Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Кальней, О сходимости линейных средних рядов
Якоби в точках Лебега в случае полуцелых α , *Матем.
заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 193–203

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:54:52

УДК 517.5

О СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ РЯДОВ ЯКОБИ В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА В СЛУЧАЕ ПОЛУЦЕЛЫХ α

С. Г. Кальней

Рассматривается вопрос о сходимости линейных средних рядов Фурье–Якоби функций $f(x)$ из весового пространства $L_{\alpha,\beta}[-1,1]$ при $x = 1$ в случае, когда эта точка есть точка Лебега для f . Установлены достаточные условия суммируемости, зависящие от поведения функции на отрезке $[-1, 0]$ и свойств матрицы метода суммирования.

Библиография: 11 названий.

1. Пусть $\rho(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $L_{\alpha,\beta}[-1,1]$ – пространство измеримых по Лебегу на $[-1,1]$ функций f таких, что $f\rho \in L[-1,1]$. Разложим функцию $f \in L_{\alpha,\beta}[-1,1]$ в ряд по ортонормированной системе многочленов Якоби $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ (см. [1])

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (1.1)$$

где $a_m = \int_{-1}^1 f(t) \hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t) \rho(t) dt$, и с помощью треугольной матрицы $\Lambda = \{\lambda_m^{(n)}\}$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\lambda_m^{(n)} = 0$ при $m \geq n+1$, определим последовательность линейных средних ряда (1.1):

$$\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f, x, \Lambda) = \sum_{m=0}^n \lambda_m^{(n)} a_m \hat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Если линейные средние сходятся в некоторой точке, то ряд (1.1) называется Λ -суммируемым в этой точке.

Ниже рассматривается вопрос о сходимости линейных средних ряда Якоби в точке $x = 1$, если она является точкой Лебега функции f , т.е. существует число A такое, что

$$\int_{1-h}^1 |f(t) - A| dt = o(h), \quad h \rightarrow +0.$$

Далее будем считать, что в точке Лебега $f(1) = A$.

Известно, что суммируемость в точке Лебега $x = 1$ рядов Якоби интегрируемых функций зависит, вообще говоря, от поведения функции в окрестности точки

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00986.

$x = -1$. Этот эффект наблюдается уже для средних Чезаро (см. [1; глава 9]). Дополнительные условия на функцию около $x = -1$ называют *антиполярными*.

В литературе рассматриваются различные виды антиполярных условий. В монографии [2; § 3] антиполярным условием является требование, что точка $x = -1$ также является точкой Лебега разлагаемой функции; в работе [3] предполагается, что функция интегрируема в некоторой степени в окрестности точки $x = -1$, в [1; глава 9] требуется, чтобы

$$\int_{-1}^0 |f(t)|(1+t)^a dt < \infty \quad (1.2)$$

для некоторого значения a . Последнее условие, являющееся наиболее общим из вышеуказанных, первым рассмотрел Когбетлянц [4] для методов суммирования Чезаро (C, ν) рядов Лапласа на трехмерной сфере ($\alpha = \beta = 0$). Из его работы следует, что при $\alpha = \beta = 0$ ряд (1.1) (C, ν) -суммируем в точке Лебега $x = 1$, если в случае $1/2 < \nu < 1$ выполнено условие (1.2) для $a = (\nu - 1)/2$ (при $\nu \geq 1$ антиполярное условие не нужно). Сегё [1; глава 9] рассмотрел сходимость средних Чезаро рядов Якоби в случае произвольных $\alpha, \beta > -1$. Он доказал, что при $\beta > -1/2$ ряд (1.1) (C, ν) -суммируем в точке Лебега $x = 1$, если в случае $\alpha + 1/2 < \nu < \alpha + \beta + 1$ выполнено условие (1.2) для $a = (2\beta - 1)/4$. В отличие от работы Когбетлянца, найденное им антиполярное условие не зависит от порядка метода Чезаро. В работах автора [5] и [6] были получены условия на матрицу Λ и антиполярное условие, обеспечивающее Λ -суммируемость ряда (1.1) в точке Лебега $x = 1$ в случае $\alpha > -1/2$, $\alpha \neq (2p - 3)/2$, $p \in \mathbb{N}$. При этом значение параметра a зависит от коэффициентов матрицы. В данной статье рассматривается случай полуцелых $\alpha = (2p - 3)/2$, $p \in \mathbb{N}$.

