Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, Об одном классе неравенств для ортонормированных систем, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 204–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:39:27

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Б. С. Кашин

В заметке предложен подход к доказательству неравенств типа Либа–Тирринга, использующий стандартный аппарат теории ортогональных рядов.

Библиография: 5 названий.

В 1976 г. в работе Либа и Тирринга [1] была установлена следующая

ТЕОРЕМА А. *Для произвольной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ имеет место неравенство*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_{\Phi}^{p/(p-1)} dx \right)^{2(p-1)/d} \leq C_{p,d} \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_2^2, \quad (1)$$

если $\max(1, d/2) < p \leq 1 + d/2$, где

$$\rho_{\Phi} \equiv \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(x) \quad (2)$$

и, как обычно, $\nabla \varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_d})$.

В дальнейшем серия неравенств типа (1) для конечных ортонормированных систем была установлена различными авторами. В частности, Ильиным [2] была доказана

ТЕОРЕМА В. *Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1)$ – ортонормированная система функций, заданных на единичной окружности S^1 , причем $\varphi_j \perp 1$, $j = 1, \dots, N$. Тогда имеет место неравенство*

$$\int_{S^1} \rho_{\Phi}^2 d\mu \leq C \sum_{j=1}^N \|\varphi_j^{(1/2)}\|_{L^2(S^1)}^2,$$

где для $f(z) = \sum_{k \neq 0} \hat{f}(k) z^k \in L^2(S^1)$

$$f^{(1/2)} = \sum_{k \neq 0} |k|^{1/2} \hat{f}(k) z^k$$

– производная порядка $1/2$ от функции f , а μ – нормированная мера Лебега на S^1 .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00062.

Интерес к неравенствам типа Либа–Тирринга связан с их приложениями в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. подробнее [3], а также [2]). Известные методы доказательства этих неравенств основаны на нетривиальных результатах из спектральной теории, используют информацию о поведении отрицательных собственных значений операторов типа Шредингера (см., например, [2]). В этой заметке предлагается подход к неравенствам типа Либа–Тирринга, основанный на стандартном аппарате теории ортогональных рядов: неравенствах для случайных рядов и классической теореме Литлвуда–Пэли. Ниже мы продемонстрируем этот подход, установив некоторое обобщение теоремы В. При этом рассуждения, приведенные ниже, применимы, по всей видимости, и для доказательства других неравенств указанного типа. Кроме того, наш подход позволяет в определенной степени прояснить вопрос о том, для каких систем $\{\varphi_j\}$ неравенства типа Либа–Тирринга “точны по порядку”.

Пусть

$$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(S^1), \quad \text{причем} \quad \varphi_j \perp 1, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (3)$$

Определим оператор

$$P_\Phi: l_2^N \rightarrow L^2(S^1),$$

действующий по правилу:

$$P_\Phi(\{c_j\}_{j=1}^N) = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j.$$

Пусть также при $\nu = 0, 1, \dots$

$$\pi_\nu: L^2(S^1) \rightarrow T_{2^\nu}$$

– ортопроектор на пространство тригонометрических полиномов вида

$$T_{2^\nu} = \left\{ t(z): t = \sum_{2^\nu \leq |k| < 2^{\nu+1}} a_k z^k \right\},$$

и пусть

$$\lambda_\nu(\Phi) = \|\pi_\nu \cdot P_\Phi: l_2^N \rightarrow T_{2^\nu}\|. \quad (4)$$

Очевидно, что $\lambda_\nu \leq 1$, $\nu = 0, 1, \dots$, если Φ – ортонормированная (или субортонормированная) система. Поэтому следующее неравенство обобщает теорему В.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой системы действительных функций Φ вида (3)*

$$\int_{S^1} \rho_\Phi^2 d\mu \leq C \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu(\Phi) \cdot \sum_{j=1}^N \sum_{2^\nu \leq |k| < 2^{\nu+1}} |\widehat{\varphi}_j(k)|^2,$$

где при $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$\gamma_\nu(\Phi) = \sum_{\beta=0}^{\nu} 2^\beta \cdot \lambda_\beta^2(\Phi), \quad (5)$$

функция ρ_Φ определена в (2), числа $\lambda_\beta(\Phi)$ в (4), а C – абсолютная постоянная.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, напомним некоторые нужные нам факты.

Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\varphi_j \in L^p(S^1)$, $1 \leq j \leq N$. Тогда, положив $\mathcal{F} = (\sum \varphi_j^2)^{1/2}$, имеем (см. [4; с. 52]):

$$C_1(p) \|\mathcal{F}\|_{L^p(S^1)}^p \leq \int_{S^1} \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \varphi_j \right\|_{L^p(S^1)}^p dt \leq C_2(p) \|\mathcal{F}\|_{L^p(S^1)}^p, \quad (6)$$

где $\{r_j(t)\}$ – функции Радемахера, $C_1(p) > 0$.

Далее нам потребуется известное следствие теоремы Литлвуда–Пэли (см., например, [5; с. 56]): если, принимающая действительные значения, функция $f \in L^p(S^1)$, $1 < p < \infty$, $f \perp 1$ и

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{\nu}(f), \quad \delta_{\nu}(f) = \sum_{2^{\nu} \leq |k| < 2^{\nu+1}} \hat{f}(k) z^k,$$

то

$$C_3(p) \|f\|_{L^p(S^1)} \leq \left\| \left(\sum \delta_{\nu}^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(S^1)} \leq C_4(p) \|f\|_{L^p(S^1)}, \quad C_3(p) > 0. \quad (7)$$

Нам потребуется также следующая простая

ЛЕММА. Для любой системы функций Φ вида (3) при $\beta = 0, 1, \dots$ справедливо неравенство

$$A = \left\| \sum_{j=1}^N \delta_{\beta}^2(\varphi_j) \right\|_{L^{\infty}(S^1)} \leq 2^{\beta+1} \cdot \lambda_{\beta}^2.$$

