Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Х. Садикова, Сравнение дискретных смешанных средних, содержащих симметрические функции, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 262–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 18:03:17

УДК 517.5

СРАВНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СМЕШАННЫХ СРЕДНИХ, СОДЕРЖАЩИХ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Р. Х. Садикова

Для смешанных обобщенных средних доказаны сравнения, из которых выводятся аналоги или обобщения неравенств Несса, Нелсона–Карлсона–Мини, Годуновой, Маркус–Минка и др.

Библиография: 12 названий.

1. Предварительные сведения. В статье для смешанных обобщенных средних доказаны сравнения, из которых выводятся аналоги или обобщения неравенств Несса [1], Нелсона, Карлсона и Мини [2], Годуновой [3], Маркус и Минка [4] и др. Результаты являются продолжением исследований автора.

Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество из k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, мощность $|J_k| = k$, $f_1(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – строго монотонная непрерывная функция, $f_1^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции $f_1(\cdot)$. Обозначим обобщенную среднюю

$$\mathfrak{M}_{f_1}(x, J_k) = f_1^{-1}\left(\frac{1}{|J_k|} \sum_{j \in J_k} f_1(x_j)\right) = f_1^{-1}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_1(x_{i_j})\right) = \mathfrak{M}_{f_1}(x, k),$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k \in J_k$.

Если $f_2(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – другая строго монотонная непрерывная функция, а $f_2^{-1}(\cdot)$ – ей обратная функция, то имеем смешанную обобщенную среднюю вида

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{f_1, f_2}(x, J_k) &= \mathfrak{M}_{f_1, f_2}(x, k) = \mathfrak{M}_{f_2}(\mathfrak{M}_{f_1}(x, k)) \\ &= f_2^{-1}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_2\left(f_1^{-1}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_1(x_{i_j})\right)\right)\right), \end{aligned}$$

где $\binom{n}{k} = C_n^k$ – число сочетаний, т.е. число всех подмножеств по k элементов множества $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k < n$.

В ходе доказательства будут использованы следующие свойства:

- (а) $\mathfrak{M}_{f_1}(\mathfrak{M}_{f_2}(x, k)) \neq \mathfrak{M}_{f_2}(\mathfrak{M}_{f_1}(x, k))$ при $f_1(\cdot) \neq f_2(\cdot)$;
- (б) $\mathfrak{M}_{f_1}(\mathfrak{M}_{f_2}(x, k)) \leq \mathfrak{M}_{f_1}(\mathfrak{M}_{f_3}(x, k))$, если $\mathfrak{M}_{f_2}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_3}(x, k)$,

а также ниже приведенное неравенство Иессена [1; с. 90–96].

ТЕОРЕМА ИЕССЕНА. Пусть две вещественные строго монотонные непрерывные функции $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ определены на полупрямой $\mathbb{R}_+$, $f_1(\cdot)$ переводит $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}_+$,

функция $f_2(\cdot)$ возрастает и выпукла, а также суперпозиция $f_2 \circ f_1^{-1}(\cdot)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$. Тогда для неотрицательных чисел $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, и $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ имеет место неравенство

$$f_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i f_1(x_i)\right) \leq f_2^{-1}\left(\sum_{i=1}^n p_i f_2(x_i)\right), \quad (*)$$

т.е. сравнение двух обобщенных средних

$$\mathfrak{M}_{f_1}(x) \leq \mathfrak{M}_{f_2}(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

При $f_1(\cdot) \neq f_2(\cdot)$ равенство в $(*)$ достигается только тогда, когда все $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, равны. В случае, если суперпозиция $f_2 \circ f_1^{-1}$ – вогнутая функция, то неравенство $(*)$ будет противоположным.

Отметим, что при $f_1(u) = u, f_2 \circ f_1^{-1}(u) = f_2(u)$ – выпуклой функции из неравенства Иессена $(*)$ имеем неравенство Йенсена [5]

$$f_2\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f_2(x_i), \quad (**)$$

которое также будет использовано при выводе общих результатов и их частных случаев.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство Иессена $(*)$ было доказано Шиша и Карго [6] при условии, что выпуклость $f_2 \circ f_1^{-1}(\cdot)$ гарантирует следующее предложение о функциях $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$: функция

$$x(\cdot) \rightarrow \frac{f_2(x(\cdot))}{f_1'(x(\cdot))}, \quad f_1'(x(\cdot)) \neq 0 \quad \forall x(\cdot),$$

- 1) не убывает при одинаковой монотонности функций $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$, или
- 2) не возрастает при различной монотонности функций $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$.