Положим

$$\Delta^k \lambda_m^{(n)} = \Delta(\Delta^{k-1} \lambda_m^{(n)}), \quad k = 2, 3, \dots, \quad \Delta \lambda_m^{(n)} = \Delta^1 \lambda_m^{(n)} = \lambda_m^{(n)} - \lambda_{m+1}^{(n)}.$$

Через c будем обозначать величины, не зависящие от натуральных чисел n, m и т.п., вообще говоря, различные в разных случаях.

Далее везде будем считать $\alpha = (2p - 3)/2$, $p \in \mathbb{N}$, $\gamma = \alpha + 3/2$, $n = 1, 2, \dots$. Основными результатами статьи являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\beta > -1/2$ и матрица Λ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^{(n)} = 1, \quad (1.3)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{\gamma-1} (n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}| \leq c, \quad (1.4)$$

$$\sum_{m=0}^n (m+1)^{\gamma-1} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}| \leq cn^{-\delta}, \quad 0 < \delta < \beta + \frac{1}{2}. \quad (1.5)$$

Если $x = 1$ точка Лебега функции $f \in L_{\alpha, \beta}[-1, 1]$ и выполнено антиполярное условие

$$\int_{-1}^0 |f(t)|(1+t)^{(2\beta+2\delta-1)/4} dt < \infty,$$

то

$$\tau_n^{(\alpha, \beta)}(f, 1, \Lambda) \rightarrow f(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $-1 < \beta \leq -1/2$ и выполнены условия (1.3) и (1.4). Если $x = 1$ – точка Лебега функции $f \in L_{\alpha,\beta}[-1, 1]$, то

$$\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f, 1, \Lambda) \rightarrow f(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отметим, что если условие (1.5) выполнено при $\delta \geq \beta + 1/2$, то антиполярное условие выполнено для любой функции пространства $L_{\alpha,\beta}[-1, 1]$ и, следовательно, может быть опущено.

Из теоремы 1, в частности, следует, что при $\beta > -1/2$ ряд (1.1) (C, ν) -суммируем в точке Лебега $x = 1$, если в случае $\alpha + 1/2 < \nu < \min\{\alpha + 3/2, \alpha + \beta + 1\}$ выполнено условие (1.2) с параметром $a = \beta/2 + \nu/2 - \alpha/2 - 1/2$ (в случае $\alpha + 3/2 \leq \nu < \alpha + \beta + 1$ – с параметром $a = \beta/2 + 1/4$), что слабее антиполярного условия Сегё.

Отметим также, что при $\alpha = 1/2, 3/2, \dots, -1 < \beta \leq \alpha$ из [7; лемма 5] и [8] вытекает, что для матриц, удовлетворяющих условиям $|\lambda_m^{(n)}| \leq c$ и $\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)} \geq 0$ (≤ 0), $m = 0, 1, \dots, n-1$, соотношения (1.3) и (1.4) являются необходимыми для того, чтобы $\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f, 1, \Lambda) \rightarrow f(1)$ в точке Лебега $x = 1$ для произвольной функции $f \in L_{\alpha,\beta}[-1, 1]$.

Сопоставляя теоремы 1 и 2 с результатами работы [7], получаем, что условия (1.3), (1.4) достаточны для сходимости $\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f, 1, \Lambda)$ как для непрерывных функций, так и в точке Лебега интегрируемых функций, если матрица удовлетворяет условию (1.5) при $\delta \geq \beta + 1/2$ или если $\beta \leq -1/2$.

2. Для доказательства теорем нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Пусть [1; с. 70] $P_m^{(\alpha,\beta)}(t)$ – многочлены Якоби, нормированные условием

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(m + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(m + 1)},$$

$\widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t) \sim \sqrt{m+1} P_m^{(\alpha,\beta)}(t)$. Положим

$$B_m^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(m + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m + \beta + 1)} P_m^{(\alpha,\beta)}(t).$$

Тогда формула Кристоффеля–Дарбу [1; с. 83] для ядра Дирихле–Якоби $D_m^{(\alpha,\beta)}(t, 1)$ может быть записана в виде

$$D_m^{(\alpha,\beta)}(t, 1) = B_m^{(\alpha+1,\beta)}(t). \quad (2.1)$$

Отметим также, что из равенства (4.5.3) из [1] следует

$$\sum_{i=0}^m (2i + \alpha + \beta + 1) B_i^{(\alpha,\beta)}(t) = 2\alpha B_m^{(\alpha+1,\beta)}(t). \quad (2.2)$$

Запишем линейные средние $\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f, 1, \Lambda)$ в виде

$$\tau_n^{(\alpha,\beta)}(f, 1, \Lambda) = \int_{-1}^1 f(t) K_n^{(\alpha,\beta)}(t, 1; \Lambda) \rho(t) dt,$$

где

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(t, 1; \Lambda) = \sum_{m=0}^n \lambda_m^{(n)} \widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(t) \widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)}(1)$$

– ядро метода суммирования.

