Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, Н. Н. Дондукова, Контактные геодезические преобразования почти контактных метрических структур, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 209–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2802>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:04:37

УДК 514.7

КОНТАКТНО ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В. Ф. Кириченко, Н. Н. Дондукова

Введено понятие контактно-геодезического преобразования метрики почти контактной метрической структуры как контактного аналога голоморфно-геодезических преобразований метрики почти эрмитовой структуры. Получен ряд инвариантов таких преобразований. Доказано, что такие преобразования сохраняют свойство нормальности почти контактной метрической структуры. Доказано, что косимплектические и сасакиевы многообразия, а также многообразия Кенмоцу не допускают нетривиальных контактно-геодезических преобразований метрики, что является контактным аналогом известного результата Уэстлейка и Яно для келеровых многообразий.

Библиография: 12 названий.

Теория геодезических отображений псевдоримановых пространств составляет одну из старейших направлений исследований в римановой геометрии, истоки которого восходят к трудам Леви-Чивита [1], Томаса [2], Вейля [3]. В последние десятилетия интерес к этой проблематике был возрожден в многочисленных работах как отечественных, так и зарубежных исследователей (см., например, [4]). Во многих работах изучаются геодезические отображения псевдоримановых многообразий, наделенных дополнительной структурой. Одним из наиболее известных результатов является результат Уэстлейка [5] и Яно [6], утверждающий, что келерово многообразие не допускает нетривиальных геодезических преобразований, сохраняющих комплексную структуру.

В настоящей работе получен контактный аналог этих результатов. Введено понятие контактно-геодезического преобразования почти контактной метрической структуры как геодезического преобразования, сохраняющего почти контактную структуру. Доказано, что такие преобразования сохраняют свойство нормальности структуры. Доказано, что косимплектические и сасакиевы структуры, а также структуры Кенмоцу не допускают нетривиальных контактно-геодезических преобразований.

Пусть $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – связное n -мерное, $n > 1$, псевдориманово многообразие, $X(M)$ – модуль гладких векторных полей на M , ∇ – риманова связность метрики g , R – тензор Римана–Кристоффеля, δ – оператор кодифференцирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow \overline{M}$ псевдориманова многообразия (M, g) на псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \bar{g})$ называется *геодезическим* (в иной терминологии *проективным*) *отображением*, если любую геодезическую многообразия (M, g) он переводит в геодезическую многообразия $(\overline{M}, \bar{g})$. В этом случае на $\overline{M}$ возникает новая псевдориманова метрика $\tilde{g} = \varphi^* \bar{g}$, которую мы назовем *геодезическим преобразованием исходной метрики*. Ясно, что кривая является геодезической

в метрике $\tilde{g}$ тогда и только тогда, когда она является геодезической в метрике g . Эта ситуация коротко выражается так: *метрики g и $\tilde{g}$ имеют общие геодезические*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\overline{M} = M$, то геодезическое отображение φ называется *геодезическим преобразованием многообразия (M, g)* .

Хорошо известно [4], что если $\tilde{\nabla}$ – риманова связность метрики $\tilde{g}$, то тензор T аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид

$$T(X, Y) \equiv \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \psi(X)Y + \psi(Y)X, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad (1)$$

где ψ – точная 1-форма на M , вычисляемая по формуле

$$\psi = \frac{1}{2(n+1)} d \left(\ln \left| \frac{\det \tilde{g}}{\det g} \right| \right). \quad (2)$$

Назовем ее *формой геодезического искажения*. Вектор ζ , дуальный форме ψ , назовем *вектором геодезического искажения*. Хорошо известно [4], что геодезическое преобразование сохраняет тензор W типа $(3, 1)$, задаваемый тождеством

$$W(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1} (\langle r(Z), X \rangle Y - \langle r(Z), Y \rangle X),$$

где $r_p(X) = -(g_p)^{ij} R_p(X, e_i) e_j$ – эндоморфизм Риччи метрики g в точке $p \in M$, вычисленный в каком-либо базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ касательного пространства $T_p(M)$. Тензор W называется *тензором Вейля проективной кривизны*. Его обращение в нуль необходимо и достаточно для того, чтобы многообразие M (локально) допускало геодезическое отображение на пространство $\mathbb{R}^n$ (т.е. было проективно плоским). С другой стороны, легко видеть, что обращение этого тензора в нуль равносильно тому, что

$$R(X, Y)Z = \frac{\kappa}{n(n-1)} (\langle Z, X \rangle Y - \langle Z, Y \rangle X)$$

(где κ – скалярная кривизна метрики g), т.е. равносильно постоянству кривизны этого многообразия. Таким образом, проективно плоскими являются пространства постоянной кривизны и только они [4].

