Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Нестеров, Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шрёдингера с быстро осциллирующим потенциалом, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 240–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:30:36

УДК 517.928

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

П. Н. Нестеров

Получены асимптотические формулы для решений одномерного уравнения Шрёдингера $-y'' + q(x)y = 0$ с осциллирующим потенциалом $q(x) = x^\beta P(x^{1+\alpha}) + cx^{-2}$ при $x \rightarrow +\infty$. Действительные параметры α и β удовлетворяют неравенствам $\beta - \alpha \geq -1$, $2\alpha - \beta > 0$, а c – произвольная действительная постоянная. Действительная функция $P(x)$ является или периодической с периодом T , или тригонометрическим многочленом. При построении асимптотики применяются идеи метода усреднения, а также используется фундаментальная теорема Левинсона.

Библиография: 7 названий.

Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера

$$-y'' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

на положительной полуоси $x > 0$ с осциллирующим потенциалом $q(x) = x^\beta P(x^{1+\alpha}) + cx^{-2}$. Здесь c – произвольная действительная постоянная, а действительные параметры α и β удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\beta - \alpha \geq -1, \quad 2\alpha - \beta > 0. \quad (2)$$

Эта задача исследовалась в работе [1] в предположении, что $P(x)$ – гладкая периодическая функция с нулевым средним значением. Мы будем предполагать, что $P(x)$ является или непрерывной периодической функцией с периодом T , или представляет собой тригонометрический многочлен вида

$$P(x) = \sum_{j=0}^n p_j e^{i\lambda_j x},$$

где λ_j – произвольные действительные числа, а p_j – комплексные числа. Мы также будем считать, что $P(x)$ является действительной функцией. В дальнейшем будем

Работа выполнена при финансовой поддержке ведомственной научной программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект № 49234, и программы “Университеты России”, грант № 04.01.452.

говорить, что функция $P(x)$ принадлежит классу Σ , если она является периодической функцией или тригонометрическим многочленом. Кроме того, мы будем предполагать, что функция $P(x)$ имеет нулевое среднее значение, т.е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P(x) dx = M(P(x)) = 0.$$

Здесь и везде далее $M(P(x))$ обозначает среднее периодической или почти периодической функции $P(x)$.

Сделаем в (1) замену независимой переменной $t = x^{1+\alpha}$. В терминах времени t уравнение (1) примет вид

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{t} \dot{y} - \frac{t^{(\beta-2\alpha)/(1+\alpha)}}{(1+\alpha)^2} P(t)y - \frac{c}{(1+\alpha)^2} \frac{1}{t^2} y = 0. \quad (3)$$

Для упрощения записи положим

$$\gamma = \frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad \delta = \frac{\beta-2\alpha}{1+\alpha}, \quad \zeta = \frac{1}{(1+\alpha)^2}. \quad (4)$$

Заметим, что из (2) и (4) непосредственно следует, что $-1 \leq \delta < 0$. Далее нам предстоит проделать еще серию замен, но сперва перейдем от уравнения (3) стандартным образом к системе

$$\dot{Y}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta t^\delta P(t) & -\gamma t^{-1} \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c\zeta t^{-2} & 0 \end{pmatrix} Y_0, \quad (5)$$

где

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\phi(t) = - \int_t^\infty \zeta s^\delta P(s) ds. \quad (6)$$

В силу сходимости интеграла эта функция определена и дифференцируема в каждой точке. Сделаем в (5) следующую замену:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi(t) & 1 \end{pmatrix} Y_1.$$

Тогда (5) трансформируется в

$$\dot{Y}_1 = \begin{pmatrix} \phi(t) & 1 \\ -\phi^2(t) & -\phi(t) - \gamma t^{-1} \end{pmatrix} Y_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c\zeta t^{-2} - \gamma\phi(t)t^{-1} & 0 \end{pmatrix} Y_1. \quad (7)$$

Выберем функции $P_1(t)$ и $P_2(t)$ из класса Σ с нулевым средним значением как решения следующих уравнений: $\dot{P}_1 = P$ и $\dot{P}_2 = P_1$. Проинтегрируем (6) два раза по частям, получим

$$\phi(t) = -\zeta s^\delta P_1(s)|_t^\infty + \zeta \delta s^{\delta-1} P_2(s)|_t^\infty - \int_t^\infty \zeta (s^\delta)'' P_2(s) ds.$$