Ядро $K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)$ называется *сингулярным*, если

$$\int_{-1}^1 K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) \rho(t) dt \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad \int_{-1}^{\mu} K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) \rho(t) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для любого фиксированного $\mu \in (-1, 1)$.

ЛЕММА 1. Пусть $\beta > -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^{(n)} = 1$ и

$$\sum_{m=0}^n (m+1)^{j-1} |\Delta^{j+1} \lambda_m^{(n)}| \leq c, \quad j = 0, 1, \dots, \gamma.$$

Тогда ядро $K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)$ сингулярное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\int_{-1}^1 K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) \rho(t) dt = \lambda_0^{(n)} = 1,$$

то первое условие определения сингулярного ядра выполнено. Докажем выполнение второго условия. Применяя $\gamma + 1$ раз преобразование Абеля и формулы (2.1), (2.2), получим

$$\begin{aligned} K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) &= \sum_{m=0}^n \Delta \lambda_m^{(n)} D_m^{(\alpha, \beta)}(t, 1) = \sum_{m=0}^n \Delta \lambda_m^{(n)} B_m^{(\alpha+1, \beta)}(t) \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{\Delta \lambda_m^{(n)}}{2m + \alpha + \beta + 2} (2m + \alpha + \beta + 2) B_m^{(\alpha+1, \beta)}(t) \\ &= 2(\alpha + 1) \sum_{m=0}^n \Delta \left(\frac{\Delta \lambda_m^{(n)}}{2m + \alpha + \beta + 2} \right) B_m^{(\alpha+2, \beta)}(t) \\ &= c(\alpha) \sum_{m=0}^n \tilde{\Delta}^\gamma (\Delta \lambda_m^{(n)}) B_m^{(\alpha+\gamma+1, \beta)}(t), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Delta}^k a_m = \Delta \left(\frac{1}{2m + \alpha + \beta + k + 1} \tilde{\Delta}^{k-1} a_m \right), \quad k \geq 1, \quad \tilde{\Delta}^0 a_m = a_m.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) &= c(\alpha) \sum_{m=0}^n \tilde{\Delta}^\gamma (\Delta \lambda_m^{(n)}) \frac{\Gamma(m + \alpha + \beta + \gamma + 2)}{\Gamma(\alpha + \gamma + 1) \Gamma(m + \beta + 1)} P_m^{(\alpha+\gamma+1, \beta)}(t) \\ &= \sum_{m=0}^n \tilde{\Delta}^\gamma (\Delta \lambda_m^{(n)}) c(\alpha, \beta, m) (m+1)^{\alpha+\gamma+1/2} \hat{P}_m^{(\alpha+\gamma+1, \beta)}(t), \end{aligned}$$

где $|c(\alpha, \beta, m)| \leq c$ для $m = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть $f(t) = (1-t)^{-\gamma-1}$ на отрезке $[-1, \mu]$, $\mu < 1$, и равна нулю вне отрезка. Тогда $f \in L_{\alpha, \beta}^2[-1, 1]$ и ее коэффициенты Фурье–Якоби стремятся к нулю. Значит,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\mu} K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) \rho(t) dt &= \int_{-1}^1 K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) f(t) (1-t)^{\alpha+\gamma+1} (1+t)^\beta dt \\ &= \sum_{m=0}^n b_m (m+1)^{\alpha+\gamma+1/2} \tilde{\Delta}^\gamma(\Delta \lambda_m^{(n)}), \end{aligned}$$

где $b_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Так как, $\Delta(u_m v_m) = v_m \Delta u_m + u_{m+1} \Delta v_m$, то

$$\tilde{\Delta}^1(\Delta \lambda_m^{(n)}) = \frac{c_1(\alpha, \beta, m)}{(m+1)^2} \Delta \lambda_m^{(n)} + \frac{c_2(\alpha, \beta, m)}{m+1} \Delta^2 \lambda_m^{(n)},$$

