Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Д. Фролкина, Относительная задача прообраза, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 282–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:28:24

УДК 515.126

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПРООБРАЗА

О. Д. Фролкина

Ставится проблема минимизации для относительной задачи прообраза. Получена минимизационная теорема. К относительной задаче прообраза сведена относительная задача общего прообраза конечной системы отображений, частными случаями которой являются относительные задачи совпадения и общих корней конечного набора отображений. В качестве следствий получаются результаты об относительных задачах совпадения двух отображений, неподвижных точек и корней, которые, с некоторыми отличиями, содержатся в известных работах других авторов.

Библиография: 31 название.

Одним из разделов теории неподвижных точек является задача минимизации количества неподвижных точек отображения $f: X \rightarrow X$ пространства X в себя в классе отображений, гомотопных данному (см. книги [1]–[3]). Важным шагом к решению этой проблемы стала работа Нильсена [4]. Позже множеством авторов изучались задачи совпадения (см. обзор [5]) и пересечения двух отображений [6], прообраза [7] и корней [8], [9]. Возможно дальнейшее обобщение этих постановок, когда рассматриваются отображения пар (см. [10]–[12] для задачи неподвижных точек, [13]–[15] для задачи совпадения, [16]–[18] для задачи корней); статья [19] посвящена задаче неподвижных точек для отображений триад. Задачи для отображений пар называют относительными, хотя это значение слова “относительный” отличается от привычного, означающего неизменяемость отображения на подпространстве. Мы рассмотрим относительную задачу прообраза. Наши результаты и рассуждения являются аналогами имеющихся для перечисленных задач. При этом в качестве следствий получаются гладкие варианты некоторых известных теорем. Кроме того, мы рассматриваем относительную задачу общего прообраза конечного набора отображений, частными случаями которой являются относительные задачи совпадения и общих корней конечного числа отображений. Эти постановки также представляются новыми.

В работе символом $\sim$ обозначается гомотопность отображений, а также гомотопность путей (с неподвижными концами, если другое не сказано). Через $\cong$ обозначается гомеоморфизм; D_R^n (соответственно, $\overline{D}_R^n$) – открытый (соответственно, замкнутый) шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$, для $R = 1$ пишем также D^n (соответственно,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00705, и Германской службы академических обменов DAAD.

$\overline{D}^n$); I – отрезок $[0, 1]$. Для отображения пар $f: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ обозначим через f_0 ограничение $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow Y_0$. Гомотопии вида $(X, X_0) \times I \rightarrow (Y, Y_0)$ называются *гомотопиями отображений пар* или *относительными гомотопиями*, а для относительной гомотопности отображений используется знак $\approx$.

Все многообразия предполагаются гладкими, отображения – непрерывными. Говоря, что многообразие M является подмножеством многообразия N , мы всегда подразумеваем, что M есть подмногообразие N .

1. Абсолютная задача прообраза. Дано непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств и подпространство $B \subset Y$. *Задача минимизации* состоит в оценке величины

$$\text{MP}(f, B) = \min_{g \sim f} |g^{-1}(B)|,$$

где $g^{-1}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\}$ – множество точек прообраза, а $|g^{-1}(B)|$ – его мощность. Если множество B одноточечно, то говорят о *задаче корней*.

Эта (“абсолютная”) задача прообраза рассмотрена в работе [7] (см. также [20]), основные результаты которой состоят в следующем.

Точки множества $f^{-1}(B)$ разбиваются на классы эквивалентности, называемые *классами Нильсена*, или *классами (точек) прообраза*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точки $x_0, x_1 \in f^{-1}(B)$ *эквивалентны*, если существуют такие пути $\alpha: (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ и $\beta: I \rightarrow Y$, что $\beta(I) \subset B$ и $f \circ \alpha \sim \beta$.

Среди классов выделяют *топологически существенные*, т.е. не исчезающие при гомотопиях отображения f [7; определение (1.8)]. Количество топологически существенных классов $N_t(f)$ (*топологическое число Нильсена*) является гомотопическим инвариантом, и справедливо неравенство $N_t(f) \leq \text{MP}(f, B)$.

Дальнейшие результаты получены в случае, когда X, Y, B – ориентированные замкнутые многообразия, B – подмногообразие Y , $\dim X + \dim B = \dim Y$; $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. При этих условиях становится возможным ввести алгебраическую характеристику класса – индекс, выделив тем самым алгебраически существенные классы (имеющие ненулевой индекс). Количество алгебраически существенных классов $N_a(f)$ (*алгебраическое число Нильсена*) также является гомотопическим инвариантом, и $N_a(f) \leq N_t(f)$. Приемы сокращения и создания точек [7; п. (3.2), (3.3)] позволяют доказать равенства $N_a(f) = N_t(f) = \text{MP}(f, B)$ при $\dim X \geq 3$ [7; теорема 3.4] (в случае выполнения равенств такого типа – как в задаче прообраза, так и в задачах неподвижных точек, совпадения, пересечения – говорят о справедливости *свойства Векена*). Отметим, что в работе [7] другие обозначения и число $N_a(f)$ не вводится явно, но анализ содержащихся в ней рассуждений убеждает в справедливости перечисленных нами результатов.

2. Относительная задача прообраза. Пусть теперь $f: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ – непрерывное отображение пар топологических пространств, $(B, B_0 = B \cap Y_0) \subset (Y, Y_0)$ – пара подпространств. Нас интересует возможно более точная оценка величины

$$\text{MP}_{\text{rel}}(f, B) = \min_{g \approx f} |g^{-1}(B)|.$$

Подчеркнем, что здесь, в отличие от абсолютной задачи, минимум берется по всем отображениям, *относительно гомотопным* f .

Такую задачу будем называть *относительной задачей прообраза*. Абсолютная задача прообраза является частным случаем относительной при $X_0 = X$ и $Y_0 = Y$ или при $X_0 = Y_0 = \emptyset$.