Более общо, переход от псевдоримановой метрики g к псевдоримановой метрике $\tilde{g}$ назовем *геодезическим преобразованием метрики g* , если эти метрики имеют общие геодезические. Как и выше, доказывается, что тензор T аффинной деформации от римановой связности ∇ метрики g к римановой связности $\tilde{\nabla}$ метрики $\tilde{g}$ вычисляется по формулам (1), (2). По-прежнему 1-форму ψ , фигурирующую в этих уравнениях, будем называть *формой геодезического искажения*. Поднимая индекс у метрики $\tilde{g}$ с помощью метрики g , мы приходим к сопряженному эндоморфизму f модуля $\mathcal{X}(M)$, задаваемому тождеством

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, fY), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Назовем этот эндоморфизм *оператором геодезической деформации* от метрики g к метрике $\tilde{g}$.

Тривиальным примером геодезического преобразования метрики является гомотетия, т.е. переход от метрики g к метрике $\tilde{g} = \lambda g$, где λ – ненулевая вещественная константа. Очевидно, для такого преобразования $\tilde{\nabla} = \nabla$, а значит, $\psi = 0$. Более общо, геодезическое преобразование метрики назовем *тривиальным*, если оно имеет нулевую форму геодезического искажения. В этом случае $\tilde{\nabla} = \nabla$, в частности,

$\nabla g = \nabla \tilde{g} = 0$. Но тогда $\nabla f = 0$, а значит, если метрика g знакоопределена, модуль $X(M)$ распадается в прямую сумму собственных распределений эндоморфизма f , параллельных в связности ∇ , а многообразие M локально изометрично произведению подмногообразий, сужения эндоморфизма f на которые являются скалярными эндоморфизмами. В этом случае

$$(M, g) = \prod_{k=1}^N (M_k, g_k), \quad (M, \tilde{g}) = \prod_{k=1}^N (M_k, \tilde{g}_k)$$

для некоторого N , где $\tilde{g}_k = \lambda_k g_k$, λ_k – ненулевая константа. Очевидно, верно и обратное. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Геометрическое преобразование метрики риманова многообразия тривиально тогда и только тогда, когда это многообразие локально изометрично произведению римановых многообразий, для которых соответствующие геодезические преобразования метрики являются гомотетиями.*

Пусть теперь $\mathcal{S} = \{\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ – почти контактная метрическая (короче, $A\mathcal{C}$ -) структура на M , $\dim M = 2n + 1 > 3$, где η – 1-форма на M , называемая *контактной формой*, ξ – векторное поле, называемое *характеристическим вектором*, Φ – поле тензора типа $(1, 1)$, называемого *структурным эндоморфизмом*, g – псевдориманова структура. При этом

$$\begin{aligned} 1) \quad \eta(\xi) = 1; \quad 2) \quad \Phi(\xi) = 0; \quad 3) \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad 4) \quad \Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi; \\ 5) \quad \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in X(M). \end{aligned} \quad (3)$$

Тройку (η, ξ, Φ) назовем *почти контактной подструктурой*. Хорошо известно [7], что тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ кососимметричен; он называется *фундаментальной формой $A\mathcal{C}$ -структуры*.

Многообразие с фиксированной на нем $A\mathcal{C}$ -структурой назовем $A\mathcal{C}$ -многообразием. На таком многообразии внутренним образом определены распределения

$$L = \text{im } \Phi = \ker \eta \quad \text{и} \quad M = \ker \Phi = \ker d\eta$$

размерностей $2n$ и 1 соответственно, причем $X = L \oplus M$, $L \cap M = 0$. Внутренним образом определены проекторы $l = -\Phi^2$ и $m = \eta \otimes \xi = \text{id} + \Phi^2$ на распределениях L и M соответственно. Более того, комплексификация $X^c(M) = \mathbb{C} \otimes X(M)$ распадается в прямую сумму собственных распределений эндоморфизма Φ^c :

$$X^c(M) = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^0,$$

причем $D_{\Phi}^0 = M$. Проекторами на слагаемые этой суммы будут соответственно эндоморфизмы

$$\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad m = \text{id} + \Phi^2.$$

В работе [8] было доказано, что к $(2n+1)$ -мерному $A\mathcal{C}$ -многообразию как метрическому f -многообразию дефекта 1 внутренним образом присоединяется G -структура, структурной группой которой является группа Ли $U(n) \times \{e\}$. Топальное пространство этой G -структуры состоит из модифицированных A -реперов, т.е. комплексных реперов вида

$$(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2\pi}(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2\pi}(e_a)$, $a = 1, \dots, n$, $(e_1, \dots, e_n)$ – базис пространства $\mathbb{L}_p$ как $\mathbb{C}$ -модуля, $p \in M$.