где $c_1(\alpha, \beta, m)$, $c_2(\alpha, \beta, m)$ – ограниченные последовательности. Нетрудно видеть, что и для всякого $\gamma \geq 2$

$$\tilde{\Delta}^\gamma(\Delta \lambda_m^{(n)}) = \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{c_j(\alpha, \beta, m)}{(m+1)^{2\gamma-j}} \Delta^{j+1} \lambda_m^{(n)}, \quad |c_j(\alpha, \beta, m)| \leq c.$$

Поэтому

$$\left| \int_{-1}^{\mu} K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) \rho(t) dt \right| \leq c \sum_{m=0}^n |b_m| (L_0(m) + L_1(m) + \dots + L_\gamma(m)),$$

где для $j = 0, 1, \dots, \gamma$

$$L_j(m) = \left| \frac{c_j(\alpha, \beta, m)}{(m+1)^{2\gamma-j}} (m+1)^{\alpha+\gamma+1/2} \Delta^{j+1} \lambda_m^{(n)} \right| \leq c(m+1)^{j-1} |\Delta^{j+1} \lambda_m^{(n)}|. \quad (2.3)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное сколь угодно малое число. Выберем номер m_0 так, что $|b_m| < \varepsilon$ для $m \geq m_0$, и зафиксируем его. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^{(n)} = 1$ следует, что для $m < m_0$ при всех достаточно больших n справедливо $|\Delta^j \lambda_m^{(n)}| \leq \varepsilon/M$, где $M = m_0^\gamma$. Тогда для $j = 0, 1, \dots, \gamma$, учитывая (2.3), получим

$$\sum_{m < m_0} |b_m| L_j(m) \leq c \frac{\varepsilon}{M} \sum_{m < m_0} (m+1)^{j-1} \leq c\varepsilon.$$

Так как $|b_m| < \varepsilon$ для $m \geq m_0$, то из оценок (2.3) и условий леммы следует

$$\sum_{m \geq m_0} |b_m| L_j(m) \leq c\varepsilon.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $\beta > -1$ и выполнены условия (1.3) и (1.4), то ядро $K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)$ сингулярное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 достаточно доказать, что для $j = 0, 1, \dots, \gamma$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^n (m+1)^{j-1} |\Delta^{j+1} \lambda_m^{(n)}| \\ &\leq c + c \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{\gamma-1} (n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Заметим, что $|\Delta^j \lambda_m^{(n)}| \leq |\Delta^{j+1} \lambda_m^{(n)}|$ и для треугольных матриц $\Delta^j \lambda_n^{(n)} = \lambda_n^{(n)}$ для любого j . Значит, суммируя по частям $\gamma - j$ раз, $j = 1, \dots, \gamma - 1$, получим

$$\sum_{m=0}^n (m+1)^{j-1} |\Delta^{j+1} \lambda_m^{(n)}| \leq \sum_{m=0}^n (m+1)^{\gamma-1} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|. \quad (2.5)$$

Если $j = 0$, то

$$\sum_{m=0}^n (m+1)^{-1} |\Delta \lambda_m^{(n)}| \leq \sum_{m=0}^n (m+1)^{\gamma-1} \ln(m+2) |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|. \quad (2.6)$$

Далее, нетрудно проверить, что

$$2(n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} \geq 1, \\ \ln(m+2) \leq 2(n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} \quad \text{для } 0 \leq m \leq n.$$

Поэтому суммы, стоящие в правых частях неравенств (2.5) и (2.6), не превосходят величины

$$c \sum_{m=0}^n (m+1)^{\gamma-1} (n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|. \quad (2.7)$$

Сумма (2.7) отличается от суммы, стоящей в левой части неравенства (1.4), лишь одним слагаемым. Докажем, что

$$(n+1)^{\gamma-1} \ln(n+2) |\Delta^{\gamma+1} \lambda_n^{(n)}| \\ \leq |\lambda_0^{(n)}| + c \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{\gamma-1} (n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|. \quad (2.8)$$

Для $\nu = [n/2]$ имеем $\sum_{m=\nu}^{n-1} \Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)} = \Delta^{\gamma} \lambda_{\nu}^{(n)} - \Delta^{\gamma+1} \lambda_n^{(n)}$. Поэтому

$$(n+1)^{\gamma-1} \ln(n+2) |\Delta^{\gamma} \lambda_n^{(n)}| \\ \leq (n+1)^{\gamma-1} \ln(n+2) |\Delta^{\gamma} \lambda_{\nu}^{(n)}| + (n+1)^{\gamma-1} \ln(n+2) \sum_{m=\nu}^{n-1} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}| \\ \leq c(n+1)^{\gamma} |\Delta^{\gamma} \lambda_{\nu}^{(n)}| + c \sum_{m=\nu}^{n-1} (m+1)^{\gamma-1} (n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} |\Delta^{\gamma} \lambda_m^{(n)}|. \quad (2.9)$$