Действительно, пусть $z_0 \in S^1$ – такая точка, что

$$\left(\sum_{j=1}^N \delta_{\beta}^2(\varphi_j)(z_0) \right)^{1/2} = A^{1/2}.$$

Найдется набор чисел $\{c_j\}_{j=1}^N$ с $\sum_{j=1}^N c_j^2 = 1$ такой, что для тригонометрического многочлена

$$\sum_{j=1}^N c_j \delta_{\beta}(\varphi_j) = P(z) = \sum_{2^{\beta} \leq |k| < 2^{\beta+1}} a_k z^k$$

имеют место неравенства

$$\|P\|_{L^{\infty}(S^1)} \geq |P(z_0)| = A^{1/2},$$

а значит (см. (4)),

$$\begin{aligned} A^{1/2} &\leq \|P\|_{L^{\infty}(S^1)} \leq \sum_{2^{\beta} \leq |k| < 2^{\beta+1}} |a_k| \leq 2^{(\beta+1)/2} \left(\sum_{2^{\beta} \leq |k| < 2^{\beta+1}} |a_k|^2 \right)^{1/2} \\ &= 2^{(\beta+1)/2} \|P\|_{L^2(S^1)} \leq 2^{(\beta+1)/2} \lambda_{\beta}, \end{aligned}$$

что и требовалось (фактически мы использовали неравенство Никольского разных метрик, сводящееся в данном случае к неравенству Коши).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Используя (6), а затем (7) и вводя обозначение $\delta_\nu(t, z) = \delta_\nu\left(\sum_{j=1}^N r_j(t)\varphi_j(z)\right)$, имеем

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int_{S^1} \rho_\Phi^2 d\mu \leq C_5 \int_0^1 \left\| \sum r_j(t)\varphi_j \right\|_{L^4}^4 dt \\ &\leq C_6 \int_0^1 \int_{S^1} \left[\sum_{\nu=0}^\infty \delta_\nu^2(t, z) \right]^2 d\mu dt. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\frac{Q}{C_6} \leq \sum_{\nu, \beta=0}^\infty \int_0^1 \int_{S^1} \delta_\nu^2(t, z) \delta_\beta^2(t, z) d\mu dt. \quad (8)$$

При этом

$$\delta_\nu^2(t, z) = \left(\sum_{j=1}^N r_j(t) \delta_\nu(\varphi_j)(z) \right)^2 = \sum_{j, q=1}^N r_j(t) r_q(t) \delta_\nu(\varphi_j) \delta_\nu(\varphi_q),$$

а потому для каждого t

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \delta_\nu^2(t, z) \delta_\beta^2(t, z) d\mu &= \sum_{j, q, h, s=1}^N r_j(t) r_q(t) r_h(t) r_s(t) \\ &\quad \times \int_{S^1} \delta_\nu(\varphi_j) \delta_\nu(\varphi_q) \delta_\beta(\varphi_h) \delta_\beta(\varphi_s) d\mu. \end{aligned}$$

Учитывая, что интеграл $\int r_j r_q r_h r_s dt \neq 0$, только если в наборе (j, q, h, s) каждое число встречается четное число раз (и тогда этот интеграл равен единице), мы находим

$$\begin{aligned} I_{\nu, \beta} &\equiv \int_0^1 \int_{S^1} \delta_\nu^2(t, z) \delta_\beta^2(t, z) d\mu dt = \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N \int_{S^1} \delta_\nu^2(\varphi_j) \delta_\beta^2(\varphi_h) d\mu \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N \int_{S^1} \delta_\nu(\varphi_j) \delta_\beta(\varphi_j) \delta_\nu(\varphi_q) \delta_\beta(\varphi_q) d\mu - 2 \sum_{j=1}^N \int_{S^1} \delta_\nu^2(\varphi_j) \delta_\beta^2(\varphi_j) d\mu \\ &\leq \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_\nu^2(\varphi_j) \cdot \sum_{j=1}^N \delta_\beta^2(\varphi_j) d\mu + 2 \int_{S^1} \left[\sum_{j=1}^N \delta_\nu(\varphi_j) \delta_\beta(\varphi_j) \right]^2 d\mu. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши к сумме в последнем интеграле, находим

$$I_{\nu, \beta} \leq 3J_{\nu, \beta}, \quad \text{где} \quad J_{\nu, \beta} \equiv \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_\nu^2(\varphi_j) \cdot \sum_{j=1}^N \delta_\beta^2(\varphi_j) d\mu.$$

Поэтому (см. (8))

$$\frac{Q}{C_6} \leq 3 \sum_{\nu, \beta=0}^\infty J_{\nu, \beta} \leq 6 \sum_{\nu, \beta: \beta \leq \nu} J_{\nu, \beta}. \quad (9)$$

Используя для оценки слагаемых в сумме (9) лемму, имеем (см. также (5))

$$\frac{Q}{C_6} \leqslant 6 \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^{\nu} 2^{\beta+1} \lambda_{\beta}^2 \right] \cdot \int_{S^1} \sum_{j=1}^N \delta_{\nu}^2(\varphi_j) d\mu = 12 \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu}(\Phi) \left[\sum_{j=1}^N \sum_{2^k \leqslant |k| < 2^{k+1}} |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \right].$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Lieb, W. Thirring, “Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities”, *Studies in Mathematical Physics*, Essays in honor of Valentine Bargmann, Princeton Univ. Press, Princeton, 1976, 269–303.
- [2] А. А. Ильин, “Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 33–66.
- [3] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [4] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.
- [5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Физматлит, М., 1977.

Б. С. Кашин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

07.02.2006