Обозначим через θ форму римановой связности ∇ на многообразии M . На пространстве присоединенной G -структуры тензорные компоненты формы римановой связности имеют вид [8]

$$\begin{aligned}\theta_{\hat{b}}^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},k}^a \omega^k, & \theta_{\hat{b}}^{\hat{a}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},k}^{\hat{a}} \omega^k, & \Phi_{\hat{b},k}^a &= 0, \\ \theta_0^a &= \sqrt{-1} \Phi_{0,k}^a \omega^k, & \theta_0^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,k}^{\hat{a}} \omega^k, & \Phi_{\hat{b},k}^{\hat{a}} &= 0, \\ \theta_a^0 &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0, & \theta_{\hat{a}}^0 &= \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},k}^0, & \Phi_{0,k}^0 &= 0.\end{aligned}$$

Кроме того, $\theta_j^i = \theta_{\hat{j}}^{\hat{i}} = 0$, $\theta_0^0 = 0$. Здесь индексы $i, j, k, \dots$ пробегает значения 0 до $2n$, индексы $a, b, c, \dots$ – значения от 1 до n , $\hat{a} = a + n$, $\hat{i} = i \pm n$.

С учетом этих соотношений первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве присоединенной G -структуры примет вид

$$\begin{aligned}d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b, \\ d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b, \\ d\omega &= C_{bc} \omega^b \wedge \omega^c + C^{bc} \omega_b \wedge \omega_c + C_c^b \omega^c \wedge \omega_b + C_b \omega \wedge \omega^b + C^b \omega \wedge \omega_b,\end{aligned}$$

где $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$, $\omega = \omega^0 = \varpi^* \eta$, ϖ – естественная проекция тотального пространства присоединенной G -структуры на многообразие M ,

$$\begin{aligned}B^{ab}{}_c &= -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{\hat{b},c}^a, & B^{abc} &= \frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a, & B^a{}_b &= \sqrt{-1} \Phi_{0,b}^a, \\ B^{ab} &= \sqrt{-1} \left(\Phi_{0,\hat{b}}^a - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^a \right), \\ B_{ab}{}^c &= \frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, & B_{abc} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}, & B_a{}^b &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, \\ B_{ab} &= -\sqrt{-1} \left(\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^{\hat{a}} \right), \\ C^{ab} &= \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0, & C_{ab} &= -\sqrt{-1} \Phi_{[a,b]}^0, & C_b^a &= -\sqrt{-1} (\Phi_{\hat{a},b}^0 + \Phi_{b,\hat{a}}^0), \\ C^a &= -\sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},0}^0, & C_a &= \sqrt{-1} \Phi_{a,0}^0.\end{aligned}$$

В [8] на пространстве присоединенной G -структуры введены в рассмотрение следующие семейства функций:

- 1) $B = \{B^i{}_{jk}\}$, $B^a{}_{\hat{b}c} = B^{ab}{}_c$, $B^{\hat{a}}{}_{b\hat{c}} = B_{ab}{}^c$, все прочие компоненты семейства B нулевые;
- 2) $C = \{C^i{}_{jk}\}$, $C^a{}_{\hat{b}c} = C^{abc}$, $C^{\hat{a}}{}_{bc} = C_{abc}$, все прочие компоненты семейства C нулевые;
- 3) $D = \{D^i{}_{jj}\}$, $D^a{}_{\hat{b}} = D^{ab}$, $D^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = D_{ab}$, все прочие компоненты семейства D нулевые;
- 4) $E = \{E^i{}_{jj}\}$, $E^a{}_b = B^a{}_b$, $E^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = B_a{}^b$, все остальные компоненты семейства E нулевые;
- 5) $F = \{F^i{}_{jj}\}$, $F^a{}_{\hat{b}} = C^{ab}$, $F^{\hat{a}}{}_{\hat{b}} = C_{ab}$, все остальные компоненты семейства F нулевые;

- 6) $G = \{G^i\}$, $G^a = C^a$, $G^{\hat{a}} = C_a$, все остальные компоненты семейства G нулевые.