Но (см., например, [9; с. 511])

$$(n+1)^{\gamma} |\Delta^{\gamma} \lambda_{\nu}^{(n)}| \leq |\lambda_0^{(n)}| + c \sum_{m=0}^{\nu} (m+1)^{\gamma} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}| \\ + c \sum_{m=\nu+1}^{n-1} (m+1)^{\gamma-1} (n+1-m) |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|.$$

Так как

$$\begin{aligned} m+1 &\leq 2(n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} \quad \text{при } m \leq \nu, \\ 2 \ln \frac{n+2}{n+1-m} &\geq 1 \quad \text{при } m \geq \nu, \end{aligned}$$

то

$$(n+1)^\gamma |\Delta^\gamma \lambda_\nu^{(n)}| \leq |\lambda_0^{(n)}| + c \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^{\gamma-1} (n+1-m) \ln \frac{n+2}{n+1-m} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|. \quad (2.10)$$

Отсюда, из (2.9) и равенства $\Delta^{\gamma+1} \lambda_n^{(n)} = \Delta^\gamma \lambda_n^{(n)}$ следует (2.8). Лемма доказана.

Далее нам будут нужны оценки обобщенных ядер Вальле-Пуссена по многочленам Якоби. Обобщенным ядром Вальле-Пуссена порядка $\gamma \geq 1$ назовем отношение

$$V_{n,k}^\gamma(t, 1) = \frac{S_n^\gamma(t, 1) - S_k^\gamma(t, 1)}{A_n^\gamma - A_k^\gamma} = \frac{1}{A_n^\gamma - A_k^\gamma} \sum_{m=k+1}^n S_m^{\gamma-1}(t, 1), \quad n > k \geq 0,$$

где A_m^γ – числа Чезаро, $S_m^\gamma(t, 1)$ – суммы Чезаро порядка γ ряда $\sum_{k=0}^\infty \widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(t) \times \widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(1)$, $S_m^0(t, 1) = D_m^{(\alpha, \beta)}(t, 1)$. Отношение $\sigma_n^\gamma(t, 1) = S_n^\gamma(t, 1)/A_n^\gamma$ определяет ядра Чезаро порядка γ . Если считать, что $A_{-1}^\gamma = 0$ и $S_{-1}^\gamma(t, 1) = 0$, то $V_{n,-1}^\gamma(t, 1) = \sigma_n^\gamma(t, 1)$. Отметим, что $A_n^\gamma - A_k^\gamma \sim n^{\gamma-1}(n-k)$.

ЛЕММА 3. Для ядер Вальле-Пуссена справедливы следующие оценки:

(i) для $t \in [-1, 0]$

$$|V_{n,k}^\gamma(t, 1)| \leq \frac{c}{n-k} \cdot \begin{cases} 1, & -1 < \beta \leq -\frac{1}{2}, \\ (1+t+n^{-2})^{-\beta/2-1/4}, & -\frac{1}{2} \leq \beta; \end{cases} \quad (2.11)$$

(ii) для $t \in [\mu, 1]$, $\mu > -1$, и любого $\beta > -1$

$$|V_{n,k}^\gamma(t, 1)| \leq c(n-k)^{-1}(1-t)^{-\gamma}, \quad (2.12)$$

$$|V_{n,k}^\gamma(t, 1)| \leq c(1-t)^{-\gamma+1/2}, \quad (2.13)$$

$$|V_{n,k}^\gamma(t, 1)| \leq cn^{2\gamma-1} \quad (2.14)$$

(постоянная c зависит от μ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующие оценки ядер Чезаро $\sigma_n^\delta(t, 1)$, $n = 1, 2, \dots$, при $\delta = \gamma$ и $\delta = \gamma - 1$, $\delta \geq 0$, [10; с. 230–231]:

$$|\sigma_n^{\gamma-1}(t, 1)| \leq c(1-t)^{-\gamma+1/2}, \quad (2.15)$$

$$|\sigma_n^\gamma(t, 1)| \leq cn^{-1}(1-t)^{-\gamma}, \quad (2.16)$$

если $t \in [\mu, 1]$, $\mu > -1$, $\beta > -1$;

$$|\sigma_n^\gamma(t, 1)| \leq cn^{-1}, \quad \beta \leq -\frac{1}{2}, \quad (2.17)$$

$$|\sigma_n^\gamma(t, 1)| \leq cn^{-1}(1+t+n^{-2})^{-\beta/2-1/4}, \quad -\frac{1}{2} \leq \beta, \quad (2.18)$$

