Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Нгуен-Кхак, К. Нгуен-Ван, Бесконечномерное обобщение теоремы Юнга, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 231–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:29:22

УДК 514.17

БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЮНГА

В. Нгуен-Кхак, К. Нгуен-Ван

В статье дается полная характеристика экстремальных подмножеств в гильбертовых пространствах, что является бесконечномерным обобщением классической теоремы Юнга. Мы исследуем также поведение совокупности точек, близких к сфере Чебышева для таких подмножеств относительно мер некомпактности Куратовского и Хаусдорфа.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – некоторое банахово пространство. Для непустого ограниченного подмножества A в X и непустого подмножества B в X мы будем использовать следующие обозначения: $d(A) := \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}$ – диаметр A ;

$$r_B(A) := \inf_{y \in B} \sup_{x \in A} \|x - y\|$$

– относительный радиус Чебышева подмножества A по отношению к B , в частности, $r(A) := r_{\overline{\text{co}}A}(A)$, где $\overline{\text{co}}A$ обозначает замыкание выпуклой оболочки подмножества A ;

$$C_B(A) := \left\{ y \in B : \sup_{x \in A} \|x - y\| = r_B(A) \right\}$$

– множество чебышевских центров подмножества A в B .

Константа Юнга пространства X определяется как

$$J(X) := \sup\{r_X(A) : A \subset X \text{ с } d(A) = 1\}.$$

В связи с изучением равномерно-нормальной структуры рассматривается также другая важная геометрическая константа – *относительная константа Юнга* пространства X (см. [1]):

$$J_s(X) := \sup\{r(A) : A \subset X, \text{ с } d(A) = 1\}.$$

В случае, когда X – гильбертово пространство, известно, что $C_X(A)$ состоит из единственной точки, которая принадлежит замыканию выпуклой оболочки $\overline{\text{co}}A$ подмножества A (см. [2]). Поэтому в этом случае $J(X) = J_s(X)$. Классическая теорема Юнга утверждает, что для n -мерного евклидова пространства $X = E^n$ мы имеем

$$J(E^n) = J_s(E^n) = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$$

[3], [4]. Константа Юнга $J(H)$ гильбертова пространства (бесконечномерный случай) была вычислена позже в [5] (ср. [6], [1], [7]):

$$J(H) = J_s(H) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы говорим, что ограниченное подмножество A в X , состоящее из более чем одной точки, является *экстремальным* (соответственно *относительно-экстремальным*), если $r_X(A) = J(X)d(A)$ (соответственно $r(A) = J_s(X)d(A)$).

Заметим, что если X – гильбертово пространство, то два этих понятия совпадают, так что в этом случае мы будем говорить просто об экстремальных подмножествах. Из второй части упомянутой выше теоремы Юнга следует, что ограниченное подмножество A в E^n является экстремальным, если и только если A содержит правильный n -симплекс с ребрами длины $d(A)$. В бесконечномерном случае ($X = H$) частичный результат был получен Гулевиным [8]: если A – относительно компактное подмножество в гильбертовом пространстве с $d(A) > 0$, то

$$r(A) < \frac{1}{\sqrt{2}}d(A).$$

Другими словами, если A – экстремальное подмножество в гильбертовом пространстве, то A не является относительно компактным.

Наша цель в этой статье – дать полную характеристику экстремальных подмножеств в гильбертовых пространствах, что является бесконечномерным обобщением второй части классической теоремы Юнга.

ГЛАВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть A – некоторое экстремальное подмножество в гильбертовом пространстве H с $d(A) = \sqrt{2}$. Тогда $\chi(A) = 1$. Более того, при каждом $\varepsilon \in (0, \sqrt{2})$ для каждого положительного целого p существует некоторый p -симплекс $\Delta(\varepsilon, p)$ с вершинами в A такой, что длина каждого ребра симплекса $\Delta(\varepsilon, p)$ не меньше, чем $\sqrt{2} - \varepsilon$.

Обратно, если $d(A) = \sqrt{2}$ и для каждого $\varepsilon \in (0, \sqrt{2})$ при каждом положительном целом p существует некоторый p -симплекс $\Delta(\varepsilon, p)$ с вершинами в A , ребра которого имеют длину не меньше, чем $\sqrt{2} - \varepsilon$, то A – экстремальное подмножество.

