Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Омиров, Тонкие алгебры Лейбница, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 251–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:50:07

УДК 512.554.38

ТОНКИЕ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА

Б. А. Омиров

В работе введены и изучены аналоги нуль-филиформных и филиформных алгебр Лейбница в бесконечномерном случае. Показано, что для классификации комплексных тонких алгебр Лейбница достаточно изучить некоторые специальные преобразования базисов.

Библиография: 9 названий.

Работа посвящена изучению двух классов потенциально нильпотентных алгебр Лейбница. А именно, рассматриваются алгебры, которые представляют собой бесконечномерные аналоги нуль-филиформных и филиформных алгебр Лейбница. Напомним, что филиформные алгебры Ли детально рассмотрены в [1], [2], в случае же алгебр Лейбница – в [3]. Рассмотрение таких алгебр позволит надеяться на то, что они будут играть такую же важную роль, как филиформные алгебры Лейбница в конечномерном случае.

Впервые аналог филиформных алгебр Ли в бесконечномерном случае был рассмотрен в работе [4].

Для конечномерных алгебр понятия потенциальной нильпотентности и нильпотентности совпадают, в случае же бесконечномерных алгебр всякая нильпотентная алгебра является потенциально нильпотентной, но обратное утверждение неверно. Отметим, что бесконечномерные нильпотентные алгебры Ли изучались в работах [4]–[7].

В настоящей работе описан аналог нуль-филиформных алгебр Лейбница и классифицированы естественным образом градуированные тонкие алгебры Лейбница. На основе этой классификации получено описание не лиевых тонких алгебр Лейбница, а также предложен метод упрощения преобразований базиса произвольной комплексной не лиевой тонкой алгебры Лейбница, позволяющий рассматривать только те преобразования (изоморфизмы), которые меняют структурные параметры в полученном описании тонких не лиевых алгебр Лейбница. Аналогичные результаты для случая тонких алгебр Ли легко вытекают из работ [1], [2] и [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[\cdot, \cdot]$ – умножение в L .

Для произвольной алгебры L определим последовательность L^n :

$$L^1 = L, \quad L^{n+1} = [L^n, L].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебра L называется *потенциально нильпотентной*, если $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^i = 0$.

Далее в работе мы будем рассматривать комплексные алгебры со счетным базисом, каждый элемент которых представляется как конечная линейная комбинация базисных элементов.

Пусть L – потенциально нильпотентная алгебра Лейбница и $\dim(L^i/L^{i+1}) < \infty$ для любого $i \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Базис $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ алгебры Лейбница L называется *адаптированным с верхним центральным рядом*, если $L^i = \langle e_{k_i}, e_{k_i+1}, \dots \rangle$ для любого $i \geq 1$.

Пусть L – потенциально нильпотентная алгебра Лейбница и $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ – адаптированный базис алгебры L . Рассмотрим следующий ряд натуральных чисел:

$$c(L) = (k_2 - k_1, k_3 - k_2, k_4 - k_3, \dots), \quad \text{где } k_1 = 1.$$

Так как L является потенциально нильпотентной, то

$$k_{i+1} - k_i \geq 1 \quad \text{для любого } i \geq 1.$$

ЛЕММА 1. Пусть L – алгебра Лейбница, удовлетворяющая условию $c(L) = (1, 1, 1, \dots)$. Тогда существует базис $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ алгебры L такой, что

$$[x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при } i \geq 1,$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ – базис, согласованный с фильтрацией $L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \dots$, т.е. базис, удовлетворяющий условиям:

$$L^i = \{e_i, e_{i+1}, \dots\} \quad \text{при } i \geq 1.$$

Так как $e_2 \in L^2$, то существуют $a_{2p}, b_{2p} \in L$ такие, что

$$e_2 = \sum \alpha_p [a_{2p}, b_{2p}] = \alpha_{1,2} [e_1, e_1] + k_3, \quad \text{где } k_3 \in L^3.$$

Заметим, что $\alpha_{1,2} [e_1, e_1] \neq 0$, так как иначе $e_2 \in L^3$. Аналогично получаем, что

$$e_3 = \alpha_{1,3} [[e_1, e_1], e_1] + k_4, \quad \text{где } k_4 \in L^4 \quad \text{и} \quad \alpha_{1,3} [[e_1, e_1], e_1] \neq 0.$$