$t \in [-1, 0]$. Отметим также, что из оценки $|D_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1)| \leq cn^{2\alpha+2}$, $t \in [\mu, 1]$, $n = 1, 2, \dots$, для любого $\delta \geq 0$ вытекает

$$|\sigma_n^\delta(t, 1)| \leq cn^{2\alpha+2}. \quad (2.19)$$

Очевидно, что $|\sigma_0^\delta(t, 1)| \leq c$.

Обобщенное ядро Валле-Пуссена можно записать в виде

$$V_{n,k}^\gamma(t, 1) = \frac{A_n^\gamma \sigma_n^\gamma(t, 1) - A_k^\gamma \sigma_k^\gamma(t, 1)}{A_n^\gamma - A_k^\gamma} \quad (2.20)$$

и в виде

$$V_{n,k}^\gamma(t, 1) = \frac{1}{A_n^\gamma - A_k^\gamma} \sum_{m=k+1}^n A_m^{\gamma-1} \sigma_m^{\gamma-1}(t, 1). \quad (2.21)$$

Из представления (2.20) и оценки (2.16) получаем (2.12):

$$\begin{aligned} |V_{n,k}^\gamma(t, 1)| &\leq \frac{c}{n^{\gamma-1}(n-k)} (|A_n^\gamma \sigma_n^\gamma(t, 1)| + |A_k^\gamma \sigma_k^\gamma(t, 1)|) \\ &\leq \frac{c(1-t)^{-\gamma}}{n^{\gamma-1}(n-k)} (n^{\gamma-1} + (k+1)^{\gamma-1}) \leq \frac{c(1-t)^{-\gamma}}{n-k}. \end{aligned}$$

Оценки (2.13), (2.14) следуют из (2.21) и неравенств (2.15) и (2.19):

$$\begin{aligned} |V_{n,k}^\gamma(t, 1)| &\leq \frac{c(1-t)^{-\gamma+1/2}}{n^{\gamma-1}(n-k)} \sum_{m=k+1}^n (m+1)^{\gamma-1} \leq c(1-t)^{-\gamma+1/2}, \\ |V_{n,k}^\gamma(t, 1)| &\leq \frac{c}{A_n^\gamma - A_k^\gamma} \sum_{m=k+1}^n A_m^{\gamma-1} (m+1)^{2\alpha+2} \\ &\leq \frac{cn^{2\alpha+2}}{A_n^\gamma - A_k^\gamma} \sum_{m=k+1}^n A_m^{\gamma-1} = cn^{2\alpha+2} = cn^{2\gamma-1}. \end{aligned}$$

Для получения оценок (2.11) используем (2.20) и неравенства (2.17), (2.18):

$$|V_{n,k}^\gamma(t, 1)| \leq \frac{c}{n^{\gamma-1}(n-k)} (n^{\gamma-1} + (k+1)^{\gamma-1}) \leq \frac{c}{n-k},$$

если $\beta \leq -1/2$, и

$$\begin{aligned} |V_{n,k}^\gamma(t, 1)| &\leq \frac{c}{n^{\gamma-1}(n-k)} (n^{\gamma-1} (1+t+n^{-2})^{-\beta/2-1/4} \\ &\quad + (k+1)^{\gamma-1} (1+t+(k+1)^{-2})^{-\beta/2-1/4}) \\ &\leq \frac{c(1+t+n^{-2})^{-\beta/2-1/4}}{n-k}, \end{aligned}$$

если $\beta \geq -1/2$, так как в этом случае $(1+t+(k+1)^{-2})^{-\beta/2-1/4} \leq (1+t+n^{-2})^{-\beta/2-1/4}$ для $n > k$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\beta > -1$. Если выполнено условие (1.4), то существует возрастающая на $[\mu, 1]$, $\mu > -1$, функция $\Psi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$|K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)|\rho(t) \leq \Psi_n(t), \quad t \in [\mu, 1], \quad \int_{\mu}^1 \Psi_n(t) dt \leq c,$$

