, первое необходимо, а второе достаточно, как для того, чтобы идеал был порождающим, так и для выполнения (15).

Необходимость. Зафиксируем $z \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ и рассмотрим произвольную функцию f_j , для которой $f_j(z) \neq 0$, $1 \leq j \leq m$. По определению $d_{f_j}(z) =: d_j(z)$ имеется ζ , лежащее на единичной сфере в $\mathbb{C}^N$, для которого функция переменной $u \in \mathbb{C}$ $f_{j,z,\zeta}(u) := f_j(z + \zeta u)$

обращается в нуль хотя бы в одной точке окружности $\{u \in \mathbb{C} \mid |u| = d_j(z)\}$. Тогда, если $d_j(z) \leq |z|/2$, то

$$\mathcal{N}\left(f_{j,z,\zeta}; \frac{|z|}{2}\right) := \int_0^{|z|/2} n_{j,z,\zeta}(t) dt \geq \int_{d_j(z)}^{|z|/2} d \ln t = \ln \frac{|z|}{2d_j(z)},$$

где $n_{j,z,\zeta}(t)$ – число нулей $f_{j,z,\zeta}(u)$ в круге $\{u \in \mathbb{C} \mid |u| \leq t\}$ с учетом их кратностей. Далее, по теореме 4.2.3 из [8] имеется постоянная $C > 0$, зависящая только от размерности пространства $\mathbb{C}^N$, для которой $\mathcal{N}(f_{j,z,\zeta}; |z|/2) \leq C \mathcal{N}(f_j; z)$. Поэтому при $d_j(z) \leq |z|/2$ имеет место неравенство $\ln(|z|/(2d_j(z))) \leq C \mathcal{N}(f_j; z)$. Отметим, что при $d_j(z) > |z|/2$ оно выполнено автоматически. Тогда $\ln(1/d_j(z)) \leq C \min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z)$ при $|z| \geq 2$ и, следовательно, существует $D > 0$ такое, что

$$\ln \frac{1}{d(z)} \leq C \min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) + D \quad \forall z \in \mathbb{C}^N.$$

Остается воспользоваться теоремой 1 и условием (1), чтобы сделать заключение о необходимости (15) для того, чтобы идеал в кольце $E(H)$ с образующими $(f_1, \dots, f_m)$ был порождающим.

Достаточность. Будем для простоты считать, что $|f_j(0)| \geq 1$, $1 \leq j \leq m$. Это не имеет принципиального значения, поскольку в противном случае можно поступить точно так же, как в теореме 1, проводя рассуждения относительно z_j с $|f_j(z_j)| \geq 1$ вместо нуля. Очевидно, $n_{j,z,\zeta}(t) \leq n_{j,0,\zeta}(2|z|)$ при $|t| \leq |z|$. Воспользуемся известным соотношением между числом нулей и максимумом модуля голоморфной функции одной переменной

$$n_{j,0,\zeta}(r) \leq \ln M_{f_j}(er) - \ln |f_j(0)| \quad \forall r > 0, \quad \forall \zeta \in S_1.$$

Из него при $d_j(z) \leq |z|$, $z \neq 0$, вытекает

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(f_j; z) &= \frac{1}{\sigma_N} \int_{S_1} d\sigma_\zeta \int_0^{|z|} n_{j,z,\zeta}(t) d \ln t = \frac{1}{\sigma_N} \int_{S_1} d\sigma_\zeta \int_{d_j(z)}^{|z|} n_{j,z,\zeta}(t) d \ln t \\ &\leq \frac{1}{\sigma_N} \int_{S_1} d\sigma_\zeta \int_{d_j(z)}^{|z|} n_{j,0,\zeta}(2|z|) d \ln t \leq \ln M_{f_j}(2e|z|) \ln \frac{|z|}{d_j(z)}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) \leq \left(\max_{1 \leq j \leq m} \ln M_{f_j}(2e|z|) \right) \cdot \ln \frac{|z|}{d(z)}. \quad (16)$$

В последующем ограничимся случаем $H = H_\infty$ (случай $H = H_0$ рассматривается аналогично). По определению H_∞ и условию (1) имеются $l \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$\max_{1 \leq j \leq m} \ln M_{f_j}(2e|z|) \leq h_l(z) + C \quad \forall z \in \mathbb{C}^N.$$

Тогда из условий (15) и (16) вытекает, что при $s = \max(k, l)$

$$\min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) \leq (h_s(z) + C)(h_s(z) + A + \ln |z|).$$

Воспользовавшись тем, что $\ln |z| = o(h_s(z))$ при $z \rightarrow \infty$, быстрым возрастанием H_∞ и еще раз условием (1), получим, что при некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $D > 0$ выполняется неравенство $\min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) \leq h_n(z) + D$. Предыдущие рассуждения справедливы в предположении, что $d(z) \leq |z|$, $z \neq 0$. Остается заметить, что $\min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) = 0$ при $d(z) > |z|$ и последнее неравенство выполняется автоматически. Таким образом, справедливо (2), и по теореме 1 идеал в кольце $E(H_\infty)$ с образующими $(f_1, \dots, f_m)$ является порождающим. Теорема доказана.