В формулировке главной теоремы $\chi(A)$ обозначает меру некомпактности Хаусдорфа подмножества A , т.е. нижняя грань таких положительных r , что A может быть покрыто конечным числом шаров с центрами в H и радиуса r . Кроме того, основываясь на одном наблюдении из [7] (“лемма о грибах”), мы доказываем также результат, касающийся поведения совокупности точек, близких к сфере Чебышева, для таких подмножеств относительно меры некомпактности. Этот результат означает, что основной вклад в меру некомпактности происходит именно от этой части данного экстремального подмножества.

2. Меры некомпактности экстремальных подмножеств.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – некоторое экстремальное подмножество в гильбертовом пространстве H с $r(A) = 1$. Тогда мы имеем $\alpha(A) = \sqrt{2}$.

Здесь $\alpha(A)$ обозначает меру некомпактности Куратовского, которая по определению есть нижняя грань таких положительных d , что A может быть покрыто конечным числом подмножеств диаметра d .

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $r(A) = 1$ следует, что для каждого целого числа $n \geq 2$ мы имеем

$$\bigcap_{x \in A} B\left(x, 1 - \frac{1}{n}\right) = \emptyset,$$

где $B(x, r)$ обозначает замкнутый шар с центром в x и радиусом r , который слабо компактен, поскольку H рефлексивно. Поэтому в A существуют

$$x_{p_{n-1}+1}, \quad x_{p_{n-1}+2}, \quad \dots, \quad x_{p_n}$$

такие, что

$$\bigcap_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} B\left(x_i, 1 - \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

(с соглашением $p_1 = 0$).

Полагая

$$A_n := \{x_{p_{n-1}+1}, x_{p_{n-1}+2}, \dots, x_{p_n}\},$$

мы обозначаем через c_n чебышевский центр подмножества A_n в H , и пусть $r_n := r(A_n)$, тогда $r_n > 1 - 1/n$.

Пусть $S(c, r)$ обозначает сферу с центром c и радиусом r . Из доказательства классической теоремы Юнга мы знаем, что $A \cap S(c_n, r_n) \neq \emptyset$ и $c_n \in \text{co}(A_n \cap S(c_n, r_n))$. Так что существуют $y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}$ в $A_n \cap S(c_n, r_n)$ (с соглашением $q_1 = 0$) и положительные числа $t_{q_{n-1}+1}, t_{q_{n-1}+2}, \dots, t_{q_n}$ такие, что

$$c_n = \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i y_i, \quad \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i = 1.$$

Мы утверждаем, что

$$\alpha(\{y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}\}_{n=2}^{\infty}) = \sqrt{2}.$$

Предположим “от противного”, что $\alpha(\{y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}\}_{n=2}^{\infty}) < \sqrt{2}$. Тогда мы можем выбрать такое $\varepsilon_0 \in (0, \sqrt{2})$, что $\alpha(\{y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}\}_{n=2}^{\infty}) \leq \sqrt{2} - \varepsilon_0$, и, тем самым, подмножества $D_1, D_2, \dots, D_m$ в H с условием

$$d(D_i) \leq \sqrt{2} - \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

такие, что

$$\{y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}\}_{n=2}^{\infty} \subset \bigcup_{i=1}^m D_i.$$

Существует по крайней мере одно подмножество среди $D_1, D_2, \dots, D_m$, скажем, D_1 , удовлетворяющее условию, что найдется бесконечно много n таких, что

$$\sum_{i \in J_n} t_i \geq \frac{1}{m}, \quad (1) \quad \{1\}$$

где

$$J_n := \{i \in [q_{n-1} + 1, q_n] : y_i \in D_1\}.$$

Для каждого n , удовлетворяющего (1), и фиксированного $j \in J_n$ мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i \|y_i - y_j\|^2 &= \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i \|y_i - c_n + c_n - y_j\|^2 \\ &= \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i (\|y_i - c_n\|^2 + \|y_j - c_n\|^2 - 2(y_i - c_n, y_j - c_n)) \\ &= 2r_n^2 - 2 \left(\sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i y_i - c_n, y_j - c_n \right) \\ &= 2r_n^2 > 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 > 2 - \frac{4}{n}, \end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в H .