Продолжая таким образом, получим, что элементы $x_1 := e_1$, $x_2 := [e_1, e_1]$, $x_3 := [[e_1, e_1], e_1]$ и т.д. отличны от нуля. Нетрудно видеть, что $x_i \in L^i \setminus L^{i+s}$ для любого $s \geq 1$. Действительно, если $x_i \in L^{i+s}$ для некоторого $s \geq 1$, тогда из равенства $e_i = \alpha_{1,i} x_i + k_{i+1}$ следует, что $e_i \in L^{i+1}$, что противоречит выбору базиса $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$. Ввиду того, что $\dim(L^i/L^{i+1}) = 1$, имеем, что $e_i = \alpha_{1,i} x_i$. Следовательно, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ образует базис алгебры L .

Равенства $[x_i, x_j] = 0$ при $j \geq 2$ доказываются несложной индукцией по j при любом i с использованием равенства

$$[x_i, x_{j+1}] = [x_i, [x_j, x_1]] = [[x_i, x_j], x_1] - [[x_i, x_1], x_j].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы 1 следует, что с точностью до изоморфизма существует единственная алгебра Лейбница с условием $c(L) = (1, 1, 1, \dots)$, которую будем обозначать N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Алгебра Лейбница L называется *тонкой*, если выполнено условие $c(L) = (2, 1, 1, \dots)$.

Из [3] имеем, что алгебра Лейбница N является бесконечномерным аналогом нуль-филиформной алгебры Лейбница, а тонкие алгебры являются аналогами филиформных алгебр Лейбница.

ЛЕММА 2. Пусть L – не левая тонкая алгебра Лейбница. Тогда существует базис $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ алгебры L такой, что

$$[x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при} \quad i \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ – базис, согласованный с фильтрацией $L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq L^3 \supseteq \dots$, т.е. базис, удовлетворяющий условиям

$$L^i = \{e_{i+1}, e_{i+2}, \dots\} \quad \text{при} \quad i \geq 2.$$

Так как L является тонкой, то мы имеем

$$[e_i, e_1] = a_i e_{i+1} + \sum_{j \geq i+2} a_{ij} e_j \quad \text{при} \quad i \geq 2,$$

$$[e_i, e_2] = b_i e_{i+1} + \sum_{j \geq i+2} b_{ij} e_j \quad \text{при} \quad i \geq 2,$$

причем для каждого i по крайней мере одно из чисел a_i или b_i не равно нулю.

Полагая $x_1 := c_1 e_1 + c_2 e_2$, рассмотрим следующую последовательность скобок:

$$[e_2, x_1] = (c_1 a_2 + c_2 b_2) e_3 + \sum_{j \geq 4} (*) e_j,$$

$$[[e_2, x_1], x_1] = (c_1 a_2 + c_2 b_2)(c_1 a_3 + c_2 b_3) e_4 + \sum_{j \geq 5} (*) e_j,$$

$$[[[e_2, x_1], x_1], x_1] = (c_1 a_2 + c_2 b_2)(c_1 a_3 + c_2 b_3)(c_1 a_4 + c_2 b_4) e_5 + \sum_{j \geq 6} (*) e_j,$$

.....

$$R_{x_1}^k(e_2) = \prod_{i=2}^{k+1} (c_1 a_i + c_2 b_i) e_{k+2} + \sum_{j \geq k+3} (*) e_j,$$

.....

Рассмотрим счетное множество прямых $a_i x + b_i y = 0$, $i = 2, 3, \dots$, на плоскости C^2 . Ввиду того, что это множество не покрывает всю плоскость, существует пара c_1 и c_2 такая, что $a_i c_1 + b_i c_2 \neq 0$ для всех $i = 2, 3, \dots$. Поэтому мы можем построить базис $\{x_1, x_2, \dots\}$, согласованный с убывающим центральным рядом, где $x_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2$, $x_2 = e_2$, $x_{i+1} = [x_i, x_1]$ для $i \geq 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Определим естественное градуирование алгебры L . Положим

$$L_1 := L^1 / L^2, \quad L_i := L^i / L^{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots,$$

тогда $L \simeq L_1 \oplus L_2 \oplus \dots$. Нетрудно проверить справедливость вложения $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$. Таким образом, мы получили *градуирование*, которое называется *естественным*.

Отметим, что для тонких алгебр Лейбница $\dim L_1 = 2$, $\dim L_i = 1$ при $i \geq 2$.

