Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Закон “отсутствия предпочтения” и соответствующие распределения в частотной теории вероятностей, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 220–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:09:53

УДК 517.958

ЗАКОН “ОТСУТСТВИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ” И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЧАСТОТНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В. П. Маслов

В работе получены два новых распределения в частотной теории вероятностей, которые демонстрируются, в частности, на примере частотных словарей. Одно распределение дает логарифмическую поправку к закону Ципфа–Мандельброта, а другое описывает поведение “хвостов” графика.

Библиография: 12 названий.

Мы будем рассматривать частотную теорию вероятностей и потребуем дополнительное условие применительно к понятию случайной величины. А именно: предположим, что набор значений случайной величины (т.е. действительные числа $x_1, \dots, x_s$) *упорядочен*. Обычно в математической статистике относительно значений случайной величины устанавливают упорядоченность по их величине (“порядковые статистики”). Среди чисел $x_1, \dots, x_s$ могут быть и равные [1; с. 115]. В последнем случае их, как правило, объединяют, складывая при этом отвечающие им “вероятности”, т.е. отношение числа “попаданий” на x_i к общему числу испытаний. Если же мы вводим общие отношения порядка, то объединять равные значения x_i уже не имеем права. В известной мере отношение порядка позволяет называть набор $x_1, \dots, x_s$ конечным “временным рядом” [1; с. 117].

Отличие рассматриваемой теории вероятностей от классической заключается также в том, что стремиться к бесконечности может не только число испытаний N , но и s . Более того, если временной ряд бесконечный, то $s = \infty$. Пусть n_i – число “выпадений” значения x_i , тогда

$$\sum_{i=1}^s \frac{n_i}{N} x_i = M, \quad (1)$$

где M – математическое ожидание. Отметим, что в левой части формулы (1) представлено “скалярное произведение” сопряженных пар, одна из которых нормирована, т.е. $\sum_{i=1}^s n_i/N = 1$, или, как говорят физики, набор $\{n_i\}$ является “удельной величиной”. В термодинамике она называется *экстенсивной величиной*, а ее “сопряженная” – *интенсивной* (например, объем–давление).

Отметим еще одну аналогию для формулы (1). Если рассматривать вместо суммы интеграл, то это будет скалярное произведение элементов двух разных сопряженных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 05-01-00824.

пространств: пространства мер V и пространства C ($C^* = V$). В данном случае это скалярное произведение отвечает “норме”. Дирак, хотя был физиком, различал в скалярном произведении “брэкет” левую и правую составляющую: “брэ” и “кет”. Поэтому мы можем выбирать абсолютно произвольные сопряженные пары, нужно только, чтобы одна из них имела смысл интенсивной величины (например, значения уровней энергии), а другая могла быть нормированной, удельной.

Рассмотрим примеры случайных величин.

ПРИМЕР 1. Пусть x_i – цена одной акции (одного финансового инструмента) в конце дня, Q_i – число сделок по этому финансовому инструменту, $\sum_{i=1}^s \lambda_i Q_i$ – общий оборот капитала за s дней. Здесь цены x_i упорядочены по дням. Они могут понижаться или повышаться, а могут оставаться равными в разные дни. Это временной ряд.

ПРИМЕР 2. Пусть λ_i – уровни энергии одночастичной задачи (они упорядочены по величине), n_i – число частиц на уровне λ_i , $\sum_{i=1}^s n_i = N$, $\sum_{i=1}^s n_i \lambda_i = M$, где M – полная энергия системы N частиц.

Рассмотрим известное в теории вероятностей понятие “кумулятивной вероятности”. Оно вводится в теории вероятностей, лишь когда устанавливается отношение порядка, например, в порядковой статистике, поскольку существенно зависит от отношения порядка.

Кумулятивная вероятность $\mathcal{P}_k$ есть сумма первых k вероятностей в последовательности x_i :

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i, \quad \text{где } k < s.$$

В N -частичной задаче примера 2 эта вероятность с точностью до нормировки $1/N$ есть число частиц ниже уровня энергии λ_{k+1} , а в примере 1 – это объем сделок с 1-го до k -го дня.

По существу кумулятивная вероятность это и есть “распределение”. Иначе говоря, распределение обязательно требует упорядоченности значений случайной величины или понятия конечного временного ряда.