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i \|y_i - y_j\|^2 &= \sum_{i \in J_n} t_i \|y_i - y_j\|^2 + \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n, i \notin J_n} t_i \|y_i - y_j\|^2 \\ &\leq (\sqrt{2} - \varepsilon_0)^2 \sum_{i \in J_n} t_i + 2 \left(1 - \sum_{i \in J_n} t_i \right) \\ &= 2 - [2 - (2 - \varepsilon_0)^2] \left(\sum_{i \in J_n} t_i \right) \leq 2 - [2 - (2 - \varepsilon_0)^2] \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$2 - [2 - (2 - \varepsilon_0)^2] \frac{1}{m} > 2 - \frac{4}{n}$$

при фиксированных ε_0 , m и для всех n , удовлетворяющих (1), – противоречие.

Следовательно $\alpha(\{y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}\}_{n=2}^\infty) = \sqrt{2}$. А так как $d(A) = \sqrt{2}$, мы заключаем, что $\alpha(A) = \sqrt{2}$.

Для второго доказательства нам понадобится следующая лемма, которая является вариацией леммы 4 (“леммы о грибах”) из [7].

ЛЕММА 2. Пусть A – непустое ограниченное подмножество гильбертова пространства H ; r и c – соответственно чебышевский радиус подмножества A относительно H и чебышевский центр подмножества A в H . Тогда $c \in \overline{\text{co}} A_\varepsilon$ и $r = r(A_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0, r)$, где $A_\varepsilon := A \setminus B(c, r - \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Предположим “противное”, что c не является чебышевским центром A_ε в H , тогда $r_1 := r(A_\varepsilon) < r$. Обозначая через c_1 чебышевский центр A_ε в H , мы выбираем $c' = \alpha c_1 + (1 - \alpha)c$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$ такого, что $0 < \|c - c'\| < \varepsilon$.

Возьмем некоторую точку $x \in A$. Если $x \in A_\varepsilon$, то

$$\|x - c'\| \leq \alpha \|x - c_1\| + (1 - \alpha) \|x - c\| \leq \alpha r_1 + (1 - \alpha)r < r.$$

А если $x \in A \setminus A_\varepsilon$, то

$$\|x - c'\| \leq \|x - c\| + \|c - c'\| < r - \varepsilon + \|c - c'\| < r.$$

В любом случае мы имеем $A \subset B(c', r')$ с $r' < r$, противоречие. Лемма доказана.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ввиду леммы 2, беря $\varepsilon = 1/n$ для каждого целого $n \geq 2$, мы получаем: $c \in \overline{\text{co}}(A \setminus B(c, 1 - 1/n))$. Поэтому существуют $x_{p_{n-1}+1}, x_{p_{n-1}+2}, \dots, x_{p_n}$ в $A \setminus B(c, 1 - 1/n)$ и положительные числа

$$t_{p_{n-1}+1}, \quad t_{p_{n-1}+2}, \quad \dots, \quad t_{p_n}$$

(с соглашением $p_1 = 0$) такие, что

$$\sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} t_i = 1, \quad \left\| \sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} t_i x_i - c \right\| < \frac{1}{n}.$$

Мы покажем, что

$$\alpha(\{x_{p_{n-1}+1}, x_{p_{n-1}+2}, \dots, x_{p_n}\}_{n=2}^\infty) = \sqrt{2}.$$

Снова будем вести доказательство от противного, предположив, что $\alpha(\{x_{p_{n-1}+1}, x_{p_{n-1}+2}, \dots, x_{p_n}\}_{n=2}^\infty) < \sqrt{2}$. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 \in (0, \sqrt{2})$, что $\alpha(\{x_{p_{n-1}+1}, x_{p_{n-1}+2}, \dots, x_{p_n}\}_{n=2}^\infty) \leq \sqrt{2} - \varepsilon_0$, и, тем самым, существуют такие подмножества $D_1, D_2, \dots, D_m$ в H с условием $d(D_i) \leq \sqrt{2} - \varepsilon_0$, $i = 1, 2, \dots, m$, что

$$\{x_{p_{n-1}+1}, x_{p_{n-1}+2}, \dots, x_{p_n}\}_{n=2}^\infty \subset \bigcup_{i=1}^m D_i.$$

Как и в первом доказательстве, мы можем найти среди $D_1, D_2, \dots, D_m$ подмножество, скажем D_1 , такое, что имеется бесконечно много n , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i \in I_n} t_i \geq \frac{1}{m}, \quad (2) \quad \{2\}$$