В [8] показано, что эти системы функций определяют тензоры соответствующих типов на многообразии M , названные *первым, вторым, ..., шестым структурными тензорами* $\mathcal{A}\mathcal{C}$ -структуры соответственно. Там же доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Структурные тензоры $\mathcal{A}\mathcal{C}$ -структуры обладают следующими свойствами:*

- 1) $\Phi \circ B(X, Y) = -B(\Phi X, Y) = B(X, \Phi Y)$,
- 2) $\langle \langle B(X, Y), Z \rangle \rangle + \overline{\langle \langle Y, B(X, Z) \rangle \rangle} = 0$,
- 3) $\Phi \circ C(X, Y) = -C(\Phi X, Y) = -C(X, \Phi Y)$,
- 4) $\langle \langle C(X, Y), Z \rangle \rangle + \overline{\langle \langle Y, C(X, Z) \rangle \rangle} = 0$,
- 5) $\Phi \circ D = -D \circ \Phi$,
- 6) $\Phi \circ E = E \circ \Phi$,
- 7) $\Phi \circ F = -F \circ \Phi$,
- 8) $G \in \mathbf{L}$, $X, Y, Z \in \mathbf{X}(M)$,

где $\langle \langle X, Y \rangle \rangle = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1}\Omega(X, Y)$ – каноническая эрмитова метрика на многообразии M (см. [7]–[10]).

С учетом этих соотношений получим явные выражения структурных тензоров.

1) Первый структурный тензор:

$$B(\varepsilon_{\hat{b}}, \varepsilon_c)^a \varepsilon_a = B^{ab}{}_c \varepsilon_a = -\frac{1}{2} \sqrt{-1} \Phi_{\hat{b}, c}^a \varepsilon_a = -\frac{1}{2} (\Phi \circ \nabla_{\varepsilon_c}(\Phi) \varepsilon_{\hat{b}})^a \varepsilon_a,$$

откуда

$$\pi \circ B(\bar{\pi} e_b, \pi e_c) = -\frac{1}{2} \pi \circ \Phi \circ \nabla_{\pi e_c}(\Phi)(\bar{\pi} e_b).$$

Далее, в силу свойства (4₁) и определения эндоморфизмов π и $\bar{\pi}$ прямой подсчет показывает, что

$$B(\bar{\pi} e_b, \pi e_c) = \pi \circ B(e_b, e_c).$$

Следовательно,

$$\pi \circ B(e_b, e_c) = \pi^2 \circ B(e_b, e_c) = \pi \circ B(\bar{\pi} e_b, \pi e_c) = -\frac{1}{2} \pi \circ \Phi \circ \nabla_{\pi e_c}(\Phi)(\bar{\pi} e_b).$$

Поскольку векторы $\{e_a\}$ образуют базис $\mathbb{C}$ -линейного пространства $\mathbf{L}_p$, эти соотношения равносильны тождеству

$$\pi \circ B(lX, lY) = -\frac{1}{2} \pi \circ \Phi \circ \nabla_{\pi Y}(\Phi)(\bar{\pi} X), \quad X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

С учетом определения эндоморфизмов l , π и $\bar{\pi}$ перепишем это тождество в виде

$$(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)B(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) = \frac{1}{8}(-\Phi + \sqrt{-1}\Phi^2)\nabla_{\Phi^2 Y + \sqrt{-1}\Phi Y}(\Phi)(-\Phi^2 X + \sqrt{-1}\Phi X).$$

Раскрывая скобки и учитывая (4₁), а также то обстоятельство, что согласно определению тензора B $\text{in } B \subset \mathbf{L}$, а значит, $-\Phi^2 \circ B = B$, получим, что

$$\begin{aligned} B(X, Y) = & -\frac{1}{8} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) \\ & + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичным образом получаются выражения для остальных структурных тензоров:

$$C(X, Y) = -\frac{1}{8} \left\{ -\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X) \right\}; \quad (6)$$

$$D(X) = \frac{1}{4} \left\{ 2\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - 2\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi \nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi^2 \nabla_{\xi}(\Phi)(\Phi X) \right\}; \quad (7)$$

$$E(X) = -\frac{1}{2} \left\{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi \right\}; \quad (8)$$

$$F(X) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi \right\}; \quad (9)$$

$$G = \Phi \circ \nabla_{\xi}(\Phi)\xi. \quad (10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Геодезическое преобразование $g \rightarrow \tilde{g}$ метрики g $A\mathcal{C}$ -структуры $\mathcal{S}$ назовем *контактно-геодезическим*, короче, *c-геодезическим*, преобразованием, если $\{\eta, \xi, \Phi, \tilde{g}\}$ – $A\mathcal{C}$ -структура.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко заметить, что характеристический вектор ξ $A\mathcal{C}$ -структуры является собственным вектором оператора f геодезической деформации с собственным значением 1. В самом деле, из (3_{1,2,5}) немедленно следует тождество $\eta(X) = \langle \xi, X \rangle$. С другой стороны,

$$\eta(X) = \tilde{g}(\xi, X) = \langle \xi, f(X) \rangle = \langle f(\xi), X \rangle.$$