Если все варианты, для которых $\sum_{i=1}^s n_i = N$ и $\sum_{i=1}^s n_i x_i \leq M$ равноправны, равноценны или, иначе говоря, равновероятны, то в силу теоремы, доказанной автором в [2]–[4], большинство вариантов будет скапливаться около следующей зависимости “кумулятивной вероятности” $N_l = \sum_{i=1}^l n_i$:

$$N_l = \sum_{i=1}^l \frac{1}{e^{\beta x_i + \sigma} - 1}, \quad (2)$$

где β и σ определяются из условий

$$N_s = N, \quad \sum_{i=1}^s \frac{x_i}{e^{\beta x_i + \sigma} - 1} = M, \quad \text{если } N \rightarrow \infty \text{ и } s \rightarrow \infty.$$

В силу вышеизложенного мы можем точно определить константы β и σ уже по двум значениям отрезка временного ряда x_{s_k} и $x_{s_{k+1}}$.

Теорема, которая следует из [2], [4], [5], точно формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть все варианты наборов $\{n_i\}$ таких, что $\sum_{i=1}^s n_i x_i \leq M$, равновероятны. Тогда множество наборов $\{n_i\}$, для которого

$$\left| \sum_{i=1}^l n_i - \sum_{i=1}^l \frac{1}{e^{\beta x_i + \sigma} - 1} \right| \geq \sqrt{N} \ln^{1/2+\varepsilon} N, \quad (3)$$

меньше чем c/N^k (где c и k – любые числа, $l > \varepsilon N$, ε – сколь угодно малое) относительно всего количества наборов.

В теории вероятностей и в теории временных рядов очень часто рассматривается последовательность (целых) чисел $a_1, a_2, \dots, a_N$ с фиксированной суммой $\sum_{i=1}^N a_i = A$. Можно сказать, не уменьшая общности, что $a_i \geq 0$ и что это только вероятности, а значения случайной величины не играют роли. Так, например, в игре в орла и решку, каковы значения выигрыша и проигрыша несущественно. Для такого ряда при всех $N' < N \rightarrow \infty$ может иметь место условие Гёльдера:

$$\alpha^0 = \sup_{\alpha} \lim_{N'} \max_{1 \leq i \leq N'} \frac{|a_i - a_j|^\alpha}{(j-i)} \quad (4)$$

при $N' \rightarrow \infty$, а также близкое понятие размерности. Полагая $b_{i,k} = |a_i - a_{i-k}|$ и $b_k = \max_{1 \leq i \leq N} b_{i,k}$, $j-i=k$, мы получим определение размерности b_k .

Перестроим теперь набор $\{a_1, \dots, a_N\}$ согласно порядковой статистике $a_{i_k} \geq a_{i_{k-1}} \geq a_{i_{k-2}}$ и, помечая номер элемента упорядоченного по “ранжиру” временного “ряда” (последовательности) через

$$a^{(k)} \in \{a_1, \dots, a_N\}, \quad a^{(N)} \leq a^{(N-1)} \leq a^{(N-2)} \leq \dots \leq a^{(1)}, \quad (5)$$

будем называть перестройку временного ряда *сортировкой колеблющегося ряда в порядковый ряд* (см. ниже).

Итак, окончательно мы получаем ряд (последовательность целых неотрицательных чисел) $a^{(1)}, \dots, a^{(N)}$ такой, что $a^{(i)} \geq a^{(i+1)} \geq 0$, причем $\sum_{i=1}^N a^{(i)} = A$; $N \gg 1$.

Что можно сказать про исходный числовой ряд, как его можно охарактеризовать?

Рассмотрим еще один пример временного ряда, удовлетворяющего условию (4). Пусть каждому целому числу a_i соответствует a_i кубиков с единичным ребром, помеченных номером i . Положим все кубики в мешок, перемешаем их и, доставая из мешка кубики наугад, будем фиксировать последовательность их номеров. В результате получим новый временной ряд: длина которого равна сумме a_i . Закодируем этот временной ряд с помощью двоичных чисел, разделяя их с помощью обычного разделительного кодирования. Пусть Γ – длина минимального кода этого временного ряда, который мы назовем массивом текста. Мы предполагаем, что этот временной ряд находится в общем положении (см., например, [6]), т.е. его колмогоровская сложность максимальна.