где

$$I_n := \{i \in [p_{n-1} + 1, p_n] : x_i \in D_1\}.$$

Аналогично для каждого n , удовлетворяющего (2), и фиксированного $j \in I_n$ мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} t_i \|x_i - x_j\|^2 &= \sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} t_i \|x_i - c + c - x_j\|^2 \\ &= \sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} t_i (\|x_i - c\|^2 + \|x_j - c\|^2 - 2(x_i - c, x_j - c)) \\ &> 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(\sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} t_i x_i - c, x_j - c\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 2\frac{1}{n} > 2 - \frac{6}{n}, \end{aligned}$$

а также

$$\sum_{p_{n-1} < i \leq p_n} t_i \|x_i - x_j\|^2 \leq 2 - [2 - (\sqrt{2} - \varepsilon_0)^2] \frac{1}{m}.$$

Поэтому

$$2 - [2 - (2 - \varepsilon_0)^2] \frac{1}{m} > 2 - \frac{6}{n}$$

для всех n , удовлетворяющих (2), – противоречие.

Таким образом, $\alpha(\{x_{p_{n-1}+1}, x_{p_{n-1}+2}, \dots, x_{p_n}\}_{n=2}^\infty) = \sqrt{2}$, откуда и следует $\alpha(A) = \sqrt{2}$.

Как непосредственное следствие мы получаем упомянутый во введении результат Гулевича.

СЛЕДСТВИЕ [8]. Пусть A – относительно компактное подмножество в гильбертовом пространстве H с $d(A) > 0$. Тогда $r(A) < (1/\sqrt{2})d(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [7] дано другое доказательство равенства $J(H) = J_s(H) = 1/\sqrt{2}$, по существу принадлежащее Штейнлейну. Его сущность лежит несколько глубже, а именно, в следующем интересном неравенстве между характеристикой Лифшица $\varkappa_0(X)$ и относительной константой Юнга $J_s(X)$ банахова пространства X : $\varkappa_0(X) \leq (J_s(X))^{-1}$ (ср. [9]). Отметим только, что это неравенство может быть обобщено на метрические пространства со структурой выпуклости. Мы вернемся к этой теме в последующей публикации.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С помощью леммы 2 мы видим, что A_ε также является экстремальным подмножеством и $\alpha(A_\varepsilon) = \sqrt{2}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Хотя $\alpha(A_\varepsilon) = \sqrt{2}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, но может случиться, что $\overline{\sigma}A \cap S(c, 1) = \emptyset$ (ср. [7]). Возникает вопрос: что можно сказать о $\alpha(A \cap S(c, 1))$, когда $A \cap S(c, 1) \neq \emptyset$? Ответ таков: $\alpha(A \cap S(c, 1))$ может принимать любое значение из $[0, \sqrt{2}]$. Ниже мы приводим примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – бесконечная последовательность ортонормированных векторов в гильбертовом пространстве H . Положим

$$A_1 := \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_n \right\}_{n=1}^\infty$$

и $A_2 := \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ с

$$\begin{aligned} x_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, & x_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3, \\ x_n &:= \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2^2}}e_2 + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^n}}e_n + \frac{1}{\sqrt{2^n}}e_{n+1}, & \dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что $r(A_1) = 1$, $d(A_1) = \sqrt{2}$ и 0 является чебышевским центром подмножества A_1 в H . Далее, $\|x_n\| = 1$ для каждого n ,

$$\begin{aligned} \left\| x_m - \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_n \right\| &\leq \sqrt{2} \quad \forall m, n, \\ \|x_{n+p} - x_n\|^2 &= \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\{x_n\}$ является последовательностью Коши, и мы получаем $\alpha(A_2) = 0$. ■

Теперь для множества $A := A_1 \cup A_2$ мы имеем $r(A) = 1$, $d(A) = \sqrt{2}$ и 0 является чебышевским центром подмножества A в H . Очевидно,

$$A \cap S(0, 1) = \overline{\text{co}} A \cap S(0, 1) = A_2.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ и A_1 такие же, как в примере 1. Для каждого $\gamma \in (0, \sqrt{2}]$ с $\beta := \gamma/\sqrt{2} \in (0, 1]$ мы выбираем $\lambda \in [0, 1)$ из формулы $\lambda^2 + \beta^2 = 1$. Обозначим через $A_2 := \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ с

$$y_1 := \lambda e_1 + \beta e_2, \quad y_2 := \lambda e_1 + \beta e_3, \quad \dots, \quad y_n := \lambda e_1 + \beta e_{n+1}, \quad \dots$$

Очевидно, $\|y_n\| = 1$ для каждого n , $\|y_n - y_m\| = \sqrt{2}\beta = \gamma$ для всех $m \neq n$. Полагая $A := A_1 \cap A_2$, мы получаем $r(A) = 1$, $d(A) = \sqrt{2}$, 0 является чебышевским центром подмножества A в H и $A \cap S(0, 1) = \overline{\text{co}} A \cap S(0, 1) = A_2$ с $\alpha(A_2) = \gamma$.