В следующей теореме представлена классификация естественно градуированных комплексных тонких алгебр Лейбница.

ТЕОРЕМА 1. *С точностью до изоморфизма существуют три естественно градуированные комплексные тонкие алгебры Лейбница:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}: [x_1, x_1] &= x_3, & [x_i, x_1] &= x_{i+1}, & i &\geq 2, \\ \mathfrak{R}: [x_1, x_1] &= x_3, & [x_i, x_1] &= x_{i+1}, & i &\geq 3, \\ \mathfrak{N}: [x_i, x_1] &= x_{i+1}, & [x_1, x_i] &= -x_{i+1}, & i &\geq 2, \end{aligned}$$

где $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ – базисы алгебр $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$ и отсутствующие произведения равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L не является алгеброй Ли, тогда из леммы 2 имеем существование в L базиса $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ такого, что $[x_i, x_1] = x_{i+1}$ при $i \geq 2$. Доказательство существования алгебр $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{R}$ проводится аналогично работе [3]. В случае когда L – алгебра Ли, существование алгебры $\mathfrak{N}$ имеем из [4].

Покажем, что алгебры

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}: [x_1, x_1] &= x_3, & [x_i, x_1] &= x_{i+1}, & i &\geq 2, \\ \mathfrak{R}: [y_1, y_1] &= y_3, & [y_i, y_1] &= y_{i+1}, & i &\geq 3, \end{aligned}$$

неизоморфны.

Пусть φ – изоморфизм первой алгебры во вторую, т.е. $\varphi: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{R}$. Рассмотрим множества

$$Y(\mathfrak{Z}) = \{x \in \mathfrak{R} \mid [x, \mathfrak{Z}] = 0\} \quad \text{и} \quad Z(\mathfrak{Z}) = \{x \in \mathfrak{R} \mid [\mathfrak{Z}, x] = 0\},$$

называемые соответственно *левым* и *правым аннуляторами* алгебры $\mathfrak{Z}$. Нетрудно показать, что $\varphi(Y(\mathfrak{Z})) = Y(\mathfrak{R})$, $\varphi(Z(\mathfrak{Z})) = Z(\mathfrak{R})$ и $\varphi(Y(\mathfrak{Z}) \cap Z(\mathfrak{Z})) = Y(\mathfrak{R}) \cap Z(\mathfrak{R})$. Исходя из умножений в соответствующих алгебрах, имеем

$$Y(\mathfrak{Z}) = \{x_1 - x_2\}, \quad Z(\mathfrak{Z}) = \{x_3, x_4, \dots\}, \quad Y(\mathfrak{R}) = \{y_2\}, \quad Z(\mathfrak{R}) = \{y_2, y_3, y_4, \dots\}.$$

Таким образом, $(Y(\mathfrak{Z}) \cap Z(\mathfrak{Z})) = \{0\}$, но $(Y(\mathfrak{R}) \cap Z(\mathfrak{R})) = \{y_2\}$, т.е. $\varphi(0) = y_2$ и мы получили противоречие с условием существования изоморфизма из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{R}$.

Легко видеть, что $\mathfrak{R} = N \oplus C$, где N – алгебра Лейбница, определенная в лемме 1.

Пусть V – бесконечномерное комплексное векторное пространство. Произвольную алгебру Лейбница L можно рассматривать как элемент λ аффинного многообразия $\text{Hom}(V \otimes V, V)$, где билинейное отображение $\lambda: L \otimes L \rightarrow L$ определяет умножение в алгебре L . Тогда множество алгебр Лейбница является алгебраическим подмножеством $\text{Leib}_n(C)$ многообразия $\text{Hom}(V \otimes V, V)$ и линейная группа $GL(C)$ действует на этом множестве $\text{Leib}_n(C)$ следующим образом:

$$(g * \lambda)(x, y) = g(\lambda(g^{-1}(x), g^{-1}(y))).$$

Орбиты под этим действием являются изоморфными классами алгебр. Для двух алгебр λ и μ мы будем говорить, что *алгебра λ вырождается в алгебру μ* , если μ

лежит в замыкании орбиты λ (в топологии Зариского), и этот факт будем обозначать $\lambda \rightarrow \mu$.

Очевидно, что любая алгебра вырождается в алгебру с нулевым умножением.