Это понятие очень близко к понятию “общего положения” в топологии. Там “общим положением”, например, кривой на плоскости относительно проектирования на ось абсцисс, называется такое расположение кривой, при котором “мощность” множества близких кривых с теми же свойствами много больше “мощности” множества кривых с другими свойствами. А это похоже на те соображения, которые продумал Больцман как ответ на возражение Цермело: если из многообразия всех возможных начальных состояний взять произвольным образом одно, то крайне невероятно, что оно окажется с убывающей энтропией.

Разделив на N константу A , мы получим арифметическое среднее

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a^{(i)} = \frac{A}{N}.$$

Пусть $\alpha = \min_{1 \leq i \leq N} \omega^{(i)}$, тогда мы можем записать последовательность $\{a^{(i)}\}_{i=1}^N$ в виде

$$a^{(i)} = \omega_i + \alpha.$$

Пусть задано N, α и A . Рассмотрим множество всех целых положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^N \bar{\omega}_i = B, \quad (6)$$

где $B = A - \alpha N$, $\bar{\omega}_N = 1$ при заданном B . Это множество конечно.

Порядковая сортировка временного ряда наиболее удобна для его кратчайшего по длине кодирования. Тогда длины кодов слова λ_i , отвечающего i -му номеру ω_i , должны удовлетворять обратной системе неравенств

$$\lambda_i \leq \lambda_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Если длины λ_i фиксированы, то очевидно, что любая перестановка удлинняет общую среднюю длину

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\omega_i}{A - \alpha N},$$

поскольку $\omega_i/(A - \alpha N)$ можно трактовать как частоту $\nu_i = \omega_i/(A - \alpha N)$ встречаемости слова длины λ_i .

Фактически мы должны закодировать номер ω_i .

Для того чтобы невозможно было по средней длине слова декодировать это расположение, будем производить нумерацию слов простыми числами. Именно в этом последнем случае мы можем однозначно и просто декодировать их расположение¹.

Пусть $\Upsilon_i = p_i$ – последовательность простых чисел:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 3, \quad p_4 = 5, \quad p_5 = 7, \dots, \quad p_s, \quad \dots$$

Отметим, что в интернете легко найти последовательность простых чисел до самых высоких значений. Разумеется, меньшей длина кода будет для случая, когда мы не пропускаем ни одного простого числа при нумерации и когда большая частота будет умножаться на меньшую длину закодированного числом p_s слова, поскольку длина кода s -го слова равна $\log_2 p_s$, а длина кода всего расположения равна

$$\sum_{i=1}^N \omega_i (\log_2 p_i) = \Gamma. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что в главном члене Γ совпадает с длиной кода рассмотренного выше массива текста. Имеем

$$\prod_{i=1}^N p_i^{\omega_i} = 2^\Gamma.$$

¹Эта идеология близка к идеологии доказательства теоремы Гёделя о неполноте [7].

Разложение целого числа на простые единственно, причем алгоритмы нахождения целых чисел – степеней ω_i известны. И следовательно для адресата процедура нахождения частот однозначна. На этом факте основано так называемое чешское числение (см. [8; с. 190]).

Теперь рассмотрим при заданном Γ множество $\{\bar{\omega}_i\}$ (см. (6)). Нормируем $\bar{\nu}_i = (\bar{\omega}_i - \alpha)/A$. Таким образом, средняя длина слова, равная

$$\sum_{i=1}^N \bar{\nu}_i (\log_2 p_i + 1) = \frac{\Gamma - \alpha N}{A},$$

задана.

При этом дополнительном условии набор $\bar{\omega}_i$ и $\bar{\nu}_i$ – единственен. Наша задача обратная: нужно, чтобы набор решений был достаточно широк. С точки зрения теории чисел (см. [8]) тогда естественно выбрать в качестве $\Upsilon_i = \pi(i)$ функцию, обратную к p_i ($\pi(p_i) = i$). Мы получим при добавлении условия

$$\sum_{i=1}^N \bar{\omega}_i \ln \pi(i) = \Gamma' \quad (8)$$

(средняя длина словаря) при фиксированном Γ' достаточно большой набор равно-возможных (с точки зрения адресата, получившего числа A , N и Γ') решений ω_i уравнений (6) и (8), большинство которых (в общем положении) будет удовлетворять условию максимальности энтропии Шеннона