3. Доказательство главной теоремы. Из первого доказательства теоремы 1 мы построили последовательность $y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}$ в $A_n \cap S(c_n, r_n)$ (с $q_1 = 0$) и положительные $t_{q_{n-1}+1}, t_{q_{n-1}+2}, \dots, t_{q_n}$ для каждого целого $n \geq 2$, удовлетворяющего условиям

$$c_n = \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i y_i, \quad \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i = 1.$$

Мы утверждаем, что

$$\chi(\{y_{q_{n-1}+1}, y_{q_{n-1}+2}, \dots, y_{q_n}\}_{n=2}^\infty) = 1.$$

Для доказательства этого предположим, что A может быть покрыто конечным числом шаров радиуса r : $B_1, B_2, \dots, B_m$. Тогда среди $B_1, B_2, \dots, B_m$ найдется такой шар, скажем B_1 , что имеется бесконечно много n , удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{i \in J_n} t_i \geq \frac{1}{m}, \quad (3) \quad \{3\}$$

где

$$J_n := \{i \in [q_{n-1} + 1, q_n] : y_i \in B_1\}.$$

Как в доказательстве теоремы 1, мы имеем

$$\sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i \|y_i - y_j\|^2 = 2r_n^2 > 2 - \frac{4}{n} \quad (4) \quad \{4\}$$

для каждого фиксированного $j \in [q_{n-1} + 1, q_n]$.

Из (4) следует оценка

$$\sum_{i \in I_{nj}} t_i < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (5) \quad \{5\}$$

где

$$I_{nj} := \left\{ i \in [q_{n-1} + 1, q_n] : \|y_i - y_j\|^2 < 2 - \frac{4}{\sqrt{n}} \right\}, \quad j \in [q_{n-1} + 1, q_n],$$

$$2(1 - t_j) \geq \sum_{q_{n-1} < i \leq q_n} t_i \|y_i - y_j\|^2 = 2r_n^2 > 2 - \frac{4}{n}.$$

Это влечет за собой оценку $t_j < 2/n$ для каждого $j \in [q_{n-1} + 1, q_n]$. Поэтому если n удовлетворяет (3), то $|J_n|(2/n) > 1/m$, или, что эквивалентно, $|J_n| > n/(2m)$ (здесь $|J_n|$ означает мощность множества J_n).

Для каждого n , удовлетворяющего (3), и $j \in J_n$ обозначим

$$J_n(y_j) := \left\{ i \in J_n : \|y_i - y_j\|^2 \geq 2 - \frac{4}{\sqrt{n}} \right\},$$

$$\hat{J}_n(y_j) := \{y_i : i \in J_n(y_j)\}.$$

Очевидно, из (5) мы получаем

$$\sum_{i \in J_n \setminus J_n(y_j)} t_i < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (6) \quad \{6\}$$

$$\sum_{i \in J_n(y_j)} t_i > \frac{1}{m} - \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (7) \quad \{7\}$$

Для каждого положительного целого p выбираем n , удовлетворяющее (3) и достаточно большое, чтобы выполнялось неравенство $(p+1)/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{m}$. Мы утверждаем, что для любого выбора $i_1, i_2, \dots, i_p \in J_n$ мы имеем

$$\bigcap_{k=1}^p J_n(y_{i_k}) \neq \emptyset. \quad (8) \quad \{8\}$$

В самом деле, иначе $\bigcap_{k=1}^p J_n(y_{i_k}) = \emptyset$ могло бы повлечь за собой

$$J_n(y_{i_1}) \subset J_n \setminus \left(\bigcap_{k=2}^p J_n(y_{i_k}) \right) = \bigcup_{k=2}^p (J_n \setminus J_n(y_{i_k})).$$

Следовательно, ввиду (6) и (7)

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{\sqrt{n}} < \sum_{\alpha \in J_n(y_{i_1})} t_\alpha \leq \sum_{k=2}^p \sum_{\alpha \in J_n \setminus J_n(y_{i_k})} t_\alpha < (p-1) \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, $1/m < p/\sqrt{n}$, и это противоречило бы выбору n и p .