Эти условия успешно применяются при выводе частных случаев из общих результатов.

2. Общие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $x \in \mathbb{R}_n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), J_k$ – подмножество k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, мощность $|J_k| = k, 1 < k < n, i_j \in J_k, j \in 1, 2, \dots, k, f_i(\cdot), i = 1 \div 4$, – строго монотонные непрерывные функции на $\mathbb{R}_+$ и при этом

$$\mathfrak{M}_{f_1}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_3}(x, k), \quad (1)$$

$$\mathfrak{M}_{f_2}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_4}(x, k). \quad (2)$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_{f_1, f_2}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_3, f_4}(x, k), \quad (3)$$

т.е.

$$\begin{aligned} & f_2^{-1}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k | |J_k|=k\}} f_2\left(f_1^{-1}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_1(x_{i_j})\right)\right)\right) \\ & \leq f_4^{-1}\left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k | |J_k|=k\}} f_4\left(f_3^{-1}\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_3(x_{i_j})\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Равенство в (3) достигается только в случае:

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 1$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, мощность $|J_k| = k$, $i_j \in J_k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $|J_{k-1}| = k-1$, $2 < k < n$, $i_j \in J_{k-1}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, $f_i(\cdot)$, $i = 1 \div 4$, – строго монотонные непрерывные функции на $\mathbb{R}_+$, $f_4 \circ f_3^{-1}(\cdot)$ – выпуклая, $f_4(\cdot)$ – возрастающая функция и при этом

$$\mathfrak{M}_{f_1}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_3}(x, k), \quad (4)$$

$$\mathfrak{M}_{f_2}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_4}(x, k). \quad (5)$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_{f_1, f_2}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_3, f_4}(x, k-1), \quad (6)$$

т.е.

$$\begin{aligned} & f_2^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_2 \left(f_1^{-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_1(x_{i_j}) \right) \right) \right) \\ & \leq f_4^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k-1}} \sum_{\{J_{k-1} \mid |J_{k-1}|=k-1\}} f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} f_3(x_{i_j}) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Равенство достигается только в следующих случаях:

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 2$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, мощность $|J_k| = k$, $|J_{k-1}| = k-1$, $2 < k < n$, $f_i(\cdot)$, $i = 1 \div 4$, – строго монотонные непрерывные функции на $\mathbb{R}_+$, $f_2 \circ f_1^{-1}(\cdot)$ – вогнутая, $f_2(\cdot)$ – возрастающая функции и при этом

$$\mathfrak{M}_{f_1}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_3}(x, k), \quad (7)$$

$$\mathfrak{M}_{f_2}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_4}(x, k). \quad (8)$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_{f_3, f_4}(x, k) \leq \mathfrak{M}_{f_1, f_2}(x, k-1), \quad (9)$$

т.е.

$$\begin{aligned} & f_4^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_3(x_{i_j}) \right) \right) \right) \\ & \leq f_2^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k-1}} \sum_{\{J_{k-1} \mid |J_{k-1}|=k-1\}} f_2 \left(f_1^{-1} \left(\frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} f_1(x_{i_j}) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Равенство достигается только в случаях, когда

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 2$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем неравенство (3). Последовательно применяя неравенство (1) и свойство (б), а затем неравенство (2), получим

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}_{f_1, f_2}(x, k) &\triangleq \mathfrak{M}_{f_2}(\mathfrak{M}_{f_1}(x, k)) = f_2^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_2 \left(f_1^{-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_1(x_{i_j}) \right) \right) \right) \\
 &\leq f_2^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_2 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_3(x_{i_j}) \right) \right) \right) \\
 &\leq f_4^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_3(x_{i_j}) \right) \right) \right) \\
 &\leq \mathfrak{M}_{f_4}(\mathfrak{M}_{f_3}(x, J_k)) = \mathfrak{M}_{f_4}(\mathfrak{M}_{f_3}(x, k)) = \mathfrak{M}_{f_3, f_4}(x, k),
 \end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k < n$.