Ясно, что $\text{MP}_{\text{rel}}(f, B) \geq \text{MP}(f, B)$. Но число $\text{MP}_{\text{rel}}(f, B)$ может быть значительно больше, чем $\text{MP}(f, B)$. Поэтому нам необходимы новые, лучшие, оценивающие инварианты.

Итак, имеем две взаимосвязанные задачи прообраза:

$$f: X \rightarrow Y \supset B \quad \text{и} \quad f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0.$$

Мы предполагаем, что X, X_0, Y, Y_0, B, B_0 – ориентируемые замкнутые многообразия и

$$\dim X + \dim B = \dim Y, \quad \dim X_0 + \dim B_0 = \dim Y_0.$$

Отметим, что хотя фиксация ориентаций рассматриваемых многообразий нужна для введения индекса, значения относительных чисел Нильсена (см. определение 2) от выбора не зависят.

Ограничиваясь в определении топологически существенного класса прообраза задачи $f: X \rightarrow Y \supset B$ лишь относительными гомотопиями, получаем понятие топологически относительной существенности – неистощаемости при относительных гомотопиях. Пусть $N_+(f)$ – количество топологически относительно существенных классов прообраза задачи $f: X \rightarrow Y \supset B$. Несложно понять, что $N_+(f)$ является гомотопическим инвариантом.

Из определения 1 с очевидностью вытекает, что каждый класс Нильсена задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$ содержится в некотором классе задачи $f: X \rightarrow Y \supset B$. Пусть $N_{\text{com},a,a}(f, f_0)$ (соответственно $N_{\text{com},t,a}(f, f_0)$ и $N_{\text{com},+,a}(f, f_0)$) – количество алгебраически существенных (соответственно топологически и топологически относительно существенных) классов прообраза задачи $f: X \rightarrow Y \supset B$, содержащих алгебраически существенный класс прообраза задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$, а $N_{\text{com},a,t}(f, f_0)$ (соответственно $N_{\text{com},t,t}(f, f_0)$ и $N_{\text{com},+,t}(f, f_0)$) – количество алгебраически существенных (соответственно топологически и топологически относительно существенных) классов прообраза задачи $f: X \rightarrow Y \supset B$, содержащих топологически существенный класс прообраза задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Введем *относительные числа Нильсена* формулами

$$\begin{aligned} N_{\text{rel},a,a}(f, f_0) &= N_a(f_0) + N_a(f) - N_{\text{com},a,a}(f, f_0), \\ N_{\text{rel},t,a}(f, f_0) &= N_a(f_0) + N_t(f) - N_{\text{com},t,a}(f, f_0), \\ N_{\text{rel},+,a}(f, f_0) &= N_a(f_0) + N_+(f) - N_{\text{com},+,a}(f, f_0), \\ N_{\text{rel},a,t}(f, f_0) &= N_t(f_0) + N_a(f) - N_{\text{com},a,t}(f, f_0), \\ N_{\text{rel},t,t}(f, f_0) &= N_t(f_0) + N_t(f) - N_{\text{com},t,t}(f, f_0), \\ N_{\text{rel},+,t}(f, f_0) &= N_t(f_0) + N_+(f) - N_{\text{com},+,t}(f, f_0). \end{aligned}$$

Для абсолютной задачи прообраза, т. е. при $X = X_0$, $Y = Y_0$, получаем уже знакомые инварианты:

$$\begin{aligned} N_{\text{rel},a,a}(f, f) &= N_{\text{rel},a,t}(f, f) = N_a(f), \\ N_{\text{rel},t,a}(f, f) &= N_{\text{rel},+,a}(f, f) = N_{\text{rel},t,t}(f, f) = N_{\text{rel},+,t}(f, f) = N_t(f). \end{aligned}$$

Для относительной задачи корней, т.е. при одноточечном $B = B_0$, числа $N_{\text{rel},a,a}(f, f_0)$, $N_{\text{rel},t,a}(f, f_0)$, $N_{\text{rel},a,t}(f, f_0)$, $N_{\text{rel},t,t}(f, f_0)$ совпадают с относительным числом Нильсена из работы [16], а $N_{\text{rel},+,a}(f, f_0)$, $N_{\text{rel},+,t}(f, f_0)$ – с инвариантом, введенным в [18; определение 2.2]. Заметим еще, что выражения для $N_{\text{rel},t,t}(f, f_0)$ и $N_{\text{rel},+,t}(f, f_0)$ имеют смысл и в случае произвольных топологических пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Числа

$$N_{\text{rel},a,a}(f, f_0), N_{\text{rel},t,a}(f, f_0), N_{\text{rel},+,a}(f, f_0), N_{\text{rel},a,t}(f, f_0), N_{\text{rel},t,t}(f, f_0), N_{\text{rel},+,t}(f, f_0)$$

инвариантны при относительных гомотопиях.

2) Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} N_{\text{rel},a,a}(f, f_0) &\leq N_{\text{rel},t,a}(f, f_0) \leq N_{\text{rel},+,a}(f, f_0) \leq \text{MP}_{\text{rel}}(f, B), \\ N_{\text{rel},a,t}(f, f_0) &\leq N_{\text{rel},t,t}(f, f_0) \leq N_{\text{rel},+,t}(f, f_0) \leq \text{MP}_{\text{rel}}(f, B), \end{aligned}$$

и каждое из чисел первой цепочки не превышает соответствующего числа второй цепочки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточно доказать инвариантность чисел

$$\begin{aligned} N_{\text{com},a,a}(f, f_0), \quad N_{\text{com},t,a}(f, f_0), \quad N_{\text{com},+,a}(f, f_0), \\ N_{\text{com},a,t}(f, f_0), \quad N_{\text{com},t,t}(f, f_0), \quad N_{\text{com},+,t}(f, f_0). \end{aligned}$$

Это получается аналогично рассуждениям [10; теорема 3.3] (в случае первых четырех чисел мы пользуемся инвариантностью индекса класса прообраза, которая вытекает из доказательства теоремы (2.11) работы [7]).