Далее, из (8) следует, что если $1 \leq k \leq p$ и $i_1, i_2, \dots, i_k \in J_n$, то $\bigcap_{\alpha=1}^k \hat{J}_n(y_{i_\alpha}) \neq \emptyset$. С n и p такими, как выше, зафиксируем $j \in J_n$. Положив $z_1 := y_j$, мы построим последовательно

$$z_2 \in \hat{J}_n(z_1), \quad z_3 \in \hat{J}_n(z_1) \cap \hat{J}_n(z_2), \quad \dots, \quad z_{p+1} \in \bigcap_{i=1}^p \hat{J}_n(z_i).$$

Очевидно, $\|z_i - z_j\|^2 \geq 2 - 4/\sqrt{n}$ для всех $i \neq j$ в $\{1, 2, \dots, p+1\}$. Теперь для заданного $\varepsilon \in (0, \sqrt{2})$ выберем n таким же, как и выше, и к тому же достаточно большим, чтобы $2 - 4/\sqrt{n} \geq (\sqrt{2} - \varepsilon)^2$. Мы видим, что $z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$ образуют p -симплекс $\Delta(\varepsilon, p)$, ребра которого имеют длину не меньше, чем $\sqrt{2} - \varepsilon$.

Мы покажем теперь, что $r \geq 1$ (r — радиус шаров $B_1, B_2, \dots, B_m$). Пусть c' и r' соответственно обозначают чебышевский центр симплекса $\Delta(\varepsilon, p)$ в H и его

чебышевский радиус относительно H . Из доказательства классической теоремы Юнга следует, что существуют неотрицательные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}$ с $\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i = 1$ и $c' = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i z_i$. Далее, для каждого $j \in \{1, 2, \dots, p+1\}$

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)(1 - \alpha_j) &\leq \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \|z_i - z_j\|^2 = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \|z_i - c' + c' - z_j\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i (\|z_i - c'\|^2 + \|z_j - c'\|^2) - \left(\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i (z_i - c'), z_j - c'\right) \\ &\leq 2(p')^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(2 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right) \sum_{j=1}^{p+1} (1 - \alpha_j) \leq 2(p+1)(r')^2,$$

или, что эквивалентно,

$$r' \geq \sqrt{\frac{(2 - 4/\sqrt{n})p}{2(p+1)}}. \quad (9) \quad \{9\}$$

Правая часть (9) стремится к 1 при $p \rightarrow \infty$. Очевидно, $r \geq r'$, поскольку $\Delta(\varepsilon, p) \subset B_1$. Это влечет за собой $r \geq 1$, как утверждалось. Мы заключаем отсюда, что $\chi(A) = 1$.

Обратно, если $d(A) = \sqrt{2}$, для каждого $\varepsilon \in (0, \sqrt{2})$ и каждого положительного целого p A содержит p -симплекс $\Delta(\varepsilon, p)$ с ребрами длины $\geq \sqrt{2} - \varepsilon$, то мы видим непосредственно, что A является экстремальным подмножеством.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W.L. Bynum, "Normal structure coefficients for Banach spaces", *Pacific J. Math.*, **86** (1980), 427–436.
- [2] А. Л. Гаркави, "О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества", *УМН*, **19:6** (1964), 139–145.
- [3] Н. В. Е. Jung, "Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst", *J. Reine Angew. Math.*, **123** (1901), 241–257.
- [4] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли*, Мир, М., 1968.
- [5] N. A. Routledge, "A result in Hilbert space", *Quart. J. Math., Oxford*, **3:9** (1952), 12–18.
- [6] В. И. Бердышев, "Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей", *Матем. заметки*, **3:3** (1968), 327–338.
- [7] J. Daneš, "On the radius of a set in a Hilbert space", *Comm. Math. Univ. Carolina*, **25:2** (1984), 355–362.
- [8] Н. М. Гулевич, "Радиус компактного множества в гильбертовом пространстве", *Записки научных семинаров ЛОМИ*, **164** (1988), 157–158.
- [9] J.R.L. Webb, W. Zhao, "On connections between set and ball measures of non-compactness", *Bull. London Math. Soc.*, **22** (1990), 471–477.

В. Нгуен-Кхак

Институт математики Вьетнама, г. Ханой

E-mail: nkviet@math.ac.vn

Поступило

07.06.2005

К. Нгуен-Ван

Ханойский педагогический институт