Откуда $\phi(t) = \zeta t^\delta P_1(t) + \phi_1(t)$, где $\phi_1(t) = -\zeta \delta t^{\delta-1} P_2(t) - \int_t^\infty \zeta(s^\delta)'' P_2(s) ds$. Заметим, что $\phi_1(t) = O(t^{\delta-1})$ при $t \rightarrow +\infty$. Далее,

$$\phi^2(t) = \zeta^2 t^{2\delta} P_1^2(t) + 2\zeta t^\delta P_1(t) \phi_1(t) + \phi_1^2(t) = \zeta^2 t^{2\delta} P_1^2(t) - \zeta t^\delta \phi_2(t),$$

где $\phi_2(t) = -2P_1(t)\phi_1(t) - (\zeta t^\delta)^{-1} \phi_1^2(t)$. Несложно понять, что $\phi_2(t) = O(t^{\delta-1})$, $t \rightarrow +\infty$. Теперь подставим полученные выражения для $\phi(t)$ и $\phi^2(t)$ в (7) и осуществим так называемое срезающее преобразование, т.е. выполним замену

$$Y_1 = \begin{pmatrix} t^{-\delta/2} & 0 \\ 0 & t^{\delta/2} \end{pmatrix} Y_2.$$

Тогда система (7) перейдет в систему следующего вида:

$$\dot{Y}_2 = (t^\delta A(t) + t^{-1} B(t) + t^{-2-\delta} C + R(t)) Y_2. \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(t) &= \begin{pmatrix} \zeta P_1 & 1 \\ -\zeta^2 P_1^2 & -\zeta P_1 \end{pmatrix}, & B(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & 0 \\ -\gamma \zeta P_1 & -\frac{\delta}{2} - \gamma \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta c & 0 \end{pmatrix}, & R(t) &= \begin{pmatrix} \phi_1(t) & 0 \\ \zeta \phi_2(t) - \gamma \phi_1(t) t^{-1-\delta} & -\phi_1(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Впрочем, конкретный вид матрицы $R(t)$ для нас в дальнейшем не имеет особого значения; главное, что о ней надо знать, это то, что

$$R(t) = O(t^{\delta-1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, элементы матрицы $R(t)$ абсолютно интегрируемы на $[t_0, \infty)$. Мы будем писать $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$, понимая под этим, что $\|R(t)\| \in L_1[t_0, \infty)$, где $\|\cdot\|$ – некоторая индуцированная матричная норма. Заметим также, что элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ принадлежат классу Σ . Для дальнейшего анализа системы (8) мы будем использовать известный метод усреднения (см. [2]). Его применение к построению асимптотики линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами было разработано в [3]. Кратко изложим суть метода.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \left\{ A_0 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{t^{j\alpha}} A_j(t) \right\} \hat{x} + O(t^{-\varphi_1}) \hat{x}. \quad (9)$$

Здесь A_0 – постоянная квадратная матрица порядка n , все собственные значения которой вещественны, а элементами матриц $A_1(t)$, $A_2(t)$, $\dots$, $A_k(t)$ являются тригонометрические многочлены. Вещественное число α и натуральное число k удовлетворяют неравенствам $0 < k\alpha \leq 1 < (k+1)\alpha$, $\varphi_1 > 1$. Система уравнений (9) при достаточно больших t с помощью замены

$$\hat{x} = \left\{ \sum_{j=0}^k \frac{1}{t^{j\alpha}} V_j(t) \right\} \hat{y}, \quad (10)$$

где $V_0(t) = I$ – единичная матрица, а элементами матриц $V_j(t)$, $j = 1, \dots, k$, являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, преобразуется в систему

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \left\{ A_0 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{t^{j\alpha}} A_j \right\} \hat{y} + O(t^{-\varphi_2}) \hat{y}, \quad (11)$$