2) Докажем справедливость неравенств первой цепочки. Алгебраически существенный класс прообраза основной задачи является топологически существенным, а топологически существенный – топологически относительно существенным. Отсюда вытекают первые два неравенства цепочки. Докажем третье неравенство. В силу п. 1) достаточно показать, что $N_{\text{rel},+,a}(f, f_0) \leq |f^{-1}(B)|$. Нам гарантировано наличие $N_a(f_0)$ алгебраически существенных точек прообраза отображения f_0 . Далее, разность $N_+(f) - N_{\text{com},+,a}(f, f_0)$ есть количество относительно топологически существенных классов Нильсена задачи $f: X \rightarrow Y \supset B$, не содержащих алгебраически существенных классов задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$. Значит, каждый такой класс дает хотя бы одну еще неучтенную точку, откуда получается последнее неравенство цепочки.

Неравенства второй цепочки доказываются аналогично.

Покажем, что $N_{\text{rel},a,a}(f, f_0) \leq N_{\text{rel},a,t}(f, f_0)$. Это неравенство равносильно следующему:

$$N_{\text{com},a,t}(f, f_0) - N_{\text{com},a,a}(f, f_0) \leq N_t(f_0) - N_a(f_0).$$

Разность слева есть количество алгебраически существенных классов прообраза задачи $f: X \rightarrow Y \supset B$, не содержащих алгебраически существенных классов задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$, но содержащих топологически существенный класс этой задачи (который, следовательно, не является алгебраически существенным). Ясно, что это значение не превышает количества топологически существенных классов прообраза задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$, не являющихся алгебраически существенными, т.е. числа $N_t(f_0) - N_a(f_0)$. Неравенство доказано. Оставшиеся два неравенства получаются аналогично.

Дадим достаточное условие того, что оценка

$$N_{\text{rel},a,a}(f, f_0) \leq \text{MP}_{\text{rel}}(f, B)$$

точна. Более того, наша теорема позволяет достичь наименьшего количества точек прообраза *одновременно* на всем пространстве X и на подпространстве X_0 . Нам понадобится понятие избегаемости (by-passed) подпространства [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подпространство X_0 пространства X *избегается*, если каждый путь в X с концами в $X - X_0$ гомотопен некоторому пути, лежащему целиком в $X - X_0$.

ТЕОРЕМА. Пусть подпространство X_0 избегается в X , $\dim X_0 \geq 3$, $\dim B \neq 1$. Тогда существует такое отображение $g \approx f$, что

$$|g^{-1}(B)| = N_{\text{rel},a,a}(f, f_0) \quad \text{и} \quad |g_0^{-1}(B_0)| = N_a(f_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к отображению f нижеследующую лемму 1. Обозначим окрестность из этой леммы через U , отображение – снова через f . Имеем $|f_0^{-1}(B_0)| = N_a(f_0)$. Анализ рассуждений [7; п. (3.2), (3.3)] показывает, что существует такая гомотопия отображения f с носителем в $X - \bar{U}$, что каждое из множеств всех эквивалентных между собой лежащих в $X - X_0$ точек прообраза превращается либо в пустое множество, либо в одну точку ненулевого индекса. Обозначим полученное таким образом отображение снова через f . Итак, точки $f^{-1}(B) \cap (X - X_0)$ имеют ненулевой индекс и попарно неэквивалентны. Для завершения доказательства остается уничтожить точки прообраза на $X - X_0$, классы которых содержат алгебраически существенный класс прообраза задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$. Равенство $|f_0^{-1}(B_0)| = N_a(f_0)$ влечет алгебраическую существенность каждого класса прообраза задачи $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$. Значит, мы должны уничтожить все точки множества $f^{-1}(B) \cap (X - X_0)$, эквивалентные точкам из $f_0^{-1}(B_0)$. Итак, пусть (различные) точки прообраза $x_1, \dots, x_n \in X - X_0$ эквивалентны точкам $x_1^0, \dots, x_n^0 \in X_0$ (возможно, повторяющимся). Для каждого $k = 1, \dots, n$ возьмем такой путь $\alpha_k: (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_k^0, x_k)$, что

$$\begin{aligned} \alpha_k((0, 1]) &\subset X - X_0, \\ \alpha_k((0, 1]) \cap f^{-1}(B) &= \emptyset \quad \text{и} \quad \alpha_i((0, 1]) \cap \alpha_j((0, 1]) = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Возьмем еще такие окрестности U_k множеств $\alpha_k((0, 1])$, что

$$\begin{aligned} U_k &\subset X - X_0, \quad (U_k, \bar{U}_k) \cong (D^n, \bar{D}^n), \quad U_k \cap f^{-1}(B) = \{x_k\}, \\ \partial U_k \cap f^{-1}(B) &= \{x_k^0\} \quad \text{и} \quad U_i \cap U_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Существование таких путей и окрестностей вытекает из избегаемости подпространства X_0 в X и неравенства $\dim X \geq 3$. Теперь точки x_k удаляем по лемме 2 (см. ниже) гомотопией с носителем в $\bigcup_{k=1}^n U_k$, которая является, очевидно, гомотопией отображений пар.

ЛЕММА 1. Пусть подпространство X_0 избегаемо в X . Тогда существуют такие окрестность U множества X_0 и отображение $g \approx f$, что

- (i) $g|_{X-\bar{U}}: X-\bar{U} \rightarrow Y$ гладко и трансверсально к B (в частности, множество $g^{-1}(B) \cap (X-\bar{U})$ конечно);
- (ii) $g^{-1}(B) \cap (\bar{U}-X_0) = \emptyset$;
- (iii) если две точки множества $g^{-1}(B) \cap (X-\bar{U})$ принадлежат одному классу Нильсена задачи $g: X \rightarrow Y \supset B$, то между ними существует задающий эквивалентность путь, целиком лежащий в $X-\bar{U}$;
- (iv) множество $g_0^{-1}(B_0)$ конечно, а если $\dim X_0 \geq 3$, то состоит ровно из $N_a(f_0)$ точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из нескольких шагов.

1) Возьмем такую гомотопию отображения $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$, что полученное отображение имеет конечное количество точек прообраза множества B_0 , при $\dim X_0 \geq 3$ равное $N_a(f_0)$ [7; теорема (3.4)].