$$\sum_{i=1}^N \bar{\nu}_i \log_2 \bar{\nu}_i \rightarrow \max. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N \rightarrow \infty$, $A \gg N$. Тогда для произвольного $\epsilon > 0$ доля всех вариантов распределения $\{\bar{\omega}_i\}_{i=1}^N$ (и соответственно $\{\bar{\nu}_i\}$), обеспечивающих заданную среднюю длину слова Γ' , для которых $|\bar{\nu}_i - \tilde{\nu}_i| \geq \epsilon$ (где $\tilde{\nu}_i$ – решение (9) при условии (8)), не превосходит $2^{-c\epsilon^2 \Gamma'}$, где c – константа.

Следовательно, если исходные значения $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ и $\nu_i = (\omega_i - \alpha)/A$ не удовлетворяют условию (9), то $\{\omega_i\}_{i=1}^N$ находятся не “в общем положении” относительно всевозможных наборов $\{\bar{\omega}_i\}$ с заданным точно фиксированным кодом Γ' .

Для любых ω_i , удовлетворяющих условию (8), где точное равенство заменено на $\leq$, аналогично [9], метод неопределенных множителей Лагранжа, обеспечивающий (9), дает значение

$$\bar{\nu}_i = \tilde{\nu}_i = c_1 e^{-c_2 (\log_2 \pi(i))}, \quad (10)$$

c_1, c_2 – некоторые константы, а поскольку, как известно, $\pi(i) \sim i/\log_2 i$, то мы получаем

$$\frac{\tilde{\omega}_i - \alpha}{A} = \tilde{\nu}_i = c_1 \left(\frac{\log i}{i} \right)^{c_2}. \quad (11)$$

Очевидно, что при заданных N и Γ' из формулы (11) однозначно находятся c_1 и c_2 .

Будем называть $D = 1/c_2$ размерностью [10], $F = 1/(c_1 A)$ префактором, α постфактором.

В тех случаях, когда варианты $\bar{\omega}_i$, удовлетворяющие равенству (8), удовлетворяют решению (11), максимумы энтропии Шеннона совпадают и в этой области и условие (11) выполняется для данного словаря.

ПРИМЕР 3. Гёльдеровский показатель Леви для дискретного винеровского процесса. Известно, что размерность α^0 (условие Гельдера) для последовательности, отвечающей броуновскому ряду, равна двум: $D = 2$. В силу вышесказанного $\omega_k = \max_{1 \leq i \leq N} b_{ik}$, где $b_{ik} = a_i - a_{i-k}$, в общем положении удовлетворяет условию Леви

$$\max_i \frac{(a_i - a_{i-k})k^{1/2}}{\ln^{1/2} k} \approx c_2,$$

а значит,

$$\omega_k = \alpha + c_1 \left(\frac{\log_2 k}{k} \right)^{1/2},$$

для a_i в общем положении.

Обратим внимание на одну *характеристику* последовательности $\{\omega_i\}$.

Во-первых, будем трактовать n_i как число повторяющихся элементов a_i . Имеем

$$a_{i-1} < a_i = a_{i+1} \cdots = a_{i+n_i} < a_{i+n_i+1}.$$

Перенумеруем разные элементы последовательности a_i , ставя в соответствие i -му номеру число повторений элемента с этим номером. Теперь в последовательности не будет повторяющихся членов. Соответственно перенумеруем $\{\omega_i\}$.

Из теоремы 1 имеем (в новой нумерации) при $\sigma \ll 1$ и $\beta \ll 1$, $\omega_i - \omega_{i-1} \sim i$

$$N_l \cong T \ln \frac{\omega_l}{1 + \alpha \omega_l}, \quad T, \alpha - \text{const.} \tag{12}$$

Функцию N_l в этой новой нумерации будем называть обратным рангом, отвечающим исходной последовательности a_i .