Сравнивая с предыдущим тождеством, в силу невырожденности метрики получаем, что $f(\xi) = \xi$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\varphi: M \rightarrow \overline{M}$ – геодезическое отображение $A\mathcal{C}$ -многообразия $\{M, \eta, \xi, \Phi, g\}$ на $A\mathcal{C}$ -многообразие $\{\overline{M}, \overline{\eta}, \overline{\xi}, \overline{\Phi}, \overline{g}\}$, сохраняющее почти контактную структуру. Именно, пусть φ_* – соответствующее отображение увлечения тензорных полей при диффеоморфизме φ , $\varphi^* = (\varphi_*)^{-1}$. Предполагается, что

$$\overline{\eta} = \varphi_*(\eta), \quad \overline{\xi} = \varphi_*(\xi), \quad \overline{\Phi} = \varphi_*(\Phi) = \varphi_* \circ \Phi \circ \varphi^*.$$

Очевидно, $g \rightarrow \tilde{g} = \varphi^* \overline{g}$ – c -геодезическое преобразование метрики g . В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\Phi X, \Phi Y) &= \varphi^*(\overline{g})(\Phi X, \Phi Y) = \overline{g}(\varphi_* \circ \Phi X, \varphi_* \circ \Phi Y) \\ &= \overline{g}(\overline{\Phi} \circ \varphi_* X, \overline{\Phi} \circ \varphi_* Y) = \overline{g}(\varphi_* X, \varphi_* Y) - \overline{\eta}(\varphi_* X) \cdot \overline{\eta}(\varphi_* Y) \\ &= \varphi^*(\overline{g})(X, Y) - \varphi^*(\overline{\eta})(X) \varphi^*(\overline{\eta})(Y) = \tilde{g}(X, Y) - \eta(X) \eta(Y). \end{aligned}$$

Пусть $g \rightarrow \tilde{g}$ – c -геодезическое преобразование $A\mathcal{C}$ -структуры $\mathcal{S}$. Пусть $T = \psi \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \psi$ – тензор аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\Phi)Y &= \tilde{\nabla}_X(\Phi Y) - \Phi \circ \tilde{\nabla}_X Y \\ &= \nabla_X(\Phi Y) + T(X, \Phi Y) - \Phi \circ \nabla_X Y - \Phi \circ T(X, Y) \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + T(X, \Phi Y) - \Phi \circ T(X, Y) \\ &= \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(Y)\Phi X. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (11)$$

Подставляя это соотношение в (5)–(10), записанные для преобразованной структуры, получим

$$\begin{aligned} 1) \quad & \tilde{B}(X, Y) = B(X, Y) - \frac{1}{2}\psi(\Phi Y)\Phi X - \frac{1}{2}\psi(\Phi^2 Y)\Phi^2 X, \\ 2) \quad & \tilde{C}(X, Y) = C(X, Y), \\ 3) \quad & \tilde{D}(X) = D(X), \\ 4) \quad & \tilde{E}(X) = E(X) - \psi(\xi)\Phi^2 X, \\ 5) \quad & \tilde{F}(X) = F(X), \\ 6) \quad & \tilde{G} = G, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Структурные тензоры второго, третьего, пятого и шестого рода являются инвариантами s -геодезических преобразований метрики $A\mathcal{C}$ -контактных многообразий.*

Рассмотрим некоторые приложения этого результата. Напомним [11], что $A\mathcal{C}$ -структура называется *нормальной*, если

$$2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0,$$

где N_Φ – тензор Нейенхейса эндоморфизма Φ , определяемый формулой

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}(\Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Важнейшими примерами нормальных $A\mathcal{C}$ -структур являются косимплектические и сасакиевы структуры, играющие центральную роль в контактной геометрии [11]. Необходимым и достаточным условием нормальности $A\mathcal{C}$ -структуры является равенство нулю второго, третьего, пятого и шестого структурных тензоров этой структуры [8]. С учетом теоремы 2 немедленно получаем

ТЕОРЕМА 3. *s -геодезические преобразования метрики переводят нормальную $A\mathcal{C}$ -структуру в нормальную $A\mathcal{C}$ -структуру.*