где $\{A_j\}$ – постоянные матрицы. Константа φ_2 выбирается следующим образом: $\varphi_2 = \min\{(1+k)\alpha, \varphi_1\}$. Матрицы $V_j(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения следующих неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dV_j(t)}{dt} - A_0 V_j(t) + V_j(t) A_0 = \sum_{l=0}^{j-1} A_{j-l}(t) V_l(t) - \sum_{l=0}^{j-1} V_l(t) A_{j-l}. \quad (12)$$

На каждом шаге $j = 1, \dots, k$ матрица A_j определяется из условия, что правая часть системы (12) имеет нулевое среднее значение

$$A_j = M \left(\sum_{l=0}^{j-1} A_{j-l}(t) V_l(t) \right). \quad (13)$$

В частности, $A_1 = M(A_1(t))$, $A_2 = M(A_2(t) + A_1(t)V_1(t))$.

В нашем случае исходная система несколько отличается от системы (9). Более точно, она имеет следующий вид:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{1}{t^{j\alpha}} A_j(t) \right\} \hat{x} + \xi(t) B(t) \hat{x} + O(t^{-\varphi_1}) \hat{x}. \quad (14)$$

Здесь матрицы $A_1(t), A_2(t), \dots, A_k(t)$ суть матрицы с элементами из класса Σ . вещественное число α и натуральное число k удовлетворяют неравенствам $0 < k\alpha \leq 1 < (k+1)\alpha$, $\varphi_1 > 1$. Матрица $B(t)$ ограничена, т.е. $\|B(t)\| \leq C < \infty$ при $t \geq t_0$, функция $\xi(t) = O(t^{-\beta})$ и $\alpha + \beta > 1$. В этом случае система уравнений (14) при достаточно больших t с помощью замены (10) преобразуется в систему

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{1}{t^{j\alpha}} A_j \right\} \hat{y} + \xi(t) B(t) \hat{y} + O(t^{-\varphi_2}) \hat{y},$$

где матрицы $V_j(t)$ и A_j , $j = 1, \dots, k$, определяются из (12) и (13) соответственно. Значение константы φ_2 определяется следующим образом: $\varphi_2 = \min\{(1+k)\alpha, \alpha + \beta, \varphi_1\}$. Осталось заметить, что если $A_0 = 0$, то система (12) однозначно разрешима в классе периодических матриц с нулевым средним значением, если элементами матриц $A_j(t)$, $j = 1, \dots, k$, являются непрерывные периодические функции с периодом $T > 0$. В этом случае элементами матриц $V_j(t)$, $j = 1, \dots, k$, являются T -периодические функции с нулевым средним значением.

На следующем этапе для получения асимптотики используется теорема Левинсона (см., например, [4], [5]). Приведем ее формулировку применительно к системе (11).

ТЕОРЕМА. Пусть среди матриц A_j , $j = 0, \dots, k$, первой ненулевой является матрица A_l . Пусть матрица A_l имеет различные собственные значения. Тогда фундаментальная матрица системы (11) имеет вид

$$\Phi(t) = (\Pi + o(1)) \exp \left\{ \int_{t^*}^t \Lambda(s) ds \right\}, \quad t > t^*, \quad t \rightarrow \infty,$$

где Π – матрица, столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы A_l , а $\Lambda(t)$ – диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения матрицы $\sum_{j=l}^k t^{-j\alpha} A_j$.

Замена

$$Y_2 = \left(I + \frac{1}{t} V(t) \right) Y_3,$$

где $V(t)$ – матрица с нулевым средним значением и с элементами из класса Σ , приводит систему (8) к виду

$$\dot{Y}_3 = (t^\delta A(t) + t^{-1} B + t^{-2-\delta} C + O(t^{\delta-1})) Y_3, \quad (15)$$

где

$$B = M(B(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} - \gamma \end{pmatrix}.$$

Поскольку при различных δ асимптотика решений будет существенным образом отличаться, нам следует рассмотреть несколько случаев.