Применим теорему 2 к пространствам E_∞ и E_0 всех целых функций конечного и нулевого порядка соответственно:

$$E_\infty := \{f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \exists \rho > 0 \exists C > 0 : \ln |f(z)| \leq C + |z|^\rho, \forall z \in \mathbb{C}^N\},$$

$$E_0 := \{f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \forall \rho > 0 \exists C > 0 : \ln |f(z)| \leq C + |z|^\rho, \forall z \in \mathbb{C}^N\}.$$

Очевидно, $E_\infty = E(H_\infty)$, где $H_\infty = \{|z|^n\}_{n=1}^\infty$ быстро возрастает, а $E_0 = E(H_0)$, где $H_0 = \{|z|^{1/n}\}_{n=1}^\infty$ быстро убывает. Отметим, что E_∞ совпадает с G , которое определялось во введении. Непосредственное применение теоремы 2 приводит к следующей характеристизации порождающих идеалов в E_∞ и E_0 .

ТЕОРЕМА 3. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) $E_\infty(f_1, \dots, f_m)$ – порождающий идеал;
- (ii) найдется такое $\rho > 0$, что в каждом шаре

$$\{w \in \mathbb{C}^N \mid |w - z| \leq \rho^{-1} \exp(-|z|^\rho)\}, \quad z \in \mathbb{C}^N \text{ произвольное,}$$

хотя бы одна из функций набора $f_1, \dots, f_m$ не обращается в нуль;

- (iii) $f_1, \dots, f_m$ не имеют общих нулей в $\mathbb{C}^N$ и

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln^+(\ln 1/d(z))}{\ln |z|} < \infty.$$

Здесь, как обычно, $\ln^+ x = 0$ при $x \leq 1$ и $\ln^+ x = \ln x$ при $x \geq 1$.

ТЕОРЕМА 4. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) $E_0(f_1, \dots, f_m)$ – порождающий идеал;
- (ii) для любого $\rho > 0$ найдется $c > 0$ такое, что при любом $z \in \mathbb{C}^N$ в шаре

$$\{w \in \mathbb{C}^N \mid |w - z| \leq c \exp(-|z|^\rho)\}$$

хотя бы одна из функций набора $f_1, \dots, f_m$ не обращается в нуль;

- (iii) $f_1, \dots, f_m$ не имеют общих нулей в $\mathbb{C}^N$ и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln^+(\ln 1/d(z))}{\ln |z|} = 0.$$

Отметим, что теорема 3 – многомерное обобщение упомянутого во введении результата из [6]. Ясно, что перечень примеров можно было бы существенно расширить. Например, под действие теоремы 2 подпадает $E(H_\infty)$, где $H_\infty = \{\ln^n(1 + |z|)\}_{n=2}^\infty$. Мы не будем на этом останавливаться, а рассмотрим кольца с более тонкой структурой и покажем, что для них характеристизация порождающих идеалов в терминах функции расстояния $d(z)$ невозможна. Это будет, в частности, означать, что требование быстрого возрастания (убывания) существенно для справедливости теоремы 2.

4. Пространства, определяемые уточненным порядком. Пусть $\rho(r)$ ($\rightarrow \rho \in (0, \infty)$) – уточненный порядок в смысле Валирона [9], $h(r) := r^{\rho(r)}$. Рассмотрим кольца целых в $\mathbb{C}^N$ функций, имеющих при этом уточненном порядке конечный и минимальный тип соответственно

$$[\rho(r), \infty) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h(r)} \ln M_f(r) < \infty \right\};$$

$$[\rho(r), 0] := \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) \mid \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h(r)} \ln M_f(r) = 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Как известно, для $\rho(r)$ всегда существует эквивалентный ему сильный уточненный порядок $\tilde{\rho}(r)$, т.е. $r^2 \tilde{\rho}''(r) \ln r \rightarrow 0$ и $r^{\tilde{\rho}(r) - \rho(r)} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. Например, подходит

$$\tilde{\rho}(r) = \rho + \frac{\ln l(r)}{\ln r}, \quad \text{где } l(r) = \frac{1}{r} \int_1^r t^{\rho(t) - \rho} dt.$$

Тогда, очевидно, $[\tilde{\rho}(r), \infty) = [\rho(r), \infty)$, $[\tilde{\rho}(r), 0] = [\rho(r), 0]$, и при этом функция $\tilde{h}(r) = r^{\tilde{\rho}(r)}$ такова, что $h(\exp x)$ выпукла по крайней мере для больших x [9]. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\rho(r)$ – сильный уточненный порядок и $h(\exp x)$ выпукла на $\mathbb{R}$.