Теперь рассмотрим $A\mathcal{C}$ -структуры с нулевым первым структурным тензором. Это весьма общий тип $A\mathcal{C}$ -структур, включающий большинство частных случаев $A\mathcal{C}$ -структур, изучаемых в печати. Сюда относятся косимплектические и сасакиевы структуры, а также их обобщения – квазисасакиевы и контактные метрические структуры, почти косимплектические и слабо косимплектические структуры, структуры Кенмоцу, трансасакиевы и почти трансасакиевы структуры, и ряд других [8]. Назовем такие $A\mathcal{C}$ -структуры по аналогии с [10] *структурами квазикелерова типа*. Пусть M – $A\mathcal{C}$ -многообразие квазикелерова типа. Для него по определению $B = 0$. Подвергнем его метрику s -геодезическому преобразованию. Согласно (12₁) для преобразованной структуры

$$\tilde{B}(X, Y) = -\frac{1}{2}\{\psi(\Phi X)\Phi Y - \psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y\}, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (13)$$

Заметим, что вещественная часть тождества (4₂) имеет вид

$$\langle B(X, Y), Z \rangle + \langle X, B(Y, Z) \rangle = 0, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Применим это тождество к тензору $\tilde{B}$ с учетом (13), после упрощений получим $\psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y = 0$, а значит, $\psi(\Phi^2 X) = 0$. Используя (3₄), получаем отсюда, что

$$\psi(X) = \psi(\xi)\eta(X), \quad X \in \mathbf{X}(M). \quad (14)$$

В частности, с учетом (3₃)

$$\psi \circ \Phi = 0, \quad (15)$$

в силу чего тождество (11) принимает вид

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y - \psi(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M), \quad (16)$$

а тождество (12₁) – вид $\tilde{B} = 0$. В частности, справедлива

ТЕОРЕМА 4. *c-геодезические преобразования метрики переводят $A\mathcal{C}$ -структуру квазикелерова типа в $A\mathcal{C}$ -структуру квазикелерова типа.*

Пусть, в частности, M – косимплектическое многообразие. Тогда

$$\nabla\Phi = 0 \quad (17)$$

(см. [11]). Подвергнем его метрику c -геодезическому преобразованию. Ковариантно дифференцируя тождество $\tilde{g}(\Phi Y, Z) + \tilde{g}(Y, \Phi Z) = 0$, приходим к тождеству (очевидно, справедливому для всех $A\mathcal{C}$ -многообразий)

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X(\Phi)Z) = 0. \quad (18)$$

С учетом (16) и (17) это тождество перепишется в виде

$$\psi(Y)\tilde{g}(\Phi X, Z) + \psi(Z)\tilde{g}(\Phi X, Y) = 0,$$

или

$$\psi(Y)\tilde{g}(\Phi Z, X) + \psi(Z)\tilde{g}(\Phi Y, X) = 0,$$

и в силу невырожденности метрики $\tilde{g}$

$$\psi(Y)\Phi Z + \psi(Z)\Phi Y = 0, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Положив здесь $Z = \xi$, с учетом (3₂) получим, что $\psi(\xi)\Phi Y = 0$. В частности, если $Y \in \mathbf{L}$ – ненулевой вектор, то $\psi(\xi) = 0$, и в силу (14) $\psi = 0$. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 5. *Косимплектическое многообразие не допускает нетривиальных c-геодезических преобразований метрики.*

Пусть теперь M – многообразие Сасаки. Тогда

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y \rangle \xi - \eta(Y)X, \quad X, Y \in \mathbf{X}(M) \quad (19)$$

(см. [11]). С учетом (5) и (19) убеждаемся, что $B = 0$, т.е. M – многообразие квазикелерова типа. Подвергнем его метрику c -геодезическому преобразованию. С учетом (16) и (19) тождество (18) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{g}(X, hY)\eta(Z) - \eta(Y)\tilde{g}(X, Z) - \psi(Y)\tilde{g}(\Phi X, Z) \\ &+ \tilde{g}(X, hZ)\eta(Y) - \eta(Z)\tilde{g}(X, Y) - \psi(Z)\tilde{g}(\Phi X, Y) = 0, \end{aligned}$$

где h – оператор геодезической деформации от метрики $\tilde{g}$ к метрике g , или

$$\begin{aligned} \tilde{g}(hY, X)\eta(Z) - \eta(Y)\tilde{g}(Z, X) + \psi(Y)\tilde{g}(\Phi Z, X) \\ + \tilde{g}(hZ, X)\eta(Y) - \eta(Z)\tilde{g}(Y, X) + \psi(Z)\tilde{g}(\Phi Y, X) = 0, \end{aligned}$$