Случай I. $\delta = -1$ (или, что эквивалентно, $\beta - \alpha = -1$). Заменой

$$Y_3 = \left(I + \frac{1}{t} V(t) \right) Y$$

мы перейдем от (15) к системе

$$\dot{Y} = \left(\frac{1}{t} (A_1 + B + C) + O(t^{-2}) \right) Y, \quad (16)$$

где

$$A_1 = M(A(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\zeta^2 a & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее

$$a = M(P_1^2(t)) = M \left[\left(\int_0^t P(s) ds \right)^2 \right] - \left[M \left(\int_0^t P(s) ds \right) \right]^2 \geq 0.$$

Вычислим собственные числа матрицы

$$A_1 + B + C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\zeta^2 a + \zeta c & \frac{1}{2} - \gamma \end{pmatrix}.$$

В зависимости от знака дискриминанта характеристического многочлена рассмотрим два варианта.

1. Пусть $a > (c + 1/4)(1 + \alpha)^2$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \zeta i \sqrt{a - \left(c + \frac{1}{4}\right)(1 + \alpha)^2}.$$

Матрица Π имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\exp\left\{\int_{t^*}^t \Lambda(s) ds\right\} = \begin{pmatrix} \exp\left\{\lambda_1 \ln \frac{t}{t^*}\right\} & 0 \\ 0 & \exp\left\{\lambda_2 \ln \frac{t}{t^*}\right\} \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 1 для построения асимптотики фундаментальной матрицы системы (16) и вспоминая все проделанные нами замены, получаем асимптотику для линейно независимых решений $y_{1,2}(x)$ уравнения (1) при $x \rightarrow +\infty$:

$$y_{1,2}(x) = x^{1/2} \exp\{\pm i\omega(1 + \alpha)^{-1} \ln x\}(1 + o(1)),$$

где $\omega = \sqrt{a - (c + 1/4)(1 + \alpha)^2}$.

2. Пусть теперь $a < (c + 1/4)(1 + \alpha)^2$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \zeta \sqrt{-\left[a - \left(c + \frac{1}{4}\right)(1 + \alpha)^2\right]}$$

и легко видеть, что

$$\exp\left\{\int_{t^*}^t \Lambda(s) ds\right\} = \begin{pmatrix} \frac{t^{\lambda_1}}{t^*} & 0 \\ 0 & \frac{t^{\lambda_2}}{t^*} \end{pmatrix}.$$

Несложно установить, что в этом случае решения $y_{1,2}(x)$ имеют при $x \rightarrow +\infty$ следующую асимптотику:

$$y_{1,2}(x) = x^{(1/2) \pm \omega_*(1 + \alpha)^{-1}}(1 + o(1)),$$

где $\omega_* = \sqrt{-[a - (c + 1/4)(1 + \alpha)^2]}$.

Случай II. $-1 < \delta < -1/2$. Заменой $Y_3 = (I + t^\delta V(t))Y$ мы преобразуем (15) в систему

$$\dot{Y} = (t^\delta A_1 + t^{-1}B + O(t^{-\varphi_2}))Y,$$

где $\varphi_2 = \min\{-2\delta, 1 - \delta, \delta + 2\}$. Вычислим собственные числа матрицы

$$t^\delta A_1 + t^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} t^{-1} & t^\delta \\ -\mu t^\delta & -\frac{\delta}{2} t^{-1} - \gamma t^{-1} \end{pmatrix},$$

где для сокращения записи принято обозначение $\mu = \zeta^2 a > 0$. Обозначим также величину $\zeta\sqrt{a}$ через ν . Собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{\gamma}{2}t^{-1} \pm i\nu t^\delta \sqrt{1 - \frac{(\gamma + \delta)^2}{4\mu}t^{-2(1+\delta)}} = -\frac{\gamma}{2}t^{-1} \pm i(\nu t^\delta + O(t^{-2-\delta})),$$

когда $t \rightarrow +\infty$. Здесь мы воспользовались тейлоровским разложением для $\sqrt{1+x}$ при $x \rightarrow 0$. Матрица Π имеет теперь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\nu & -i\nu \end{pmatrix},$$

а $\exp\{\int_{t^*}^t \Lambda(s) ds\}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} t^{-\gamma/2} \exp\left\{i\left(\nu \frac{t^{\delta+1}}{\delta+1} + O(t^{-\delta-1})\right)\right\} & 0 \\ 0 & t^{-\gamma/2} \exp\left\{-i\left(\nu \frac{t^{\delta+1}}{\delta+1} + O(t^{-\delta-1})\right)\right\} \end{pmatrix} \Delta.$$

Здесь через Δ обозначена постоянная диагональная матрица, зависящая от t^* . Возвращаясь к исходной независимой переменной x , имеем

$$y_{1,2}(x) = x^{(\alpha-\beta)/2} \exp\{\pm iS(x)\}(1 + o(1)),$$

где $S(x) = \sqrt{a}(1+\alpha)^{-1}(\beta-\alpha+1)^{-1}x^{\beta-\alpha+1}$.