2) Продолжим эту гомотопию на все X по лемме Борсука. Назовем полученное отображение снова f .

3) Построим относительную гомотопию отображения f в окрестности каждой из (конечного числа) точек множества $f_0^{-1}(B_0)$ такую, что множество лежащих в $X-X_0$ точек прообраза станет замкнуто в X , а множество лежащих в X_0 точек прообраза не изменится. Поясним подробнее, как строится такая гомотопия в окрестности каждой из точек $x_0 \in f_0^{-1}(B_0)$.

а) Пусть $V \subset Y$ – такая окрестность точки $f(x_0)$, что

$$(V, B \cap V, Y_0 \cap V) \cong (D^m, D^k, D^{m_0}).$$

Пусть $U_1, U_2 \subset X$ – такие окрестности точки x_0 , что

$$(U_2, X_0 \cap U_2, U_1, X_0 \cap U_1) \cong (D_2^n, D_2^{n_0}, D_1^n, D_1^{n_0}),$$

$$\bar{U}_2 \cap X_0 \cap f^{-1}(B) = \{x_0\}, \quad f(U_2) \subset V.$$

б) Построим такую гомотопию $h_t: \partial U_1 \rightarrow V$, что

$$h_0 = f|_{\partial U_1}, \quad h_1^{-1}(B) = \emptyset, \quad h_t|_{X_0 \cap \partial U_1} = f|_{X_0 \cap \partial U_1} \quad \forall t \in I.$$

Для этого возьмем такие окрестности $O_1, O_2 \subset \partial U_1$ множества $\partial U_1 \cap f^{-1}(B)$, что $\bar{O}_1 \subset O_2 \subset \bar{O}_2 \subset \partial U_1 - X_0$ (последнее возможно в силу условия $\partial U_1 \cap X_0 \cap f^{-1}(B) = \emptyset$). Выберем такую гомотопию $h'_t: O_2 \rightarrow V$, что $h'_0 = f|_{O_2}$, h'_1 гладко и трансверсально к $B \cap V$ и $h'_t(\partial O_1) \cap B = \emptyset$ для каждого $t \in I$ [21; глава 2, теорема 4.5]. Поскольку $\dim \partial U_1 = \dim X - 1 < \dim V - \dim(B \cap V)$, то трансверсальность h'_1 к $B \cap V$ означает, что $h'_1(O_2) \cap B = \emptyset$. Зададим гомотопию $h''_t: \partial O_1 \cup \partial O_2 \rightarrow V - B$

формулами $h_t''|_{\partial O_1} = h_t'|_{\partial O_1}$, $h_t''|_{\partial O_2} = f|_{\partial O_2}$ и продолжим ее на $\overline{O_2} - O_1$ по лемме Борсука. Теперь нужная гомотопия h_t задается равенствами

$$h_t|_{O_1} = h_t'|_{O_1}, \quad h_t|_{O_2 - O_1} = h_t''|_{O_2 - O_1}, \quad h_t|_{\partial U_1 - O_2} = f|_{\partial U_1 - O_2}.$$

с) Специальным образом продолжим построенное в п. б) отображение $h_1: \partial U_1 \rightarrow V$ на $\overline{U}_1$. Запишем произвольную точку $z \in \overline{U}_1 \cong \overline{D}^n$ в виде $z = (1-t)x_0 + tx$ для некоторых точки $x \in \partial U_1$ и числа $t \in I$. Положим

$$f_1(z) = (1-t)f(x_0) + th_1(x)$$

(операции производятся уже в окрестности $V \cong D^m$). Полученное отображение $f_1: \overline{U}_1 \rightarrow V$ непрерывно и совпадает с h_1 на ∂U_1 . Так как $f(x_0) \in B$, $h_1(x) \notin B$ для любого $x \in \partial U_1$ и $B \cap V$ выделяется в V линейными однородными уравнениями, то $f_1^{-1}(B) \cap \overline{U}_1 = \{x_0\}$. Пусть $H_t: \overline{U}_1 \rightarrow Y$ – линейная гомотопия между $H_0 = f$ и $H_1 = f_1$. Так как $Y_0 \cap V$ выделяется в V линейными однородными уравнениями, то H_t – гомотопия отображений пар.

д) Зададим на замкнутом подмножестве $\overline{U}_1 \cup (X - U_2) \cup X_0$ пространства X гомотопию g_t формулами

$$g_t|_{\overline{U}_1} = H_t, \quad g_t|_{(X - U_2) \cup X_0} = f|_{(X - U_2) \cup X_0}$$

и продолжим ее, пользуясь леммой Борсука, до гомотопии $G_t: X \rightarrow Y$. Обозначим полученное отображение G_1 опять через f .

Проведя описанную в п. а)–д) операцию для каждой точки $x_0 \in f_0^{-1}(B_0)$, получим такое отображение (назовем его снова f), что множество $f^{-1}(B) \cap (X - X_0)$ замкнуто в X , следовательно, компактно. Легко видеть, что при этом множество лежащих в X_0 точек прообраза не изменилось.

4) Несложно понять, что для каждой точки $x \in f^{-1}(B)$ существует такая ее окрестность U_x , что точки прообраза, лежащие в U_x , эквивалентны точке x , причем путь, задающий эквивалентность, можно взять целиком лежащим в U_x . Из компактности множества $f^{-1}(B) \cap (X - X_0)$ тогда вытекает, что существует такая трубчатая окрестность $U \supset X_0$, что все пути, задающие эквивалентности точек $f^{-1}(B) \cap (X - X_0)$, можно считать лежащими в $X - \overline{U}$.