В ходе доказательства были применены неравенства Иессена (1), (2), в которых достигается равенство только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (см. выше теорему Иессена). Итак, первое условие равенства в неравенстве (3) – это равенство всех x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Далее, если $n - k + 1$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю, то в каждое подмножество из k элементов войдет один нулевой элемент. Поэтому при этом условии в неравенстве (3) достигается равенство.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем неравенство (6). Вначале заметим, что из k различных элементов, выбранных из данных n элементов, можно составить k различных сочетаний по $k - 1$ элементов в каждом. Во всех составленных так сочетаниях любой элемент участвует $k - 1$ раз (так как он входит в каждое сочетание, кроме того, из которого выброшен). Поэтому справедливо равенство

$$(k - 1) \sum_{j=1}^k f(x_{i_j}) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{k-1} f(x_{i_j}^l). \quad (10)$$

Далее последовательно применяя неравенство (4) со свойством (6), неравенство (5), равенство (10) и, наконец, используя неравенство Йенсена (**) для выпуклой суперпозиции $f_4 \circ f_3^{-1}(\cdot)$ при условии, что функция $f_4(\cdot)$ возрастающая (а, следовательно,

и обратная ей функция $f_4^{-1}(\cdot)$ возрастающая), получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{f_1, f_2}(x, k) &= \mathfrak{M}_{f_2}(\mathfrak{M}_{f_1}(x, k)) \stackrel{(4), (\delta)}{\leq} \mathfrak{M}_{f_2}(\mathfrak{M}_{f_3}(x, k)) \\ &\leq \mathfrak{M}_{f_4}(\mathfrak{M}_{f_3}(x, k)) = f_4^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_3(x_{i_j}) \right) \right) \right) \\ &= f_4^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{k-1} f_3(x_{i_j}^l) \right) \right) \right) \\ &\leq f_4^{-1} \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} f_3(x_{i_j}^l) \right) \right) \right) \\ &= f_4^{-1} \left(\frac{1}{k \cdot C_n^k} \sum_{\{J_k \mid |J_k|=k\}} \sum_{j=1}^k f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} f_3(x_{i_j}^l) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что двойная сумма в последнем выражении содержит $k \cdot C_n^k$ слагаемых, но среди них есть одинаковые, а число различных слагаемых равно числу сочетаний из n элементов по $k-1$, т.е. C_n^{k-1} . Каждое из этих слагаемых повторяется столько раз, в скольких сочетаниях из k элементов, взятых из данных n элементов, содержатся соответствующие $k-1$ элементов. Отсюда ясно, что число повторений каждого слагаемого совпадает с числом элементов, остающихся от n элементов после отбора из них $k-1$ элементов, т.е. $n-k+1$. Поэтому последнее выражение примет вид

$$\begin{aligned} &f_4^{-1} \left(\frac{n-k+1}{k \cdot C_n^k} \sum_{\{J_{k-1} \mid |J_{k-1}|=k-1\}} f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} f_3(x_{i_j}^l) \right) \right) \right) \\ &= f_4 \left(\frac{1}{C_n^{k-1}} \sum_{\{J_{k-1} \mid |J_{k-1}|=k-1\}} f_4 \left(f_3^{-1} \left(\frac{1}{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} f_3(x_{i_j}^l) \right) \right) \right) \\ &= \mathfrak{M}_{f_4}(\mathfrak{M}_{f_3}(x, J_{k-1})) = \mathfrak{M}_{f_3, f_4}(x, k-1). \end{aligned}$$

При доказательстве неравенства (6) были применены неравенства Иессена (4), (5) и неравенство Йенсена (**) для выпуклой комбинации $f_4 \circ f_3^{-1}(\cdot)$. А они все достигают равенства только при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Это и есть первое условие равенства доказанного неравенства (6). А также, если $n-k+2$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю, то в подмножества по $k-1$ элементов войдет один нулевой элемент. Поэтому равенство в неравенстве (6) достигается и при условии, если $n-k+2$ элементов из множества $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 проводится так же, как и доказательство теоремы 2, с той лишь разницей, что при применении неравенства Йенсена (**) используется вогнутость комбинации $f_2 \circ f_1^{-1}(\cdot)$ при возрастающей функции $f_2(\cdot)$ (а следовательно, и обратная функция $f_2^{-1}(\cdot)$ возрастающая).