Случай III. $-1/2 \leq \delta < -1/3$. С помощью замены $Y_3 = (I + t^\delta V_1(t) + t^{2\delta} V_2(t))Y$ от системы (15) мы переходим к системе

$$\dot{Y} = (t^\delta A_1 + t^{2\delta} A_2 + t^{-1} B + O(t^{-\varphi_2}))Y.$$

Здесь

$$A_2 = M(A_1(t)V_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

где $\varphi = 2\zeta^3 M[\int_0^t P_1(s) ds(P_1^2(t) - a)]$ и $\varphi_2 = \min\{-3\delta, 1-\delta, 1-\delta\} = -3\delta$. Вычисляя собственные числа матрицы

$$t^\delta A_1 + t^{2\delta} A_2 + t^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2}t^{-1} & t^\delta \\ -\mu t^\delta - \varphi t^{2\delta} & -\frac{\delta}{2}t^{-1} - \gamma t^{-1} \end{pmatrix},$$

имеем

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{\gamma}{2}t^{-1} \pm i\nu t^\delta \sqrt{1 - \frac{(\gamma + \delta)^2}{4\mu}t^{-2(1+\delta)} + \frac{\varphi}{\mu}t^\delta}.$$

Как и в предыдущем случае, разложим $\lambda_{1,2}(t)$ по формуле Тейлора. Тогда

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{\gamma}{2}t^{-1} \pm i\left(\nu t^\delta + \frac{\varphi\nu}{2\mu}t^{2\delta} + O(t^{3\delta})\right), \quad t \rightarrow +\infty,$$

где было учтено, что $1 < -3\delta \leq \delta + 2$. Далее, действуя так же, как и ранее, приходим к выводу, что

$$y_{1,2}(x) = x^{(\alpha-\beta)/2} \exp\{\pm iS(x)\}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Функция $S(x)$ выглядит следующим образом:

$$S(x) = \sqrt{a}(1+\alpha)^{-1}(\beta-\alpha+1)^{-1}x^{\beta-\alpha+1} + \frac{\widehat{M} \ln x}{\sqrt{a}(1+\alpha)^3}, \quad \delta = -\frac{1}{2},$$

и

$$S(x) = \sqrt{a}(1+\alpha)^{-1}(\beta-\alpha+1)^{-1}x^{\beta-\alpha+1} + \frac{\widehat{M}}{\sqrt{a}(1+\alpha)^3} \frac{x^{-3\alpha+2\beta+1}}{(-3\alpha+2\beta+1)}, \quad \delta > -\frac{1}{2},$$

где $\widehat{M} = M[\int_0^t P_1(s) ds (P_1^2(t) - a)]$.

Случай IV. $-1/k \leq \delta < -1/(k+1)$, $k > 2$, k целое. Для исследования этого случая нам потребуется доказать одно вспомогательное утверждение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x} + O(\varepsilon^{k+1})\hat{x}, \quad (17)$$

где $A(t) = \sum_{l=1}^k \varepsilon^l A_l(t)$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $A_l(t)$ – матрицы с элементами из класса Σ . Как известно (см. [6]), система (17) заменой

$$\hat{x} = \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right) \hat{y}, \quad (18)$$

где $V_l(t)$, $l = 1, \dots, k$, – матрицы с элементами из класса Σ с нулевым средним, приводится к виду

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon^l A_l \right) \hat{y} + O(\varepsilon^{k+1})\hat{y}, \quad (19)$$

где A_l – постоянные матрицы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $M(\operatorname{tr} A_l(t)) = 0$, $l = 1, \dots, k$. Тогда все матрицы A_l имеют нулевой след.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1. Выполняя замену (18), получим равенство

$$\left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right) \frac{d\hat{y}}{dt} + \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon^l \frac{dV_l}{dt} \right) \hat{y} = A(t) \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right) \hat{y} + O(\varepsilon^{k+1})\hat{y}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{d\hat{y}}{dt} + \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon^l \frac{dV_l}{dt} \right) \hat{y} \\ &= \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right)^{-1} A(t) \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right) \hat{y} + O(\varepsilon^{k+1})\hat{y}. \end{aligned}$$