и в силу невырожденности метрики $\tilde{g}$

$$\eta(Z)h(Y) - \eta(Y)Z + \psi(Y)\Phi Z + \eta(Y)h(Z) - \eta(Z)Y + \psi(Z)\Phi Y = 0,$$

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Положив здесь $Z = \xi$, с учетом замечания 2 и (3₂) получим, что

$$h(Y) = Y - \psi(\xi)\Phi Y. \quad (20)$$

Заметим, что h – самосопряженный оператор, т.е.

$$\tilde{g}(h(X), Y) = \tilde{g}(X, h(Y)), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (21)$$

Используя тождество (20), получим отсюда, с учетом невырожденности метрики, что $\psi(\xi)\Phi Y = 0$. В частности, если $Y \in \mathcal{L}$ – ненулевой вектор, то $\psi(\xi) = 0$, и в силу (14) $\psi = 0$. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 6. *Многообразие Сасаки не допускает нетривиальных s -геодезических преобразований метрики.*

Теоремы 5 и 6 являются контактными аналогами упомянутого выше результата Уэстлейка [5] и Яно [6].

Пусть, наконец, M – многообразие Кенмоцу

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle \xi - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad (22)$$

(см. [12]). С учетом (5) и (22) убеждаемся, что M – многообразие квазикелерова типа. Подвергнем его метрику s -геодезическому преобразованию. С учетом (16) и (22) тождество (18) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\Phi X, hY)\eta(Z) - \eta(Y)\tilde{g}(\Phi X, Z) - \psi(Y)\tilde{g}(\Phi X, Z) \\ + \tilde{g}(\Phi X, hZ)\eta(Y) - \eta(Z)\tilde{g}(\Phi X, Y) - \psi(Z)\tilde{g}(\Phi X, Y) = 0, \end{aligned}$$

где h – оператор геодезической деформации от метрики $\tilde{g}$ к метрике g , или

$$\begin{aligned} -\tilde{g}(\Phi \circ h(Y), X)\eta(Z) + \eta(Y)\tilde{g}(\Phi Z, X) + \psi(Y)\tilde{g}(\Phi Z, X) \\ -\tilde{g}(\Phi \circ h(Z), X)\eta(Y) + \eta(Z)\tilde{g}(\Phi Y, X) + \psi(Z)\tilde{g}(\Phi Y, X) = 0, \end{aligned}$$

и в силу невырожденности метрики $\tilde{g}$

$$-\eta(Z)\Phi \circ h(Y) + \eta(Y)\Phi Z + \psi(Y)\Phi Z - \eta(Y)\Phi \circ h(Z) + \eta(Z)\Phi Y + \psi(Z)\Phi Y = 0, \quad (23)$$

$X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Положив здесь $Z = \xi$, с учетом (3₂) получим, что

$$\Phi \circ h(Y) = (1 + \psi(\xi))\Phi Y. \quad (24)$$

Подставляя это тождество в (23), убеждаемся, что (23), а значит, и (18), удовлетворяются тождественно в силу (14).

ЛЕММА 1. *Оператор геодезической деформации s -геодезического преобразования метрики $\mathcal{AC}$ -структуры коммутирует со структурным эндоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (21) имеем

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\Phi \circ h(X), Y) &= -\tilde{g}(X, h \circ \Phi(Y)) = -\langle X, \Phi Y \rangle \\ &= \langle \Phi X, Y \rangle = \tilde{g}(\Phi X, h(Y)) = \tilde{g}(h \circ \Phi(X), Y).\end{aligned}$$

В силу невырожденности метрики $\tilde{g}$ получаем, что $\Phi \circ h = h \circ \Phi$.

С учетом этой леммы тождество (24) переписывается в виде

$$h \circ \Phi(Y) = (1 + \psi(\xi))\Phi Y,$$

или

$$h \circ (-\Phi^2)Y = (1 + \psi(\xi))(-\Phi^2)Y. \quad (25)$$

С другой стороны, с учетом замечания 2

$$h \circ (\eta \otimes \xi)Y = \eta(Y)h(\xi) = \eta(Y)\xi = (\eta \otimes \xi)Y. \quad (26)$$

Складывая почленно (25) и (26), с учетом (34) получим

$$h = \text{id} - \psi(\xi)\Phi^2.$$

С учетом этого соотношения немедленно получаем, что

$$g(X, Y) = \tilde{g}(X, Y) + \alpha\tilde{g}(\Phi X, \Phi Y),$$

или с учетом (35)

$$g(X, Y) = (1 + \alpha)\tilde{g}(X, Y) - \alpha\eta(X)\eta(Y), \quad \alpha = \psi(\xi), \quad X, Y \in \mathbf{X}(M). \quad (27)$$