3. Некоторые частные случаи общих результатов. Исследованиями оценок типа общих результатов (3), (6), (9), как было отмечено выше, занимались Несс [1], Годунова [3], Карлсон, Мини, Нельсон [2]. Выделим некоторые неравенства названных авторов из общих результатов.

СЛЕДСТВИЕ 1 (ТЕОРЕМЫ 1). Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество из k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, мощность $|J_k| = k$, $i_j \in J_k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $\binom{n}{k} = C_n^k$. Тогда имеет место неравенство Несса [1]

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k ||J_k|=k\}} \left(\prod_{j=1}^k x_{i_j} \right)^{1/k} \leq \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k ||J_k|=k\}} \prod_{j=1}^k x_{i_j} \right)^{1/k}.$$

Равенство достигается только в случаях, когда

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 1$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

В теореме 1 при $f_1(u) = f_3(u) = \ln u$, $f_2(u) = u$, $f_4(u) = u^k$ условие (1) обращается в равенство, а условие (2) выполняется по неравенству Иессена (*). Отсюда общий результат (3) и будет сформулированным неравенством Несса.

СЛЕДСТВИЕ 2 (ТЕОРЕМЫ 1). Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество из k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, $1 < k < n$, мощность $|J_k| = k$, $i_j \in J_k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $\binom{n}{k} = C_n^k$, $\varphi(\cdot)$ – выпуклая функция на $\mathbb{R}_+$, а $\varphi^{-1}(\cdot)$ – ее обратная функция. Тогда имеет место неравенство Годуновой [3]

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k ||J_k|=k\}} \varphi \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varphi^{-1}(x_{i_j}) \right) \leq \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k ||J_k|=k\}} \left(\varphi \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varphi^{-1}(x_{i_j}) \right) \right)^k \right)^{1/k}.$$

Равенство достигается только при

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 1$ элементов из (x_1, x_2, x_n) равны нулю.

В теореме 1 при $f_2(u) = u$, $f_4(u) = u^k$, $k > 1$, $f_1^{-1}(u) = f_3^{-1}(u) = \varphi(u)$ выпуклой функции, $(f_1(u) = f_3(u) = \varphi^{-1}(u) - \text{вогнутая функция})$ условие (1) обращается в равенство, а условие (2) выполняется по неравенству Иессена (*). Поэтому общий результат (3) и станет неравенством Годуновой.

СЛЕДСТВИЕ 3 (ТЕОРЕМЫ 1). Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество из k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, $1 < k < n$, мощность $|J_k| = k$, $i_j \in J_k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $0 < s \leq t$, $0 < q \leq p$, $\binom{n}{k} = C_n^k$. Тогда имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k ||J_k|=k\}} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (x_{i_j})^q \right)^{s/q} \right)^{1/s} \leq \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k ||J_k|=k\}} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (x_{i_j})^p \right)^{t/p} \right)^{1/t}.$$

Равенство достигается только в случаях, когда

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 1$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

В теореме 1 при $f_1(u) = u^q$, $f_3(u) = u^p$, $0 < q \leq p$, $f_2(u) = u^s$, $f_4(u) = u^t$, $0 < s \leq t$, условия (1) и (2) теоремы выполняются по неравенству Иессена (*). Общий результат (3) обращается в приведенное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 4 (ТЕОРЕМЫ 2). Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество из k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, $2 < k < n$, мощность $|J_k| = k$, а $|J_{k-1}| = k - 1$, $i_j \in J_k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $i_j \in J_{k-1}$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$, $\binom{n}{k} = C_n^k$ – число сочетаний из n элементов по k элементов. Тогда имеет место неравенство Карлсона и других [2]:

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k | |J_k|=k\}} \left(\prod_{j=1}^k x_{i_j} \right)^{1/k} \leq \frac{1}{\binom{n}{k-1}} \sum_{\{J_{k-1} | |J_{k-1}|=k-1\}} \left(\prod_{j=1}^{k-1} x_{i_j} \right)^{1/(k-1)}.$$