Учитывая (19), получаем матричное равенство

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon^l A_l \right) + O(\varepsilon^{k+1}) + \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon^l \frac{dV_l}{dt} \right) \\ &= \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right)^{-1} A(t) \left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right). \end{aligned}$$

Вычислим след левой и правой части. Так как подобные матрицы имеют одинаковый след, то след правой части равен $\text{tr } A(t)$. Имеем

$$\text{tr} \left[\left(I + \sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t) \right)^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon^l \frac{dV_l}{dt} \right) \right] = - \left(\sum_{l=1}^k \varepsilon^l \text{tr } A_l \right) + \text{tr } A(t) + O(\varepsilon^{k+1}). \quad (20)$$

Разложим левую часть (20) в ряд по степеням ε , предварительно обозначив $F(t) = -\sum_{l=1}^k \varepsilon^l V_l(t)$. При достаточно малых ε матрица $I - F$ обратима и $(I - F)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n$. Левая часть (20) тогда запишется в виде

$$- \text{tr} \left(\sum_{n=0}^{\infty} F^n \dot{F} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \text{tr}(F^n \dot{F}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n(t), \quad (21)$$

где $f_j(t)$ – функции из класса Σ , полученные в результате объединения слагаемых в $\sum_{n=0}^{\infty} \text{tr}(F^n \dot{F})$ при одинаковых степенях ε . Для дальнейшего доказательства нам потребуется одно несложное соображение.

Если $F(t)$ – дифференцируемая матрица, то

$$\text{tr}(F^{k+1}(t))' = (\text{tr } F^{k+1}(t))' = (k+1) \text{tr}(F^k(t)F'(t)). \quad (22)$$

Это следует из равенства

$$(F^{k+1}(t))' = F'(t)F^k(t) + F(t)F'(t)F^{k-1}(t) + F^2(t)F'(t)F^{k-2}(t) + \dots + F^k(t)F'(t)$$

и того факта, что $\text{tr } AB = \text{tr } BA$. Из (22) следует, что

$$M[\text{tr}(F^k(t)F'(t))] = 0. \quad (23)$$

Вычислим средние значения левой и правой частей равенства (21). Среднее значение левой части равно нулю ввиду равенства (23). Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n M(f_n(t)) = 0.$$

Откуда сразу же вытекает, что $M(f_j(t)) = 0$ для всех j . Приравняем слагаемые в левой и правой части (20) при одинаковых степенях ε и возьмем среднее значение от обеих частей в полученном равенстве. Учтем, что $M(f_j(t)) = 0$ для всех j , а также то, что $M(\text{tr } A_l(t)) = 0$, $l = 1, \dots, k$. Получим, что $\text{tr } A_l = 0$, $l = 1, \dots, k$. Утверждение доказано.

Пусть теперь в (17)–(19) $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и вместо $O(\varepsilon^{k+1})$ стоят некоторые матрицы из класса $L_1[t_0, \infty)$. Пусть также $\dot{\varepsilon}(t) \in L_1[t_0, \infty)$, $\varepsilon(t), \dots, \varepsilon^k(t) \notin L_1[t_0, \infty)$, а $\varepsilon^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Если выполнены остальные условия утверждения 1, то $\text{tr } A_l = 0$, $l = 1, \dots, k$.