Из алгебраической теории групп известно, что замыкания относительно евклидовой топологии и топологии Зариского совпадают в случае комплексного поля, из чего можно заключить, что $\lambda \rightarrow \mu$ означает, что существует семейство

$$(g_t)_{t \in C} \in GL(C(t)) \quad \text{такое, что} \quad \lim_{t \rightarrow 0} g_t * \lambda = \mu,$$

где $C(t)$ – поле рациональных функций.

Определим семейство $(g_t)_{t \in C}$ следующим образом: $g_t(e_2) = te_2$, $g(e_i) = e_i$ для любого $i \neq 2$. Тогда $\lim_{t \rightarrow 0} g_t(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{R} \oplus C$, т.е. $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{R} \oplus C$.

В связи с тем, что описание тонких алгебр Ли проводится методами, аналогичными [1], [2], в следующей теореме мы рассмотрим не лиевые тонкие алгебры Лейбница.

ТЕОРЕМА 2. *Любая комплексная не лиевая тонкая алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих двух неизоморфных нелиевых тонких алгебр Лейбница:*

$$\begin{aligned} L_1: \quad & [x_1, x_1] = x_3, \quad [x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при} \quad i \geq 2, \\ & [x_1, x_2] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k}, \quad [x_i, x_2] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k+i-2} \quad \text{при} \quad i \geq 2; \\ L_2: \quad & [x_1, x_1] = x_3, \quad [x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при} \quad i \geq 3, \\ & [x_1, x_2] = \sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s}, \quad [x_i, x_2] = \sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s+i-2} \quad \text{при} \quad i \geq 3; \end{aligned}$$

где $4 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n$, $4 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$ и отсутствующие произведения равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что данные алгебры являются алгебрами Лейбница. Из теоремы 1 при соответствующей замене базиса имеем, что любая комплексная не лиевая тонкая алгебра Лейбница L изоморфна одной из двух неизоморфных алгебр вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} + \beta, \quad & \text{где} \quad \beta(x_1, x_1) = 0, \quad \beta(x_i, x_1) = 0 \quad \text{при} \quad i \geq 2, \\ & \beta(x_i, x_j) \in \text{lin}\{x_{i+j}, x_{i+j+1}, \dots\} \quad \text{при} \quad i, j \neq 1, \\ & \beta(x_1, x_j) \in \text{lin}\{x_{j+2}, x_{j+3}, \dots\} \quad \text{при} \quad j \geq 2; \\ \mathfrak{R} + \beta, \quad & \text{где} \quad \beta(x_1, x_1) = 0, \quad \beta(x_i, x_1) = 0 \quad \text{при} \quad i \geq 3, \\ & \beta(x_i, x_j) \in \text{lin}\{x_{i+j}, x_{i+j+1}, \dots\} \quad \text{при} \quad i, j \neq 1, \\ & \beta(x_1, x_j) \in \text{lin}\{x_{j+2}, x_{j+3}, \dots\} \quad \text{при} \quad j \geq 2, \\ & \beta(x_2, x_1) \in \text{lin}\{x_4, x_5, \dots\}. \end{aligned}$$

Случай 1. $L \cong \mathfrak{Z} + \beta$. Тогда умножение в алгебре L будет следующим:

$$[x_1, x_1] = x_3 \quad \text{и} \quad [x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при} \quad i \geq 2.$$

Отсюда $\{x_3, x_4, x_5, \dots\} \subseteq Z(L)$ (т.е. $L^2 \subseteq Z(L)$). Следовательно, $[x_i, x_j] = 0$ при $j \geq 3$, $i \geq 1$.

Положим

$$[x_2, x_2] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k}.$$

Рассмотрим равенство

$$[x_i, [x_1, x_2]] = [[x_i, x_1], x_2] - [[x_i, x_2], x_1].$$

Так как $[x_1, x_2] \in Z(L)$, то $[x_i, [x_1, x_2]] = 0$ и, значит, $[[x_i, x_1], x_2] = [[x_i, x_2], x_1]$ для всех $i \geq 2$. Таким образом,

$$[x_i, x_2] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k+i-2} \quad \text{при } i \geq 2.$$