В силу того, что последовательности $\{\omega_i\}$ и n_i удовлетворяют плотности распределения из теоремы 1, т.е. известной формуле Бозе–Эйнштейна, то N_l является обратным рангом бозе-эйнштейновского осциллятора. Для общей исходной последовательности a_i эта формула характеризует связь временного ряда с вероятностью распределения n_i формулы из теоремы 1, т.е. вероятность того, как часто повторяются члены исходной последовательности a_i ,

Обратный ранг в формуле (12) можно рассматривать как функцию от осредненного значения ω_i^{CP} , которое нужно вычислять следующим образом. Нужно взять среднее геометрическое от ω_i по интервалу $\pi(i)$, т.е. по всем целым i , для которых $\pi(i)$ одинаковое. Функцию $\alpha \omega_i^{\text{CP}}$, $\alpha < 1$, будем называть функцией равновесия последовательности $\{\omega_i\}$. Термодинамическая картина такого множества $\{\omega_i\}$ описана в [11]. Поскольку эта функция линейна, то можно сопоставить последовательность $\{\omega_i\}$ со смесью бозе-газов с различными температурами и одним химпотенциалом.

ПРИМЕР 4. Другие числовые последовательности.

Эти формулы могут быть применены к следующим структурам:

- частотность слов
- число цитирования
- число посещений сайтов
- число проданных экземпляров книг
- число принятых звонков
- диаметр лунных кратеров
- частотность фамилий

распределение банков по активам
распределение по городам.

Отметим, что для городов слишком большая перегрузка населения может привести к фазовому переходу и потере равновесия, как если бы в одной части лодки скопилось слишком большое количество людей [11].

ПРИМЕР 5. Частота встречаемости слов. Экспериментально уловить логарифмическую поправку трудно. Самые точные данные можно получить лишь на материале частотных словарей. В этом случае нет ошибок приборов или компьютеров, есть лишь проблема распознавания той кривой, который удовлетворяет зависимость частоты встречаемости слова от его номера (ранга по ранжиру) по экспериментальным точкам.

Рис. 1. Словарь BNC-100. Зависимость констант C_i от номера i (ранга по убыванию частоты)

Закон Ципфа состоит в том, что частота обратно пропорциональна рангу слова. Ципф заметил эту закономерность на огромном числе словарей, причем как современных европейских и восточных языков, так и древних. При этом в силу того, что частоты в больших массивах принимают достаточно большие значения, эта зависимость рассматривается в логарифмических координатах. Графиком такой зависимости в логарифмических координатах будет прямая с наклоном в 45° . Если соотношение $\omega_i \times i = C$, $C = \text{const}$ (что является другой записью закона Ципфа), рассматривать в логарифмических координатах, то в силу того, что константа $C = A c_1$ принимает очень большие значения, порядка 10^{10} , даже изменение этой константы вдвое для логарифма от нее меняется только на величину логарифма 2, что является незначительной поправкой. В то же время в обычных координатах это изменение существенно. Поэтому мы будем рассматривать изменение этой константы как функцию от ранга, вычисляя произведение ранга i на частоту ω_i для каждого слова. Мы найдем, насколько это произведение близко к константе, не зависящей от i . Параллельно рассмотрим закон Ципфа с логарифмической поправкой, выведенной выше: насколько мало $C_i = i \omega_i / \log_2 i$ зависит от i . Если C_i как функция от i ложится близко к наклонной прямой, то с помощью постфактора α мы можем эту наклонную сделать параллельной оси абсцисс.

Рис. 2А. Закон Ципфа: $\text{ранг} \times \text{встречаемость} = \text{const}$

Рис. 2В. Закон Ципфа с логарифмической поправкой

Продemonстрируем это на графиках двух словарей, построенных на базе Британского Национального корпуса (BNC) [12]. Первый “BNC-100” – это фрагмент нелемматизированного (словоформы не объединены в одну лексему) частотного словаря BNC, включающий 8189 словоформ от самых высоких частот до частоты 100.

Второй “BNC-800” – фрагмент лемматизированного (словоформы сведены к лексемам) частотного словаря BNC, содержит 6318 слов до частоты 800.

На рис. 1 (для словаря BNC-100) $c_2 = 0.9$. Верхняя кривая C_i построена с учетом логарифмической поправки и постфактора $\alpha = 90$, а средняя кривая для C_i – без

Рис. 2с. Закон Ципфа с логарифмической поправкой и постфактором

учета логарифмической поправки. Нижняя кривая с логарифмической поправкой без постфактора ($\alpha = 0$). Нужно рассматривать отрезок от $i = 200$ до $i = 3000$. Он похож на отрезок наклонной, и эту наклонную можно выпрямить с помощью увеличения постфактора. Заметим, что от нижней кривой к верхней – постфактор 90. Если его еще увеличить, то наклонная на указанном интервале полностью выпрямится.