где c не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Phi_{n,k}^{\gamma}(t) = c \cdot \begin{cases} \frac{(1-t)^{-3/2}}{n-k}, & \mu \leq t \leq 1 - \frac{1}{(n-k)^2}, \\ (1-t)^{-1}, & 1 - \frac{1}{(n-k)^2} \leq t \leq 1 - \frac{1}{n^2}, \\ n^{2\alpha+2}(1-t)^{\alpha}, & 1 - \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$\Phi_n^{\gamma}(t) = c \cdot \begin{cases} \frac{(1-t)^{-3/2}}{n}, & \mu \leq t \leq 1 - \frac{1}{n^2}, \\ n^{2\alpha+2}(1-t)^{\alpha}, & 1 - \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

В силу леммы 3 и неравенств (2.16) и (2.19) данные функции будут возрастающими на $[\mu, 1]$ мажорантами для произведений $V_{n,k}^{\gamma}(t, 1)\rho(t)$ и $\sigma_n^{\gamma}(t, 1)\rho(t)$, $n = 1, 2, \dots$, соответственно. При этом

$$\int_{\mu}^1 \Phi_{n,k}^{\gamma}(t) dt \leq c \ln \frac{n+2}{n+1-k}, \quad \int_{\mu}^1 \Phi_n^{\gamma}(t) dt \leq c.$$

Следовательно, полагая $\Phi_0^{\gamma}(t) = \sigma_0^{\gamma}(t, 1) = c > 0$ и используя представление [9; с. 511]

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) = \sum_{k=0}^{\nu} A_k^{\gamma} \sigma_k^{\gamma}(t, 1) \Delta^{\gamma+1} \lambda_k^{(n)} - \sum_{k=\nu+1}^{n-1} (A_n^{\gamma} - A_k^{\gamma}) V_{n,k}^{\gamma}(t, 1) \Delta^{\gamma+1} \lambda_k^{(n)} + A_n^{\gamma} \sigma_n^{\gamma}(t, 1) \Delta^{\gamma} \lambda_{\nu+1}^{(n)},$$

где $\nu = [n/2]$, получим, что функция

$$\Psi_n(t) = \sum_{k=0}^{\nu} (k+1)^{\gamma} \Phi_k^{\gamma}(t) |\Delta^{\gamma+1} \lambda_k^{(n)}| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} n^{\gamma-1} (n+1-k) \Phi_{n,k}^{\gamma}(t) |\Delta^{\gamma+1} \lambda_k^{(n)}| + n^{\gamma} \Phi_n^{\gamma}(t) |\Delta^{\gamma} \lambda_{\nu+1}^{(n)}|$$

будет возрастающей на $[\mu, 1]$ мажорантой для произведения $K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)\rho(t)$, причем

$$\int_{\mu}^1 \Psi_n(t) dt \leq c \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{\gamma-1} (n+1-k) \ln \frac{n+2}{n+1-k} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_k^{(n)}| + n^{\gamma} |\Delta^{\gamma} \lambda_{\nu+1}^{(n)}| \leq c,$$

если выполнено условие (1.4). При этом для оценки последнего слагаемого использовано неравенство (2.10). Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $-1 < \beta \leq -1/2$. Если матрица Λ удовлетворяет условию (1.4), то ядро $K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)$ ограничено на $[-1, 0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) = \sum_{m=0}^n A_m^\gamma \sigma_m^\gamma(t, 1) \Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)} \quad (2.22)$$

и оценки (2.17) вытекает, что

$$|K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)| \leq c \sum_{m=0}^n (m+1)^{\gamma-1} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}|, \quad t \in [-1, 0], \quad -1 < \beta \leq -\frac{1}{2}.$$

Отсюда и неравенства (2.4) для $j = \gamma$ получим утверждение леммы.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ. Если $t = 1$ является точкой Лебега функции f , то $f \in L[\mu, 1]$, $\mu > -1$. Тогда на основании теоремы Фаддеева [11; с. 265] и леммы 4

$$\int_{\mu}^1 K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) f(t) \rho(t) dt \rightarrow f(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

как для $\beta > -1/2$, так и для $-1 < \beta \leq -1/2$. Теперь покажем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_{-1}^{\mu} K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) f(t) \rho(t) dt \right| < \varepsilon, \quad (3.1)$$