Положим

$$[x_1, x_2] = \sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s}.$$

Рассмотрим

$$[x_1, [x_2, x_1]] = [[x_1, x_2], x_1] - [[x_1, x_1], x_2].$$

Так как $[x_2, x_1] \in Z(L)$, то имеем равенство $[[x_1, x_2], x_1] = [[x_1, x_1], x_2]$. Но $[x_1, x_1] = x_3$ и $[x_i, x_1] = x_{i+1}$, поэтому

$$\sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k+1},$$

откуда

$$[x_1, x_2] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k}.$$

Итак, в случае 1 получили следующий класс алгебр:

$$\begin{aligned} L_1: \quad [x_1, x_1] &= x_3, \quad [x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при } i \geq 2, \\ [x_1, x_2] &= \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k}, \quad [x_i, x_2] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k+i-2} \quad \text{при } i \geq 2. \end{aligned}$$

Случай 2. $L \cong \mathfrak{K} + \beta$. Тогда в алгебре L получим следующее умножение:

$$[x_1, x_1] = x_3 \quad \text{и} \quad [x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при } i \geq 3.$$

Отсюда $\{x_3, x_4, x_5, \dots\} \subseteq Z(L)$ (т.е. $L^2 \subseteq Z(L)$). Следовательно, $[x_i, x_j] = 0$ при $j \geq 3, i \geq 1$.

Пусть

$$[x_2, x_1] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k}.$$

Тогда, сделав следующую замену переменных:

$$x'_2 := x_2 - \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k-1}, \quad x'_i := x_i \quad \text{при } i \neq 2,$$

мы получим

$$\begin{aligned} [x'_2, x_1] &= [x_2 - \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k-1}, x_1] = [x_2, x_1] - [\sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k-1}, x_1] \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k} - \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} x_{p_k} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, можно считать, что $[x_2, x_1] = 0$.

Пусть

$$[x_1, x_2] = \sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s}.$$

Рассмотрим произведение

$$[x_1, [x_2, x_1]] = [[x_1, x_2], x_1] - [[x_1, x_1], x_2].$$

В виду того, что $[x_2, x_1] \in Z(L)$, имеем $[[x_1, x_2], x_1] = [[x_1, x_1], x_2]$, откуда $[x_{i+1}, x_2] = [[x_1, x_2], x_1]$, т.е.

$$[x_i, x_2] = \sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s+i-2} \quad \text{при } i \geq 3.$$

Итак, в случае 2 получили следующий класс алгебр:

$$\begin{aligned} L_2: \quad [x_1, x_1] &= x_3, \quad [x_i, x_1] = x_{i+1} \quad \text{при } i \geq 3, \\ [x_1, x_2] &= \sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s}, \quad [x_i, x_2] = \sum_{s=1}^m \beta_{t_s} x_{t_s+i-2} \quad \text{при } i \geq 3. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме изоморфизм внутри классов не установлен.

Рассуждая аналогично случаю филиформных алгебр Лейбница [9], получим, что произвольная алгебра из теоремы 2 вырождается в алгебру $\mu \oplus A$, где μ является двумерной алгеброй Лейбница с базисом $\{e_1, e_2\}$ и умножением $[e_1, e_1] = e_2$, а A – абелева алгебра с базисом $\{e_3, e_4, \dots\}$.

В связи с тем, что дальнейшие рассуждения для тонких алгебр Ли нетрудно получить, используя методы, аналогичные методам работы [8], далее мы будем рассматривать не лиевые тонкие алгебры Лейбница.

Так как любая не лиевая тонкая алгебра Лейбница с точностью до изоморфизма принадлежит одному из двух классов теоремы 2, мы заключаем, что для установления изоморфизма внутри классов необходимо изучить поведение параметров при невырожденной замене базиса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Базис $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ комплексной тонкой не лиевой алгебры Лейбница L назовем *адаптированным*, если умножение в L относительно этого базиса имеет вид теоремы 2.

Пусть L – комплексная тонкая не лиевая алгебра Лейбница, определенная на векторном пространстве V и $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ – адаптированный базис алгебры L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Преобразование базиса $f \in GL(V)$ называется *адаптированным к умножению* алгебры L , если базис $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), \dots\}$ является адаптированным.

Замкнутую подгруппу группы $GL(V)$, образованную адаптированными преобразованиями, будем обозначать $GL_{ad}(V)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f \in GL_{ad}(V)$.