На рис. 2а, 2б, 2с для словаря BNC-800, в котором обрезано 130 слов с максимальной встречаемостью и все слова с рангом более 3000, показано, что изменение константы C_i с использованием логарифмической поправки и постфактора α для рангов в интервале от 250 до 2000 лежит в узком промежутке: от 0.98 до 1.01, а для рангов от 2000 до 3000 – в промежутке от 1.01 до 1.04. Если изменить постфактор α , начиная от ранга 1300, то интервал изменения C_i будет еще более узким. Таким образом, в самом законе Ципфа эта величина меняется в два раза, а в формуле с логарифмической поправкой и постфактором она меняется в очень узком интервале. Это показывает, что логарифмическая добавка в данном примере в 6 раз улучшает известное приближение Ципфа к частотным словарям.

ПРИМЕР 6. Формулы для “хвостов” графика. В ряде задач, связанных с землетрясениями, к которым применим степенной закон повторяемости Гутенберга–Рихтера, наиболее важным оказывается не выполнение закона, а отклонения от него: “загибы” графика на его концах. Проще всего рассмотреть эти загибы опять же на графиках частотных словарей.

Для этого будем отсчитывать слова не от самой высокой частоты в данном словаре, а от самой низкой, располагая, как и раньше, все слова, относящиеся к одной частоте, в любом (например, алфавитном) порядке. В этом случае мы можем применить формулу (2). Будем называть N_i опять же рангом слова (хотя в этом случае ранжирование идет в обратном порядке: от слов с самой низкой частотой к словам с самой высокой). Тогда графики, соответствующие формуле (2), будут совпадать

Рис. 3. Словарь BNC-100. Зависимость ранга (по возрастанию частоты) от частоты. $\gamma = 0$, $\beta = 0.000225$

Рис. 4. Словарь BNC-800. Зависимость ранга (по возрастанию частоты) от частоты

с графиками части словаря для невысоких частот, и словарь полностью будет описан двумя графиками зависимости номера слова от частоты. Это же относится к хвостам и других аналогичных зависимостей.

На рис. 3 (для словаря BNC-100) и 4 (для словаря BNC-800) верхняя кривая построена по формуле теоремы 1, а нижняя кривая – непосредственно по данным словаря. Она описывает зависимость ранга (присваиваемого в порядке возрастания частот) от частоты слова.

Таким образом, оба словаря полностью описываются формулами теоремы 1 и теоремы 2. Не менее половины словаря описывается теоремой 1, когда слова отсчитываются от минимальной частоты встречаемости. И половина слов словаря, отсчитываемых от самых высоких частот, аппроксимируется теоремой 2.

Заметим, что формула теоремы 1 при увеличении лакунарности не дает правильного ответа.

В заключение автор выражает благодарность профессору А. М. Зубкову, В. В. Вьюгину и А. А. Карацубе за плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Математический энциклопедический словарь*, М., 1988.
- [2] В. П. Маслов, “Об одной общей теореме теории множеств, приводящей к распределению Гиббса, Бозе–Эйнштейна, Парето и закону Ципфа–Мандельброта для фондового рынка”, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 870–877.
- [3] В. П. Маслов, “Нелинейное среднее в экономике”, *Матем. заметки*, **78**:3 (2005), 377–395.
- [4] В. П. Маслов, “Уточнение закона Ципфа для частотных словарей”, *Докл. РАН*, **405**:5 (2005), 591–594.
- [5] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2005.
- [6] Е. А. Асарин, А. В. Покровский, “Применение колмогоровской сложности к анализу динамики управляемых систем”, *Автоматика и телемеханика*, 1986, № 1, 25–33.
- [7] Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*, М., 1976.
- [8] А. А. Карацуба, “Сложность вычислений”, *Тр. МИАН*, **211**, Наука, М., 1995, 186–202.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, М., 1964.
- [10] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы. Институт компьютерных исследований*, М., 2002.
- [11] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “Туннельный канонический оператор в термодинамике”, *Функц. анализ и его прилож.*, 2006 (в печати).
- [12] *British National Corpus*, ftp.itri.bton.ac.uk/pub/bnc.

В. П. Маслов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

14.03.2006