5) Пусть $O \subset X$ – такое открытое множество, что $X - U \subset O$ и $O \cap X_0 = \emptyset$. Пусть $h_t: O \rightarrow Y$ – такая гомотопия, что $h_0 = f|_O$, отображение h_1 гладко и трансверсально к B и $h_t(\partial U) \cap B = \emptyset$ для каждого $t \in I$ [21; глава 2, теорема 4.5]. Возьмем такую трубчатую окрестность $V \supset X_0$, что $\overline{V} \subset U$. Зададим гомотопию $h_t': \partial U \cup \partial V \rightarrow Y - B$ формулами

$$h_t'|_{\partial U} = h_t|_{\partial U}, \quad h_t'|_{\partial V} = f|_{\partial V}$$

и продолжим ее по лемме Борсука до гомотопии $H_t': \overline{U} - V \rightarrow Y - B$. Определим гомотопию $H_t: X \rightarrow Y$ равенствами

$$H_t|_V = f|_V, \quad H_t|_{U - V} = H_t'|_{U - V}, \quad H_t|_{X - U} = h_t|_{X - U}.$$

Несложно понять, что отображение $g = H_1$ и окрестность U искомые.

Следующая лемма описывает операцию “склеивания” точек.

ЛЕММА 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение многообразий, $B \subset Y$ – подмногообразие, $\dim B = \dim Y - \dim X$, $\dim B \neq 1$, $\dim X \geq 3$. Пусть точки $x_0, x_1 \in f^{-1}(B)$ принадлежат одному классу прообраза, путь

$$\alpha: (I, 0, (0, 1), 1) \rightarrow (X, x_0, X - f^{-1}(B), x_1)$$

задает их эквивалентность и $U \subset X$ – такая окрестность множества $\alpha((0, 1])$, что

$$(U, \bar{U}) \cong (D^n, \bar{D}^n), \quad U \cap f^{-1}(B) = \{x_1\}, \quad \partial U \cap f^{-1}(B) = \{x_0\}.$$

Тогда существует такое отображение $g: X \rightarrow Y$, что

$$g^{-1}(B) = f^{-1}(B) - \{x_1\}$$

и g гомотопно f , причем носитель гомотопии содержится в U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из нескольких шагов.

1) В случае одноточечного B утверждение можно получить, следуя доказательству теоремы 8а работы Хопфа [8]; для произвольного конечного B потребуются незначительные изменения. Ниже мы приводим рассуждение только для $\dim B \geq 2$, которое также следует идеям Хопфа и может быть упрощено для получения доказательства теоремы в случае конечного B .

2) Можно считать, что $f(x_0) \neq f(x_1)$. Действительно, если $f(x_0) = f(x_1)$, возьмем такую окрестность O' точки $f(x_1)$, что $(O', B \cap O') \cong (D^m, D^k)$, и такие окрестности O_1, O_2 точки x_1 , что $\bar{O}_1 \subset O_2 \subset \bar{O}_2 \subset U$, $O_2 \cap f^{-1}(B) = \{x_1\}$ и $f(O_2) \subset O'$. Гомотопируем отображение $f|_{\bar{O}_1}$, заменив его на композицию $f|_{\bar{O}_1}$ и “сдвига внутри O' вдоль B ”, назовем эту гомотопию h'_t . Итак, $\bar{O}_1 \cap (h'_t)^{-1}(B) = \{x_1\}$ для каждого $t \in I$. Зададим гомотопию $h''_t: \partial O_1 \cup \partial O_2 \rightarrow O' - B$ условиями

$$h''_t|_{\partial O_1} = h'_t|_{\partial O_1}, \quad h''_t|_{\partial O_2} = f|_{\partial O_2}$$

и продолжим ее по лемме Борсука до гомотопии $H''_t: \bar{O}_2 - O_1 \rightarrow O' - B$. Гомотопия $h_t: U \rightarrow Y$, задаваемая формулами

$$h_t|_{\bar{O}_1} = h'_t, \quad h_t|_{\bar{O}_2 - O_1} = H''_t, \quad h_t|_{U - \bar{O}_2} = f|_{U - \bar{O}_2},$$

начинается в f и заканчивается отображением f_1 , для которого $f_1(x_0) \neq f_1(x_1)$, причем $f_1^{-1}(B) = f^{-1}(B)$.

3) Пусть $f_1 \circ \alpha \sim \beta$, где путь $\beta: I \rightarrow Y$ обладает свойством $\beta(I) \subset B$. В силу неравенства $\dim B \geq 2$, результата [8; лемма 1] и п. 2) настоящего доказательства можно считать, что β – дуга и имеется такая окрестность $V \subset Y$ множества $\beta(I)$, что $(V, B \cap V) \cong (D^m, D^k)$.

4) Так как $\dim X \geq 3$ и $|f^{-1}(B)| < \infty$, можно считать, что α – дуга и при гомеоморфизме

$$(U, \bar{U}) \cong (D_1^{n-1} \times (-1, 1), \bar{D}_1^{n-1} \times [-1, 1])$$

имеем

$$\alpha(t) = (0, \dots, 0, 1 - t), \quad t \in [0, 1].$$

5) Покажем, что есть такая гомотопия $f_1 \sim f_2$ с носителем в U , что $f_2 \circ \alpha(I) \subset V$. Так как $f_1 \circ \alpha \sim \beta$, где $\beta(I) \subset B$, то существует такое число $\varepsilon \in (0, 1/2)$, что

$$f_1 \circ \alpha([0, \varepsilon]) \cup f_1 \circ \alpha([1 - \varepsilon, 1]) \subset V.$$

Пусть $h_t: \alpha(I) \rightarrow Y$ – такая гомотопия, что

$$\begin{aligned} h_0 &= f_1|_{\alpha(I)}, & h_1(\alpha(I)) &\subset V, & h_t|_{\alpha([0, \varepsilon]) \cup \alpha([1 - \varepsilon, 1])} &= f_1|_{\alpha([0, \varepsilon]) \cup \alpha([1 - \varepsilon, 1])}, \\ h_t(\alpha((0, 1))) &\cap B = \emptyset \quad \text{для каждого } t \in I \end{aligned}$$

(возможность выполнения последнего условия вытекает из того, что коразмерность B в Y равна $\dim X \geq 3$). Зафиксируем в $\bar{U} \cong \bar{D}_1^{n-1} \times [-1, 1]$ замкнутый диск

$$K = \bar{D}_{1/2}^{n-1} \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon].$$

Определим гомотопию

$$g_t: \partial K \cup \{0_{n-1}\} \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon] \rightarrow Y - B,$$

где 0_{n-1} – центр диска $D_{1/2}^{n-1}$, формулами

$$g_t|_{\partial K} = f_1|_{\partial K}, \quad g_t|_{\{0_{n-1}\} \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]} = h_t|_{\{0_{n-1}\} \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]}$$

и продолжим ее по лемме Борсука до гомотопии $\bar{K} \rightarrow Y - B$. Из конструкции ясно, что, продолжая эту гомотопию отображением f_1 на все U , мы получаем в результате нужное отображение f_2 .