Доказательство этого утверждения почти дословно совпадает с доказательством утверждения 1. Утверждение остается справедливым и в случае, когда рассматриваемая система имеет вид

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x} + \xi(t)B(t)\hat{x} + G(t)\hat{x},$$

где относительно $A(t)$ приняты те же предположения, что и выше, $G(t) \in L_1[t_0, \infty)$, $B(t)$ ограничена, а $\xi(t)\varepsilon(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Итак, заменой $Y_3 = (I + t^\delta V_1(t) + \dots + t^{k\delta} V_k(t))Y$ от системы (15) мы переходим к системе

$$\dot{Y} = (t^\delta A_1 + \dots + t^{k\delta} A_k + t^{-1}B + O(t^{-\varphi_2}))Y,$$

где $\varphi_2 = \min\{-(1+k)\delta, 1-\delta, 1-\delta\} = -(1+k)\delta$. В этом случае нам необходимо определить собственные числа матрицы

$$t^\delta A_1 + t^{2\delta} A_2 + \dots + t^{k\delta} A_k + t^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2}t^{-1} + \Psi(t) & t^\delta + \dots \\ -\mu t^\delta - \varphi t^{2\delta} + \dots & -\frac{\delta}{2}t^{-1} - \gamma t^{-1} - \Psi(t) \end{pmatrix},$$

где $\Psi(t) = \psi_l t^{l\delta} + \dots$, $3 \leq l \leq k$, а под многоточием подразумеваются члены вида $c_m t^{m\delta}$ более высокого порядка малости. Имеем

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{\gamma}{2}t^{-1} \pm i\nu t^\delta \sqrt{1 - \frac{(\gamma + \delta)^2}{4\mu} t^{-2(1+\delta)} + \frac{\varphi}{\mu} t^\delta + u_l t^{(l-2)\delta-1} + \dots},$$

где на сей раз под многоточием следует понимать слагаемые вида $r_m t^{m\delta}$, $m \geq 2$, и $u_r t^{(r-2)\delta-1}$, $r > l$. Далее, раскладывая собственные числа по формуле Тейлора, имеем

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{\gamma}{2}t^{-1} \pm i \left(\nu t^\delta + \frac{\varphi\nu}{2\mu} t^{2\delta} + O(t^{3\delta}) + O(t^{(k+1)\delta}) \right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

В этом выражении мы учли, что главным слагаемым среди тех, которые принадлежат $L_1[t_0, \infty)$, в асимптотическом разложении для $\lambda_{1,2}(t)$ является именно $O(t^{(k+1)\delta})$. Вычисляя $\exp\{\int_{t^*}^t \Lambda(s) ds\}$, получаем асимптотику для линейно независимых решений $y_{1,2}(x)$ уравнения (1)

$$y_{1,2}(x) = x^{(\alpha-\beta)/2} \exp\{\pm iS(x)\}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Функция $S(x)$ имеет вид

$$S(x) = \sqrt{a}(1+\alpha)^{-1}(\beta-\alpha+1)^{-1}x^{\beta-\alpha+1} + \frac{\widehat{M}}{\sqrt{a}(1+\alpha)^3} \frac{x^{-3\alpha+2\beta+1}}{(-3\alpha+2\beta+1)} + O(x^{-5\alpha+3\beta+1}).$$

Если $-5\alpha + 3\beta + 1 = 0$ (т.е. $\delta = -1/3$), то вместо $O(x^{-5\alpha+3\beta+1})$ следует писать $O(\ln x)$.

Полученные асимптотические формулы остаются справедливыми и при менее ограничительных предположениях относительно функции $P(x)$. Достаточно считать, что периодическая функция $P(x)$ интегрируема по Риману на промежутке $[0, T]$.

В заключение отметим также, что можно оценить скорость стремления к нулю члена $o(1)$ в асимптотических формулах. Соответствующие результаты приведены в работе [7].

Автор благодарит профессора В. Ш. Бурда за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Р. Итс, “Асимптотическое поведение решений радиального уравнения Шрёдингера с осциллирующим потенциалом при нулевой энергии”, *Проблемы математической физики*, Сб. статей, №9, Изд-во Ленинградского ун-та, Ленинград, 1979, 30–41.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
- [3] В. Ш. Бурд, В. А. Каракулин, “Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами”, *Матем. заметки*, **64**:5 (1998), 658–666.
- [4] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [5] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958.
- [6] И. З. Штокало, *Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами*, Изд-во АН УССР, Киев, 1960.
- [7] П. Н. Нестеров, *Асимптотическое поведение решений одномерного уравнения Шрёдингера с быстро осциллирующим потенциалом*, Рук. деп. в ВИНТИ РАН 29.04.2005, № 640-В, 2005.

П. Н. Нестеров

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mathematix@mail.ru

Поступило

02.08.2005