если μ достаточно близко к -1 , а $n > n(\varepsilon)$. Если $-1 < \beta \leq -1/2$, то неравенство (3.1) выполнено в силу леммы (5) и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Если $\beta > -1/2$, то из (2.22), (2.18) и условия (1.5) следует

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)| &\leq c \sum_{m=0}^n (m+1)^{\gamma-1} (1+t+(m+1)^{-2})^{-\beta/2-1/4} |\Delta^{\gamma+1} \lambda_m^{(n)}| \\ &\leq cn^{-\delta} (1+t+(n+1)^{-2})^{-\beta/2-1/4}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

так как $(1+t+(m+1)^{-2})^{-\beta/2-1/4} \leq c(1+t+n^{-2})^{-\beta/2-1/4}$ при $\beta > -1/2$ и $m \leq n$. Разобьем промежуток интегрирования $[-1, \mu]$ на два $I = [-1, -1+n^{-2}]$ и $J = [-1+n^{-2}, \mu]$. На промежутке I выполнено неравенство $n^2(1+t) \leq 1$. Кроме того, $(1+t+n^{-2})^{-\beta/2-1/4} \leq n^{\beta+1/2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_I K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) f(t) \rho(t) dt \right| &\leq c \int_I |f(t)| n^{\beta+1/2-\delta} (1+t)^{\beta} dt \\ &= c \int_I |f(t)| (n^2(1+t))^{\beta/2-\delta/2+1/4} (1+t)^{\beta/2+\delta/2-1/4} dt \\ &\leq c \int_I |f(t)| (1+t)^{\beta/2+\delta/2-1/4} dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что функция $|f(t)|(1+t)^{\beta/2+\delta/2-1/4}$ интегрируема на $[-1, 0]$, если выполнено антиполярное условие, и длина промежутка I мала при больших n .

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left| \int_J K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda) f(t) \rho(t) dt \right| &\leq c \int_J |f(t)| n^{-\delta} (1+t)^{\beta/2-1/4} dt \\ &= c \int_J |f(t)| (n^2(1+t))^{-\delta/2} (1+t)^{\beta/2+\delta/2-1/4} dt \\ &\leq c \int_J |f(t)| (1+t)^{\beta/2+\delta/2-1/4} dt < \varepsilon, \end{aligned}$$

при μ достаточно близких к -1 . Итак, неравенство (3.1) в случае $\beta > -1/2$ доказано в предположении, что выполняется условие (1.5) и антиполярное условие. Если $\delta \geq \beta + 1/2$ и $\beta > -1/2$, то из (3.2) следует, что $|K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)| \leq cn^{\beta+1/2-\delta} \leq c$. Поэтому, как и в случае $\beta \leq -1/2$ ядро $K_n^{(\alpha, \beta)}(t, 1; \Lambda)$ ограничено на $[-1, \mu]$ и тогда выполнено неравенство (3.1). Теоремы доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [2] С.Б. Топурия, *Ряды Фурье–Лапласа на сфере*, Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1987.
- [3] С.Г. Кальней, “Суммируемость рядов Якоби треугольными матрицами”, *Матем. заметки*, **34:1** (1983), 91–103.
- [4] E. Kogbetliantz, “Über die (C, δ) Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe für $1/2 < \delta < 1$ ”, *Math. Z.*, **14** (1922), 99–109.
- [5] S. G. Kal’nei, “On the summability of Jacobi series at Lebesgue points”, *Analysis Mathematica*, **29** (2003), 181–194.
- [6] С.Г. Кальней, *Приближение функций. Теоретические и прикладные аспекты*, Сборник статей, посвященных памяти профессора А. В. Ефимова, МИЭТ, М., 2003.
- [7] С.Г. Кальней, “О линейных методах суммирования рядов Якоби для полупелых α ”, *Analysis Mathematica*, **22** (1996), 35–50.
- [8] С.Г. Кальней, “Об оценке снизу функции Лебега линейных средних рядов Фурье–Якоби”, *Тр. МИАН*, **170** (1984), 113–118.
- [9] С.Г. Кальней, “Об аналоге теоремы С.М. Никольского для рядов Якоби”, *Укр. матем. ж.*, **43:4** (1991), 503–513.
- [10] A. Bonami, J.-L. Clerc, “Sommes de Cesaro et multiplicateurs des développements en harmoniques spheriques”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **183** (1973), 223–263.
- [11] И.П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

С. Г. Кальней

Московский государственный институт электронной техники

E-mail: hm2@mill.ru

Поступило

14.10.2004

Исправленный вариант

22.09.2005