6) Поскольку $f_2(\alpha(I)) \subset V$, то найдется такая окрестность U' множества $\alpha((0, 1))$, для которой выполнены все перечисленные в условии леммы свойства, причем $U' \subset U$ и $f_2(\bar{U}') \subset V$. Записав произвольную точку $z \in \bar{U}' \cong \bar{D}^n$ в виде $z = (1 - t)x_0 + tx$ для $x \in \partial U'$, $t \in I$, переопределим f_2 в U' по формуле $g(z) = (1 - t)f_2(x_0) + tf_2(x)$ (действия в $V \cong D^m$). Полученное отображение $g: X \rightarrow Y$ является искомым (гомотопия g и f_2 в U задается линейно, “вдоль отрезков”).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Полагая в теореме $X_0 = Y_0 = \emptyset$ или $X_0 = X$, $Y_0 = Y$, мы получаем только частный случай абсолютного результата [7; теорема 3.4], т.е. с ограничением $\dim B \neq 1$. Однако из теоремы можно формально вывести абсолютный результат в полной общности, например, “вложив” данную абсолютную задачу $f_0: X_0 \rightarrow Y_0 \supset B_0$ в относительную задачу $f_0 \times \text{id}_{S^2}: (X_0 \times S^2, X_0 \times \{*\}) \rightarrow (Y_0 \times S^2, Y_0 \times \{*\}) \supset (B_0 \times S^2, B_0 \times \{*\})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях теоремы все неравенства обеих цепочек п. 2) предложения 1 являются равенствами. При $\dim X = 2$ эти неравенства могут быть строгими уже для абсолютной задачи. Как указано в [22; с. 175], для каждой поверхности S отрицательной эйлеровой характеристики рассуждения работ [23], [24] дают примеры таких задач прообраза вида $f\Delta \text{id}_S: S \rightarrow S \times S \supset \Delta S$ (ΔS – диагональ), что

$$0 = N_a(f\Delta \text{id}_S, \Delta(S)) < 1 = N_t(f\Delta \text{id}_S, \Delta(S)) < 2 = \text{MP}(f\Delta \text{id}_S, \Delta(S)).$$

Для любых двух поверхностей S_1, S_2 постоянное отображение дает пример (абсолютной) задачи корней $c: S_1 \rightarrow S_2 \supset \{*\}$, обладающей свойством Векена. В работе [25] получен критерий существования такого отображения $f: S_1 \rightarrow S_2$, что соответствующая задача корней не обладает свойством Векена.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Было бы интересно найти примеры, показывающие несравнимость чисел “различных сортов”, т. е. отсутствие неравенств между шестью относительными числами Нильсена, не содержащихся в п. 2) предложения 1. Из теоремы 3.4 работы [7] и нашей теоремы вытекает, что такие примеры следует искать при $\dim X_0 = 1, 2$, при $\dim B = 1$ или при неизбежности подпространства X_0 в X .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Полученные результаты справедливы и в более общей постановке: когда рассматриваемые пространства являются объединением попарно непересекающихся многообразий различных размерностей. Подробнее: задача

$$f: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0) \supset (B, B_0 = B \cap Y_0)$$

“распадается” на конечное количество “независимых подзадач”

$$f_k: (X_k, X_{0,k}) \rightarrow (Y_k, Y_{0,k}) \supset (B_k, B_{0,k} = B_k \cap Y_{0,k}),$$

где все $X_k, X_{0,k}, Y_k, Y_{0,k}, B_k, B_{0,k}$ – многообразия и для каждого k выполнены необходимые размерностные соотношения. Относительные числа Нильсена в этом случае определяются как суммы соответствующих чисел по “подзадачам”.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Видимо, техника работы [20] позволит распространить теорему на случай топологических многообразий, необязательно замкнутых и ориентируемых; об относительной задаче совпадения для этой более общей ситуации см. статью [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В работах [26], [27] рассмотрена задача совпадения двух отображений, причем требование равенства размерностей отображаемого пространства и пространства-образа отброшено. Введен инвариант, равный в классическом случае алгебраическому числу Нильсена. Возможно, подобные идеи позволят рассмотреть при более слабых ограничениях и задачу прообраза.

3. Задача общего прообраза набора отображений. Следствия. Пусть $f_1, \dots, f_r: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ – отображения пар, $(B, B_0 = B \cap Y_0) \subset (Y, Y_0)$. *Множество общего прообраза* – это

$$P(f_1, \dots, f_r, B) = \{x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) \in B\}.$$

В частности, при одноточечном B получается множество общих корней набора отображений, при $B = Y$ – множество совпадения $\text{Coin}(f_1, \dots, f_r)$ (о задаче совпадения конечного числа отображений см. [28], [7], [29]), при $r = 1$ и произвольном B – множество прообраза. Задача состоит в оценке минимального количества точек этого множества:

$$\text{MP}_{\text{rel}}(f_1, \dots, f_r, B) = \min_{g_1 \approx f_1, \dots, g_r \approx f_r} |P(g_1, \dots, g_r, B)|.$$

Эта задача эквивалентна следующей относительной задаче прообраза:

$$\Delta\{f_k\}_{k=1}^r : (X, X_0) \rightarrow (Y^r, Y_0^r) \supset (\Delta B, \Delta B_0 = \Delta B \cap Y_0^r)$$