а) Пусть алгебра L принадлежит первому классу алгебр теоремы 2. Тогда f имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_q} e_{i_q}, \\ f(e_2) = (a_1 + a_2) e_2 + a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_q} e_{i_q}, \\ f(e_{i+1}) = [f(e_i), f(e_1)], \quad i \geq 2, \\ f(e_3) = [f(e_1), f(e_1)]. \end{cases}$$

б) Пусть алгебра L принадлежит второму классу алгебр теоремы 2. Тогда f имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_1 e_1 + a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_q} e_{i_q}, \\ f(e_2) = b e_2, \\ f(e_{i+1}) = [f(e_i), f(e_1)], \quad i \geq 3, \\ f(e_3) = [f(e_1), f(e_1)]. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in GL_{ad}(V)$. Положим

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_q} e_{i_q}, \\ f(e_2) &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_{j_1} e_{j_1} + \cdots + b_{j_p} e_{j_p}. \end{aligned}$$

Докажем случай а). Рассмотрим свойства адаптированного преобразования:

$$\begin{aligned} f(e_3) &= [f(e_1), f(e_1)] \\ &= [a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_q} e_{i_q}, a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_q} e_{i_q}] \\ &= a_1^2 e_3 + a_1 a_2 e_3 + a_1 \sum_{s=1}^q a_{i_s} e_{i_s+1} + a_1 a_2 \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} e_{p_k} + a_2^2 \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} e_{p_k} \\ &\quad + a_2 \sum_{s=1}^q a_{i_s} \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} e_{p_k+i_s-2} \\ &= a_1(a_1 + a_2) e_3 + a_1 \sum_{s=1}^q a_{i_s} e_{i_s+1} + a_2(a_1 + a_2) \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} e_{p_k} \\ &\quad + a_2 \sum_{s=1}^q a_{i_s} \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} e_{p_k+i_s-2}. \end{aligned}$$

Так как $[f(e_1), f(e_1)] \in L^2 \setminus L^3$, то $a_1(a_1 + a_2) \neq 0$.

Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} [f(e_1), f(e_2)] &= [a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{i_1} e_{i_1} + \cdots + a_{i_q} e_{i_q}, b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_{j_1} e_{j_1} + \cdots + b_{j_p} e_{j_p}] \\ &= b_1(a_1 + a_2) e_3 + \sum_{\nu_\xi \geq 4} \delta_{\nu_\xi} e_{\nu_\xi}, \end{aligned}$$

но так как $[f(e_1), f(e_2)] \notin L^2$ и $a_1(a_1 + a_2) \neq 0$, то мы имеем $b_1 = 0$.

Рассмотрим также произведение

$$\begin{aligned} f(e_3) &= [f(e_2), f(e_1)] = [b_2 e_2 + b_{j_1} e_{j_1} + \dots + b_{j_p} e_{j_p}, a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{i_1} e_{i_1} + \dots + a_{i_q} e_{i_q}] \\ &= a_1 b_2 e_3 + a_1 \sum_{l=1}^p b_{j_l} e_{j_l+1} + a_2 b_2 \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} e_{p_k} + a_2 \sum_{l=1}^p b_{j_l} \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} e_{p_k+j_k-2}. \end{aligned}$$

Из равенства $[f(e_1), f(e_1)] = [f(e_2), f(e_1)]$, сравнивая коэффициенты при базисе e_3 , имеем, что $b_2 = a_1 + a_2$. Таким образом, первые и третьи слагаемые в произведениях $[f(e_1), f(e_1)]$ и $[f(e_2), f(e_1)]$ равны.

Обозначим второе слагаемое первого (соответственно второго) произведения через A (соответственно C), а B и D – последние слагаемые соответственно первого и второго произведения.

Тогда

$$\begin{aligned} A + B &= a_1 a_{i_1} e_{i_1+1} + a_1 a_{i_2} e_{i_2+1} + \dots + a_1 a_{i_q} e_{i_q+1} \\ &\quad + a_2 [a_{i_1} (\alpha_{p_1} e_{p_1+i_1-2} + \alpha_{p_2} e_{p_2+i_1-2} + \dots + \alpha_{p_n} e_{p_n+i_1-2}) \\ &\quad + a_{i_2} (\alpha_{p_1} e_{p_1+i_2-2} + \alpha_{p_2} e_{p_2+i_2-2} + \dots + \alpha_{p_n} e_{p_n+i_2-2}) + \dots \\ &\quad + a_{i_q} (\alpha_{p_1} e_{p_1+i_q-2} + \alpha_{p_2} e_{p_2+i_q-2} + \dots + \alpha_{p_n} e_{p_n+i_q-2})], \\ C + D &= a_1 b_{j_1} e_{j_1+1} + a_1 b_{j_2} e_{j_2+1} + \dots + a_1 b_{j_p} e_{j_p+1} \\ &\quad + a_2 [b_{j_1} (\alpha_{p_1} e_{p_1+j_1-2} + \alpha_{p_2} e_{p_2+j_1-2} + \dots + \alpha_{p_n} e_{p_n+j_1-2}) \\ &\quad + b_{j_2} (\alpha_{p_1} e_{p_1+j_2-2} + \alpha_{p_2} e_{p_2+j_2-2} + \dots + \alpha_{p_n} e_{p_n+j_2-2}) + \dots \\ &\quad + b_{j_p} (\alpha_{p_1} e_{p_1+j_p-2} + \alpha_{p_2} e_{p_2+j_p-2} + \dots + \alpha_{p_n} e_{p_n+j_p-2})]. \end{aligned}$$