Равенство достигается только в случаях, когда

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 2$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

В теореме 2 при $f_1(u) = f_3(u) = \ln u$ ($f_1^{-1}(u) = f_3^{-1}(u) = e^u$), $f_2(u) = f_4(u) = u$ неравенства (4) и (5) обращаются в равенство, а $f_4 \circ f_3^{-1}(u) = e^u$ – выпуклая и $f_4(u) = u$ – возрастающая функции. Тогда общий результат (6) обращается в приведенное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 5 (ТЕОРЕМЫ 2). Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – подмножество k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, $2 < k < n$, мощности $|J_k| = k$, $|J_{k-1}| = k - 1$, $i_j \in J_k$, $j = 1, 2, \dots, k$, $i_j \in J_{k-1}$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$, $0 < q \leq p$, $0 < s \leq t$, $t > p$, $\binom{n}{k} = C_n^k$ – число сочетаний из n элементов по k элементов. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\{J_k | |J_k|=k\}} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{i_j}^q \right)^{s/q} \right)^{1/s} \\ & \leq \left(\frac{1}{\binom{n}{k-1}} \sum_{\{J_{k-1} | |J_{k-1}|=k-1\}} \left(\frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j}^p \right)^{t/p} \right)^{1/t}. \end{aligned}$$

Равенство достигается только в случаях, когда

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 2$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

При $s = t$, $p = q$, $t > p$ из приведенного неравенства имеем неравенство Карлсона–Мини–Нельсона [5; с. 348].

В теореме 2 при $f_1(u) = u^q$, $f_3(u) = u^p$, $0 < q \leq p$, и $f_2(u) = u^s$, $f_4(u) = u^t$, $0 < s \leq t$ условия (4) и (5) выполняются по неравенству Иессена (*), а комбинация $f_4 \circ f_3^{-1}(u) = (u)^{\frac{t}{p}}$ при $t > p$ является выпуклой и $f_3(u) = u^p$, $p > 0$, возрастающих функциями. Поэтому из общего результата (6) и получим сформулированное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 6 (ТЕОРЕМЫ 3). Пусть $x \in \mathbb{R}_n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J_k – множество из k элементов множества $(1, 2, \dots, n)$, $2 < k < n$, мощности $|J_k| = k$, $|J_{k-1}| = k - 1$, $i_j \in J_{k-1}$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$, $\binom{n}{k} = C_n^k$ – число сочетаний из n элементов по k элементов.

Тогда имеет место неравенство Карлсона и других [5]:

$$\left(\prod_{\{J_k | |J_k|=k\}} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{i_j} \right)^{1/\binom{n}{k}} \geq \left(\prod_{\{J_{k-1} | |J_{k-1}|=k-1\}} \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} x_{i_j} \right)^{1/\binom{n}{k-1}}.$$

Равенство достигается только в случаях, когда

- 1) $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, либо
- 2) $n - k + 2$ элементов из $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равны нулю.

Это неравенство следует из общего результата (9) теоремы 3, если положить $f_1(u) = f_3(u) = u$, $f_2(u) = f_4(u) = \ln u$ ($f_2^{-1}(u) = f_4^{-1}(u) = e^u$). Условия теоремы (7) и (8) обращаются в равенство, комбинация $f_2 \circ f_1^{-1}(u) = \ln u$ – вогнутая и $f_2(u) = \ln u$ – возрастающая функции. А общий результат (9) переходит в нужное неравенство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Ness, “Das arithemetische und das geometrische Mittel”, *Prax. Math.*, **8**:11 (1964), 293–296.
- [2] B. Carlson, R. Meany, S. Nelson, “Mixed arithmetic and geometric means”, *Pacif. J. Math.*, **38**:2 (1971), 343–349.
- [3] Е. К. Годунова, *Неравенства с выпуклыми функциями*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, МГПИ, М., 1965.
- [4] М. Маркус, Х. Минк, *Обзор теории матриц и матричных неравенств*, Наука, М., 1972.
- [5] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [6] O. Shisha, G. Cargo, “On comparable means”, *Pacif. J. Math.*, **4**:3 (1964), 1053–1059.

Р. Х. Садикова

Московская академия тонкой химической технологии
им. М. В. Ломоносова

Поступило

13.05.2003