(в абсолютном случае эта эквивалентность отмечена в работах [28], [7]). Действительно, $P(f_1, \dots, f_r, B) = P(\Delta\{f_k\}_{k=1}^r, \Delta B)$, и гомотопия отображений $f_1, \dots, f_r$ по отдельности равносильна гомотопии их диагонального произведения $\Delta\{f_k\}_{k=1}^r$, следовательно,

$$\text{MP}_{\text{rel}}(f_1, \dots, f_r, B) = \text{MP}_{\text{rel}}(\Delta\{f_k\}_{k=1}^r, \Delta B).$$

Если X, X_0, Y, Y_0, B, B_0 – ориентируемые замкнутые многообразия и $\dim X + \dim B = r \dim Y$, $\dim X_0 + \dim B_0 = r \dim Y_0$, то в этой относительной задаче прообраза определены относительные числа Нильсена. При дополнительных требованиях справедлива теорема минимизации. Значит, *определяя* относительные числа Нильсена для задачи общего прообраза набора отображений как одноименные числа в соответствующей задаче прообраза одного отображения, мы получим инварианты, оценивающие снизу количество точек общего прообраза набора, а также минимизационный результат. Итак, пусть

$$\begin{aligned} N_a(f_{1,0}, \dots, f_{r,0}) &= N_a(\Delta\{f_{k,0}\}_{k=1}^r), \\ N_{\text{rel},a,a}(f_1, \dots, f_r, f_{1,0}, \dots, f_{r,0}) &= N_{\text{rel},a,a}(\Delta\{f_k\}_{k=1}^r, \Delta\{f_{k,0}\}_{k=1}^r). \end{aligned}$$

Из теоремы получается

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f_1, \dots, f_r : (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0) \supset (B, B_0 = B \cap Y_0)$ – отображения, $r \geq 1$; X, X_0, Y, Y_0, B, B_0 – ориентируемые замкнутые многообразия, $\dim X + \dim B = r \dim Y$, $\dim X_0 + \dim B_0 = r \dim Y_0$. Пусть подпространство X_0 избегаемо в X , $\dim X_0 \geq 3$, $\dim B \neq 1$. Тогда существуют такие отображения $g_1 \approx f_1, \dots, g_r \approx f_r$, что

$$\begin{aligned} |P(g_1, \dots, g_r, B)| &= N_{\text{rel},a,a}(f_1, \dots, f_r, f_{1,0}, \dots, f_{r,0}), \\ |P(g_{1,0}, \dots, g_{r,0}, B_0)| &= N_a(f_{1,0}, \dots, f_{r,0}). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При $r \geq 2$ имеет место равенство

$$\text{MP}_{\text{rel}}(f_1, \dots, f_r, Y) = \min_{g_1 \approx f_1, \dots, g_{r-1} \approx f_{r-1}} |P(g_1, \dots, g_{r-1}, f_r, Y)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из равенства

$$P(f_1, \dots, f_r, Y) = \text{Coin}(f_1, \dots, f_r) = \text{Coin}(f_1, f_r) \cap \dots \cap \text{Coin}(f_{r-1}, f_r)$$

и относительной версии теоремы Брукса [30], [15; теорема 2.14].

Обозначая в случае $B = Y$, т.е. для задачи совпадения r отображений числа $N_a(f_{1,0}, \dots, f_{r,0})$ и $N_{\text{rel},a,a}(f_1, \dots, f_r, f_{1,0}, \dots, f_{r,0})$ соответственно через

$$NC_a(f_{1,0}, \dots, f_{r,0}) \quad \text{и} \quad NC_{\text{rel},a,a}(f_1, \dots, f_r, f_{1,0}, \dots, f_{r,0}),$$

из следствия 1 и предложения 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f_1, \dots, f_r: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ – отображения пар ориентируемых замкнутых многообразий, $r \geq 2$; $\dim X = (r-1) \dim Y$, $\dim X_0 = (r-1) \times \dim Y_0$. Пусть подпространство X_0 избегаемо в X , $\dim X_0 \geq 3$ и $\dim Y \geq 2$. Тогда существуют такие отображения $g_1 \approx f_1, \dots, g_{r-1} \approx f_{r-1}$, что

$$\begin{aligned} |\text{Coin}(g_1, \dots, g_{r-1}, f_r)| &= NC_{\text{rel}, a, a}(f_1, \dots, f_r, f_{1,0}, \dots, f_{r,0}), \\ |\text{Coin}(g_{1,0}, \dots, g_{r-1,0}, f_{r,0})| &= NC_a(f_{1,0}, \dots, f_{r,0}). \end{aligned}$$

Для $r = 2$ этот результат (в более общих условиях на пространства, однако с избыточным требованием избегаемости Y_0 в Y) приведен в работе [14; теорема 2.4] без указания возможности гомотопировать только одно из двух данных отображений. Отсюда, при помощи относительной теоремы Брукса, в [15; теорема 3.24] выведена теорема об одновременной минимизации другого типа, причем гомотопируется только одно из двух данных отображений. Из следствия 2 в случае $X = Y$, $X_0 = Y_0$, также при помощи относительной теоремы Брукса, может быть выведен известный результат относительной теории неподвижной точки. Применим следствие 2 к пространствам $X = Y = B$, $X_0 = Y_0 = B_0$ и двум отображениям: f, id_X . Множество совпадения $\text{Coin}(f, \text{id}_X)$ есть множество $\text{Fix}(f)$ неподвижных точек отображения f . Обозначим

$$NF_a(f_0) = NC_a(f_0, \text{id}_{X_0}), \quad NF_{\text{rel}, a, a}(f, f_0) = NC_{\text{rel}, a, a}(f, \text{id}_X, f_0, \text{id}_{X_0}).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f: (X, X_0) \rightarrow (X, X_0)$ – отображение пары ориентируемых замкнутых многообразий; подпространство X_0 избегаемо в X , $\dim X_0 \geq 3$. Тогда существует такое отображение $g \approx f$, что

$$|\text{Fix}(g)| = NF_{\text{rel}, a, a}(f, f_0), \quad |\text{Fix}(g_0)| = NF_a(f_0).$$

Более сильный результат для полиэдров получен в [11; теорема 5.1]. Отметим, что наше определение числа $NF_{\text{rel}, a, a}(f, f_0)$ сложнее известного определения относительного числа Нильсена для задачи неподвижных точек [10; определение 2.4], однако с помощью [31; предложение 7.9] можно доказать их эквивалентность.