Заметим, что в сумме $A + B$ минимальный индекс при базисном элементе равен $i_1 + 1$, так как $p_1 + i_1 - 2 > i_1 + 1$ в силу $p_1 \geq 4$. С другой стороны, в сумме $C + D$ минимальный индекс при базисном элементе равен $j_1 + 1$. Учитывая, что $A + B = C + D$, мы получим, что $i_1 = j_1$, $a_{i_1} = b_{j_1}$.

Далее, сокращая слагаемые

$$a_1 a_{i_1} e_{i_1+1} + a_2 a_{i_1} \alpha_{p_1} e_{p_1+i_1-2} \quad \text{и} \quad a_1 b_{j_1} e_{j_1+1} + a_2 b_{j_1} \alpha_{p_1} e_{p_1+j_1-2}$$

в обеих частях равенства и рассматривая опять минимальный индекс при базисных элементах, получим, что $i_2 = j_2$, $a_{i_2} = b_{j_2}$. Продолжая аналогичные рассуждения, в конечном итоге получим, что

$$q = p, \quad a_{j_l} = b_{j_l}, \quad j_l = i_l, \quad 1 \leq l \leq p.$$

Доказательство случая б) проводится аналогичными рассуждениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Следующие типы преобразований базиса назовем *элементарными*:

$$\begin{aligned} \text{первый тип} - \quad \tau(a, k) &= \begin{cases} f(e_1) = e_1 + a e_k, \\ f(e_2) = e_2 + a e_k, \\ f(e_{i+1}) = [f(e_i), f(e_1)], \quad 2 \leq i, \quad 3 \leq k, \\ f(e_3) = [f(e_1), f(e_1)]; \end{cases} \\ \text{второй тип} - \quad \vartheta(a, b) &= \begin{cases} f(e_1) = a e_1 + b e_2, \\ f(e_2) = (a + b) e_2, \quad a(a + b) \neq 0, \\ f(e_{i+1}) = [f(e_i), f(e_1)], \quad 2 \leq i, \\ f(e_3) = [f(e_1), f(e_1)]; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{третий тип} - \quad \eta(a, k) &= \begin{cases} f(e_1) = e_1 + ae_k, \\ f(e_2) = e_2, \\ f(e_{i+1}) = [f(e_i), f(e_1)], \quad 3 \leq i, k, \\ f(e_3) = [f(e_1), f(e_1)]; \end{cases} \\ \text{четвертый тип} - \quad \delta(a, b, d) &= \begin{cases} f(e_1) = ae_1 + be_2, \\ f(e_2) = de_2, \quad ad \neq 0, \\ f(e_{i+1}) = [f(e_i), f(e_1)], \quad 3 \leq i, \\ f(e_3) = [f(e_1), f(e_1)]; \end{cases} \end{aligned}$$

где $a, b, d \in C$.

Пусть f – произвольный элемент группы $GL_{\text{ad}}(V)$.

Из следующего предложения следует, что изучение адаптированных преобразований сводится к изучению элементарных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

i) Пусть f имеет вид предложения 1 а). Тогда

$$f = \tau(a_{i_q}, i_q) \circ \tau(a_{i_{q-1}}, i_{q-1}) \circ \cdots \circ \tau(a_{i_1}, i_1) \circ \vartheta(a_1, a_2).$$

ii) Пусть f имеет вид предложения 1 б). Тогда

$$f = \eta(a_{i_q}, i_q) \circ \eta(a_{i_{q-1}}, i_{q-1}) \circ \cdots \circ \eta(a_{i_1}, i_1) \circ \delta(a_1, a_2, b_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственной проверкой равенств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) *Преобразование*

$$g = \tau(a_{i_q}, i_q) \circ \tau(a_{i_{q-1}}, i_{q-1}) \circ \cdots \circ \tau(a_{i_1}, i_1)$$

не изменяет структурные константы первого класса алгебр теоремы 2.