Пусть ∇ и $\tilde{\nabla}$ – римановы связности метрик g и $\tilde{g}$. Вычислим тензор аффинной деформации $T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$. Для этого применим к обеим частям тождества (27) оператор ∇_Z , учитывая, что $\nabla_Z(\eta)(X, Y) = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$ (см. [12]). Имеем

$$\begin{aligned}0 = \nabla_Z(g)(X, Y) &= \tilde{g}(X, Y)d\alpha(Z) + (1 + \alpha)\tilde{\nabla}_Z(\tilde{g})(X, Y) \\ &\quad - (1 + \alpha)T_Z(\tilde{g})(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)d\alpha(Z) \\ &\quad - \alpha\nabla_Z(\eta)(X)\eta(Y) - \alpha\eta(X)\nabla_Z(\eta)(Y)\end{aligned}$$

(где $T_X Y = T(X, Y)$; эндоморфизм T_X отождествляется с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры многообразия), или

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)(\tilde{g}(T(Z, X), Y) + \tilde{g}(X, T(Z, Y))) \\ = -\tilde{g}(X, Y)d\alpha(Z) + \alpha\langle \Phi Z, \Phi X \rangle \eta(Y) + \alpha\langle \Phi Z, \Phi Y \rangle \eta(X).\end{aligned}$$

Дважды производя циклическую перестановку аргументов и затем почленно складывая первые два и почленно вычитая третье, получим

$$\begin{aligned}2(1 + \alpha)\tilde{g}(T(Z, X), Y) &= -\tilde{g}(\Phi X, \Phi Y)d\alpha(Z) \\ &\quad - \tilde{g}(\Phi Y, \Phi Z)d\alpha(X) + \tilde{g}(\Phi Z, \Phi X)d\alpha(Y) + 2\alpha\langle \Phi Z, \Phi X \rangle \eta(Y).\end{aligned}$$

С учетом невырожденности метрики $\tilde{g}$ и того, что $\eta(Y) = \tilde{g}(\xi, Y)$, получаем

$$2(1 + \alpha)T(Z, X) = d\alpha(Z)\Phi^2 X + d\alpha(X)\Phi^2 Z + \tilde{g}(\Phi Z, \Phi X) \text{grad}(\alpha) + 2\alpha\langle \Phi Z, \Phi X \rangle \xi.$$

В частности, в силу (3₂) $T(\xi, \xi) = 0$. Но поскольку переход от метрики g к метрике $\tilde{g}$ является проективным преобразованием,

$$T(X, Y) = \psi(X)Y + \psi(Y)X,$$

а значит, $2\psi(\xi)\xi = T(\xi, \xi) = 0$. В силу (14) $\psi = 0$, а значит, справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Многообразие Кенмотсу не допускает нетривиальных с-геодезических преобразований метрики.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Levi-Civita, “Sulle transformationi delle equazioni dinamiche”, *Ann. Math. Milano, Ser. 2*, **24** (1894), 255–300.
- [2] T. Y. Thomas, “On projective and equiprojective geometries of paths”, *PWC Nat. Acad. Sci. USA*, **11** (1925), 198–203.
- [3] H. Weyl, “Zur Infinitesimalgeometrie Einordnung der projectiven und der conformen Auffassung”, *Göttingen Nachr.*, 1921, 99–112.
- [4] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, М., 1979.
- [5] W. J. Westlake, “Hermitian spaces in geodesic correspondence”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5:2** (1954), 301–303.
- [6] K. Yano, “Sur la correspondance projective entre deux espaces pseudohermitens”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **239** (1956), 1346–1348.
- [7] В. Ф. Кириченко, “Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной геометрии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48:4** (1984), 711–739.
- [8] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [9] V. F. Kirichenko, “Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry, II”, *Geom. Dedicata*, **52** (1994), 53–85.
- [10] В. Ф. Кириченко, “Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий”, *Итоги науки и техн. Проблемы геометрии*, **18**, ВИНТИ АН СССР, 1986, 25–71.
- [11] D. E. Blair, “Contact manifolds in Riemannian geometry”, *Lecture Notes Math.*, **509** (1976), 1–145.
- [12] K. Kenmotsu, “A class of almost contact Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J.*, **24** (1972), 93–103.

В. Ф. Кириченко

Московский государственный педагогический университет

Поступило

16.03.2005

Н. Н. Дондукова

Московский государственный педагогический университет