Легко видеть, что

$$[\rho(r), \infty) = E(H_\infty^{\rho(r)}), \quad [\rho(r), 0] = E(H_0^{\rho(r)}),$$

где

$$H_\infty^{\rho(r)} := \{k h(|z|)\}_{k=1}^\infty, \quad H_0^{\rho(r)} := \left\{ \frac{1}{k} h(|z|) \right\}_{k=1}^\infty.$$

Из свойств уточненного порядка [9] следует, что $H_\infty^{\rho(r)}$ и $H_0^{\rho(r)}$ удовлетворяют ограничению (1), и мы имеем возможность применить к рассматриваемым кольцам теорему 1, непосредственная переформулировка условия (2) которой приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f_1, \dots, f_m$ – набор функций из кольца E , не имеющих общих нулей в $\mathbb{C}^N$, где $E = [\rho(r), \infty)$ или $[\rho(r), 0]$. Для того чтобы идеал $E(f_1, \dots, f_m)$ был порождающим, необходимо и достаточно, чтобы для нулевых множеств его образующих имело место условие

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{h(|z|)} \min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) < \infty \quad \text{в случае } E = [\rho(r), \infty);$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{h(|z|)} \min_{1 \leq j \leq m} \mathcal{N}(f_j; z) = 0 \quad \text{в случае } E = [\rho(r), 0].$$

Приведем примеры, показывающие, что в отличие от E_∞ и E_0 характеристика порождающих идеалов в кольцах $[\rho(r), \infty)$ и $[\rho(r), 0]$ в терминах функции $d(z)$ невозможна. Для этой цели достаточно ограничиться рассмотрением $N = 1$ и $\rho(r) \equiv \rho > 0$.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)^{p_k}, \quad \text{где } \lambda_k = k^{k/\rho}, \quad p_k = k^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^m p_k = \sum_{k=1}^m k^{k-1} \leq (m-1)^{m-1} + m^{m-1} < 2m^{m-1}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\lambda_m^{-\rho} \sum_{k=1}^m p_k < 2/m$, $m > 1$, и, следовательно, $f \in [\rho, 0]$. Положим

$$f_1(z) = f(z), \quad f_2(z) = f(z-a), \quad \text{где } a = \frac{1}{2} \min\{1, 2^{2/\rho} - 1\}.$$

Ясно, что f_1 и f_2 принадлежат кольцу $[\rho, 0]$ и, тем более, $[\rho, \infty)$. Так как

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/\rho} (k+1)^{1/\rho} \geq 2^{2/\rho}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и $\lambda_1 = 1$, то расстояние между любыми двумя соседними нулями функции f_1 (или f_2) не меньше $2a$. Следовательно, в каждом круге $\{w \in \mathbb{C} \mid |z-w| < a/2\}$ нет нулей хотя бы одной из функций f_1 или f_2 . Таким образом, в рассматриваемом случае, когда образующими являются две функции f_1 и f_2 , выполнено

$$\inf\{d(z) : z \in \mathbb{C}\} = \frac{a}{2} > 0. \quad (17)$$

Однако при $z_m = \lambda_m + a$ $f_2(z_m) = 0$, а

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(f_1; z_m) &= \int_0^{|z_m|} n_f(z_m; t) d \ln t \geq \int_a^{|z_m|} p_m d \ln t = p_m \ln \frac{|z_m|}{a} \\ &\geq p_m \ln \lambda_m = \rho^{-1} m^m \ln m = \rho^{-1} \lambda_m^\rho \ln m \end{aligned}$$

($n_f(z, t)$ – число нулей f в круге $\{w \in \mathbb{C} \mid |w-z| \leq t\}$).

Отсюда

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|^\rho} \min_{1 \leq j \leq 2} \mathcal{N}(f_j; z) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_m|^\rho} \mathcal{N}(f_1; z_m) = +\infty,$$

и по теореме 5 идеалы $[\rho, \infty)(f_1, f_2)$ и $[\rho, 0](f_1, f_2)$ не являются порождающими.