2) *Преобразование*

$$\varphi = \eta(a_{i_q}, i_q) \circ \eta(a_{i_{q-1}}, i_{q-1}) \circ \cdots \circ \eta(a_{i_1}, i_1)$$

не изменяет структурные константы второго класса алгебр теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Рассмотрим первый тип элементарных преобразований:

$$\tau(a_{i_t}, i_t) = \begin{cases} f(e_1) = e_1 + a_{i_t} e_{i_t}, \\ f(e_2) = e_2 + a_{i_t} e_{i_t}, \\ f(e_{i+1}) = [f(e_i), f(e_1)], \quad 2 \leq i, \quad 3 \leq i_t \\ f(e_3) = [f(e_1), f(e_1)]. \end{cases}$$

Из умножений

$$\begin{aligned} f(e_3) &= [f(e_1), f(e_1)] = [e_1 + ae_{i_t}, e_1 + ae_{i_t}] = e_3 + ae_{i_t+1}, \\ f(e_3) &= [f(e_2), f(e_1)] = [e_2 + ae_{i_t}, e_1 + ae_{i_t}] = e_3 + ae_{i_t+1}, \\ f(e_{i+1}) &= [f(e_i), f(e_1)] = [e_i + ae_{i_t+i-2}, e_1 + ae_{i_t}] = e_{i+1} + ae_{i_t+i-1} \end{aligned}$$

убеждаемся, что преобразования первого типа являются адаптированными.

Рассмотрим произведение, которое определяет параметры α_{p_k} :

$$[f(e_1), f(e_2)] = [e_1 + ae_{i_t}, e_2 + ae_{i_t}] = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} (e_{p_k} + ae_{p_k+i_t-2}) = \sum_{k=1}^n \alpha_{p_k} f(e_i).$$

Таким образом, преобразования первого типа не изменяют параметры α_{p_k} для любых $a \in C$.

Ввиду того, что суперпозиция адаптированных преобразований также является адаптированным преобразованием, заключаем, что преобразование

$$g = \tau(a_{i_q}, i_q) \circ \tau(a_{i_{q-1}}, i_{q-1}) \circ \dots \circ \tau(a_{i_1}, i_1)$$

не изменяет структурные константы первого класса алгебр теоремы 1.

Доказательство второго утверждения теоремы проводится аналогичным образом.

Из предложения 3 следует, что задача классификации комплексных тонких нелиевых алгебр Лейбница сводится к изучению преобразований второго и четвертого типов для первого и второго классов соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Vergne, “Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l’étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes”, *Bull. Soc. Math. France*, **98** (1970), 81–116.
- [2] M. Goze, Yu. Khakimjanov, *Nilpotent Lie algebras*, **361**, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [3] Ш. А. Аюпов, Б. А. Омиров, “О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница”, *Сиб. матем. ж.*, **42**:1 (2001), 18–29.
- [4] K. Khakimjanova, Yu. Khakimjanov, “Sur une classe d’algèbres de Lie de dimension infinie”, *Comm. Algebra*, **29**:1 (2001), 177–191.
- [5] A. Fialowski, “On the cohomology of infinite-dimensional nilpotent Lie algebras”, *Adv. Math.*, **97** (1993), 267–277.
- [6] A. Fialowski, “Deformation of some infinite-dimensional Lie algebras”, *J. Math. Phys.*, **31**:6 (1990), 1340–1343.
- [7] Д. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
- [8] J. R. Gómez, M. Goze, Y. Khakimjanov, “On the k -abelian filiform Lie algebras”, *Comm. Algebra*, **25**:2 (1997), 431–450.
- [9] S. Albeverio, B. A. Omirov, I. S. Rakhimov, “Varieties of nilpotent complex Leibniz algebras of dimension less than five”, *Comm. Algebra*, **33**:5 (2005), 1575–1585.

Б. А. Омиров

Институт математики АН Республики Узбекистан, г. Ташкент

E-mail: omirovb@mail.ru

Поступило

04.04.2005

Исправленный вариант

28.01.2006