Полагая в теореме $B = B_0 = \{b\}$, получаем следствие для относительной задачи корней (см. [17; теорема 2.3], а также в более общей ситуации, с вытекающей из доказательства, но не сформулированной явно одновременной минимизацией, [18; теорема 3.3]).

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $f: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ – отображение пар ориентируемых замкнутых многообразий, $\dim X = \dim Y$, $\dim X_0 = \dim Y_0 \geq 3$ и подпространство X_0 избегаемо в X . Пусть $b \in Y_0$. Тогда существует такое отображение $g \approx f$, что

$$|g^{-1}(b)| = N_{\text{rel}, a, a}(f, f_0), \quad |g_0^{-1}(b)| = N_a(f_0).$$

Автор признателен научному руководителю профессору С. А. Богатому и профессору [Х. Цишангу] (Рурский университет, г. Бохум, Германия) за привлечение внимания к задачам минимизации и интерес к работе. Данные результаты получены во время пребывания в Рурском университете, г. Бохум, Германия. Автор

выражает благодарность профессору этого университета Г. Лауресу и профессору У. Кошорке (университет г. Зиген, Германия) за гостеприимство и полезные беседы, а также С. Бехтлюфт-Заксу (университет г. Регенсбург, Германия), вопрос которого привел к появлению замечания 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1971.
- [2] B. Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, Contemporary Mathematics, **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [3] Т. Н. Кiang, *The Theory of Fixed Point Classes*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989.
- [4] J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189–358.
- [5] С. А. Богатый, Д. Л. Гонсалвес, Х. Цишанг, “Теория совпадения: проблема минимизации”, *Тр. МИАН*, **225** (1999), 52–86.
- [6] С. К. McCord, “A Nielsen theory for intersection numbers”, *Fund. Math.*, **152**:2 (1997), 117–150.
- [7] R. Dobreńko, Z. Kucharski, “On the generalization of the Nielsen number”, *Fund. Math.*, **134**:1 (1990), 1–14.
- [8] H. Hopf, “Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. II. Klasseninvarianten von Abbildungen”, *Math. Ann.*, **102**:4 (1929), 562–623.
- [9] R. Brooks, *Coincidences, Roots and Fixed Points*, Doctoral Dissertation, Univ. of California, Los Angeles, 1967.
- [10] H. Schirmer, “A relative Nielsen number”, *Pacific J. Math.*, **122**:2 (1986), 459–473.
- [11] H. Schirmer, “On the location of fixed points on pairs of spaces”, *Topology Appl.*, **30**:3 (1988), 253–266.
- [12] H. Schirmer, “A survey of relative Nielsen fixed point theory”, *Nielsen theory and dynamical systems*, Contemporary Mathematics, **152**, ed. C. McCord, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 291–309.
- [13] C. G. Jang, S. Lee, “A relative Nielsen number in coincidence theory”, *J. Korean Math. Soc.*, **32**:2 (1995), 171–181.
- [14] J. Jezierski, “The relative coincidence Nielsen number”, *Fund. Math.*, **149**:1 (1996), 1–18.
- [15] J. Guo, P. R. Heath, “Coincidence theory on the complement”, *Topology Appl.*, **95**:3 (1999), 229–250.
- [16] K.-Y. Yang, “A relative root Nielsen number”, *Comm. Korean Math. Soc.*, **11**:1 (1996), 245–252.
- [17] K.-Y. Yang, “The minimum theorem for the relative root Nielsen number”, *Comm. Korean Math. Soc.*, **12**:3 (1997), 701–707.
- [18] R. F. Brown, H. Schirmer, “Nielsen theory of roots of maps of pairs”, *Topology Appl.*, **92**:3 (1999), 247–274.
- [19] H. Schirmer, “Nielsen numbers for maps of triads”, *Topology Appl.*, **52**:2 (1993), 181–202.
- [20] J. Jezierski, “The Nielsen coincidence theory on topological manifolds”, *Fund. Math.*, **143**:2 (1993), 167–178.
- [21] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1970.
- [22] С. К. McCord, “The three faces of Nielsen: Coincidences, intersections and preimages”, *Topology Appl.*, **103**:2 (2000), 155–177.
- [23] B. Jiang, “Fixed points and braids”, *Invent. Math.*, **75**:1 (1984), 69–74.
- [24] B. Jiang, “Fixed points and braids, II”, *Math. Ann.*, **272**:2 (1985), 249–256.

- [25] С. А. Богатый, Д. Л. Гонсалвес, Е. А. Кудрявцева, Х. Ципанг, “Минимальное число прообразов при отображениях между поверхностями”, *Матем. заметки*, **75**:1 (2004), 13–19.
- [26] U. Koschorke, *Nielsen coincidence theory in arbitrary codimensions*, Preprint 306/2003, Universität Siegen; <http://www.math.uni-siegen.de/topology/publications.html>.
- [27] U. Koschorke, *Geometric and homotopy theoretic methods in Nielsen coincidence theory*, Preprint 308/2004, Universität Siegen; <http://www.math.uni-siegen.de/topology/publications.html>.
- [28] Н. Schirmer, “Bemerkungen zur Homotopietheorie der Koinzidenzen mehrerer Abbildungen”, *Arch. Math.*, **11** (1960), 56–64.
- [29] О. Д. Фролкина, “О задаче совпадения конечного числа отображений”, *Тр. XXVI конф. молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, т. II*, Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, М., 2004, 234–238.
- [30] J. Guo, *Relative and Equivariant Coincidence Theory*, Ph. D. Thesis, memorial University of Newfoundland, 1996.
- [31] J. Vick, *Homology theory*, Graduate Text Math., **145**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1994.

О. Д. Фролкина

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

30.03.2005