Отметим, что построенный пример опровергает результаты работы [10], в которой была предпринята попытка дать описание порождающих идеалов в кольце $[\rho, 0]$ посредством функции $d(z)$. Следующий пример показывает, что подобная характеристизация в принципе невозможна.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$f_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{2^{2k}}\right).$$

Эта функция имеет нулевой порядок. Оценим модуль этой функции снизу вне кружков

$$\left\{z : |z \pm 2^k| < \frac{1}{2^k}\right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

объединение которых обозначим через U_1 . Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus U_1$ и m таково, что $2^m \leq |z| < 2^{m+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \ln |f_1(z)| &= \sum_{k=1}^{m-1} \ln \left|1 - \frac{z^2}{2^{2k}}\right| + \ln \left|1 - \frac{z^2}{2^{2m}}\right| + \ln \left|1 - \frac{z^2}{2^{2(m+1)}}\right| + \sum_{k=m+2}^{\infty} \ln \left|1 - \frac{z^2}{2^{2k}}\right| \\ &\geq \sum_{k=1}^{m-1} \ln \left(\left|\frac{z}{2^k}\right|^2 - 1\right) + \ln \frac{|2^m - z||2^m + z|}{2^{2m}} + \ln \frac{|2^{m+1} - z||2^{m+1} + z|}{2^{2m+2}} \\ &\quad + \sum_{k=m+2}^{\infty} \ln \left(1 - \left|\frac{z}{2^k}\right|^2\right) \\ &\geq 2 \ln \frac{1}{2^m 2^m} + 2 \ln \frac{1}{2^{(m+1)2^{m+1}}} + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) \\ &= -2 \ln(4m(m+1)) - 2(2m+1) \ln 2 + C, \end{aligned}$$

где

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) > -\infty.$$

Очевидно, что поведение последнего выражения определяется средним слагаемым, которое, в свою очередь, ведет себя как $-4 \ln |z|$. Поэтому при достаточно больших $|z|$, $z \in \mathbb{C} \setminus U_1$, выполняется оценка $|f_1(z)| \geq |z|^{-5}$.

Положим

$$f_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_k^2}\right), \quad \text{где } \mu_k = 2^k + \frac{1}{k}.$$

Функция f_2 также имеет нулевой порядок. Оценки, аналогичные только что проведенным, показывают, что при больших $|z|$, $z \in \mathbb{C} \setminus U_2$, где

$$U_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z \pm \left(2^k + \frac{1}{k}\right)\right| < \frac{1}{2^k}\right\},$$

выполнена оценка $|f_2(z)| \geq |z|^{-5}$. Поэтому найдется $R > 0$ такой, что $|f_1(z)| + |f_2(z)| \geq |z|^{-5}$ при $|z| \geq R$. Поскольку общих нулей у этих функций нет, то существует $c > 0$ такой, что $|f_1(z)| + |f_2(z)| \geq c(1 + |z|)^{-5}$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Таким образом, для f_1 и f_2 выполнены условия типа Карлесона в любом из колец вида $[\rho, 0]$ или $[\rho, \infty)$, $\rho > 0$. То есть, при любом $\rho > 0$ идеалы $[\rho, 0](f_1, f_2)$ и $[\rho, \infty)(f_1, f_2)$ являются порождающими.

С другой стороны, расстояние между ближайшими нулями f_1 и f_2 , т.е. точками 2^k и $2^k + 1/k$ равно $1/k$ и, значит,

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} d(z) = 0.$$

Итак, условие (17) по примеру 1 не является достаточным, а по примеру 2 необходимым для того, чтобы в кольцах вида $[\rho, 0]$ и $[\rho, \infty)$ соответствующий идеал являлся порождающим.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carleson L. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem // Ann. of Math. 1962. V. 76. № 3. P. 547–559.
- [2] Kelleher J. J., Taylor B. A. An application of the corona theorem to some rings of entire functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 2. P. 246–249.
- [3] Hörmander L. Generators for some rings of analytic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 6. P. 943–949.
- [4] Kelleher J. J., Taylor B. A. Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions // J. Reine Angew. Math. 1972. V. 255. P. 190–209.
- [5] Scoda H. Application des techniques L^2 a la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1972. V. 5. № 4. P. 545–579.
- [6] Hennekemper W. Über Differentialideale im Ring der ganzen Funktionen endlicher Wachstumsordnung // Arch. Math. 1986. V. 46. P. 250–256.
- [7] Ронкин Л. И. Целые функции // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–36.
- [8] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
- [9] Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
- [10] Timofeev A. Ju. Die Differentialideale im Ring der ganzen Funktionen, die bei vorgegebener Ordnung Minimaltyp besitzen // Math. Nachr. 1990. V. 147. P. 89–94.

Ростовский государственный университет
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Поступило
30.07.1997
Исправленный вариант
10.02.2003