Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Чуешев, Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразия Якоби компактной римановой поверхности, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 629–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:50:17

УДК 515.17+517.545

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ТОЧКИ ВЕЙЕРШТРАССА И МНОГООБРАЗИЕ ЯКОБИ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Чуешев

В предыдущих работах автора была построена общая теория мультипликативных точек Вейерштрасса на компактных римановых поверхностях для произвольного характера. В настоящей работе установлены некоторые дополнительные связи между мультипликативными точками Вейерштрасса на компактной римановой поверхности для произвольного характера и специальными подмножествами в многообразии Якоби, каноническими вложениями компактной римановой поверхности в проективное пространство. Отмечено различие между классическими точками Вейерштрасса и мультипликативными точками Вейерштрасса на компактной римановой поверхности.

Библиография: 4 названия.

Известно, что классические точки Вейерштрасса играют большую роль в геометрической теории функций на компактных римановых поверхностях. В работе [1] была построена общая теория мультипликативных точек Вейерштрасса на компактных римановых поверхностях для произвольного характера.

В настоящей работе установлены некоторые дополнительные связи между мультипликативными точками Вейерштрасса на компактной римановой поверхности для произвольного характера и специальными подмножествами в многообразии Якоби, каноническими вложениями компактной римановой поверхности в проективное пространство. Отмечено различие между классическими точками Вейерштрасса и мультипликативными точками Вейерштрасса на компактной римановой поверхности. Показано, что любой конформный автоморфизм задает биекцию множества мультипликативных точек Вейерштрасса на себя на любой компактной римановой поверхности. Кроме того, установлено, что множество голоморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима с простыми нулями образует открытое и всюду плотное подмножество в пространстве всех голоморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$.

1. Пусть $[F, \{a_k, b_k\}_{k=1}^g]$ – (фиксированная) отмеченная компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, где $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ – канонический базис гомотопических классов петель из точки P_0 на F . Тогда первая фундаментальная группа $\pi_1(F)$ изоморфна отмеченной фуксовой группе Γ первого рода, инвариантно действующей на единичном диске $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и такой, что U – универсальная накрывающая для F и Γ – группа преобразований наложения для естественной проекции $\pi: U \rightarrow U/\Gamma = F$. Выбор

образующих в фундаментальной группе определяет специальный выбор образующих в группе

$$\Gamma = \left\langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod_{j=1}^g A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1} = 1 \right\rangle.$$

Обозначим через $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров (одномерных представлений) ρ из Γ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с естественной операцией умножения. Характер ρ на $\pi_1(F)$ называется *несущественным характером* на $\pi_1(F)$, если существует $c = (c_1, \dots, c_g) \in \mathbb{C}^g$ такой, что

$$\rho(a_j) = \exp(2\pi i c_j), \quad \rho(b_j) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^g \pi_{jk} c_k\right), \quad j = 1, \dots, g,$$

где $\Omega = (\pi_{jk})$ — матрица порядка g из b -периодов для канонического базиса $\zeta_1, \dots, \zeta_g$ голоморфных абелевых дифференциалов на F , двойственного с $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ (т.е. $\int_{a_k} \zeta_j = \delta_{jk}$, $\int_{b_k} \zeta_j = \pi_{jk}$, $j, k = 1, \dots, g$) [2, с. 129]. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. Характеры $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus L_g$ называются *существенными характерами* и имеют следующее представление:

$$\rho(a_j) = \exp(2\pi i c_j), \quad \rho(b_j) = \exp 2\pi i \left(\sum_{k=1}^g \pi_{jk} c_k + d_j \right), \quad j = 1, \dots, g,$$

где $c = (c_1, \dots, c_g) \in \mathbb{C}^g$, $d_j \in \mathbb{C}$ и $d_j \notin \mathbb{Z}$ для некоторого j , $j = 1, \dots, g$ [1].

Мультипликативной функцией f для ρ на F называется однозначная мероморфная функция f на U такая, что

$$f(Tz) = \rho(T)f(z), \quad z \in U, \quad T \in \Gamma.$$

Мероморфным (ρ, q) -дифференциалом Прима ϕ на F называется мероморфная однозначная дифференциальная q -форма $\phi = \phi(z) dz^q$ на U такая, что

$$\phi(Tz)(dTz)^q = \rho(T)\phi(z) dz^q, \quad z \in U, \quad T \in \Gamma.$$

Для любого дивизора D на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ и любого характера ρ определены следующие комплексные векторные пространства:

- $L_\rho(D)$, состоящее из мультипликативных мероморфных функций f на F для таких, что $(f) \geq D$,
- $\Omega_{\rho, q}(D)$, состоящее из мультипликативных мероморфных (ρ, q) -дифференциалов ϕ на F таких, что $(\phi) \geq D$.

Обозначим соответственно через

$$r_\rho(D) = \dim_{\mathbb{C}} L_\rho(D), \quad i_{\rho, q}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{\rho, q}(D)$$

размерности этих комплексных векторных пространств на F .

Обозначим через

$$\psi(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{j=1}^g \log \rho(B_j) e^{(j)} - \sum_{j=1}^g \log \rho(A_j) \pi^{(j)} \right)$$

в отмеченном многообразии Якоби $J(F)$, т.е. $\mathbb{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F)$, порожденной столбцами $e^{(1)}, \dots, e^{(g)}$ и $\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(g)}$ матрицы a -периодов и b -периодов для канонического базиса $\zeta_1, \dots, \zeta_g$ на F , где φ – отображение Якоби для F с базисной точкой P_0 . Отображение ψ переводит характер ρ в $\varphi((f))$, где f – некоторая мультипликативная функция для ρ . Известно, что ψ задает изоморфизм фактор-группы $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)/L_g$ на группу $J(F)$ [2, с. 134].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка P на компактной римановой поверхности F рода $g > 1$ называется *мультипликативной точкой Вейерштрасса* для существенного характера ρ , если в ней можно задавать единственный полюс мероморфной мультипликативной функции для ρ порядка, не превышающего $g - 1$.

2. Напомним некоторые свойства симметрических произведений компактной римановой поверхности F [2]. Для любого целого дивизора $D = P_1 \cdots P_n$ на F степени $n \geq 1$ зададим отображение Якоби $\varphi(D) = \varphi(P_1) + \cdots + \varphi(P_n)$ и положим $W_n = \varphi(F_n)$, где F_n – n -кратное симметрическое произведение поверхности F . Тогда

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{g-1} \subset W_g = J(F)$$

и для любого n , $1 \leq n \leq g$, W_n являются неприводимыми аналитическими множествами в $J(F)$ размерности n [2, с. 155].

ТЕОРЕМА 1. *Подмножества $W_k = \varphi(F_k)$, $1 \leq k \leq g - 1$, не инвариантны относительно сдвига на любой ненулевой элемент M в многообразии Якоби $J(F)$ компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, причем*

- 1) *пересечение $\{M + W_1\} \cap W_1$ состоит не более, чем из конечного числа точек;*
- 2) *каждой точке пересечения $\{M + W_k\} \cap W_k$, где $M = \psi(\rho)$, $1 \leq k \leq g - 1$, соответствует мультипликативная функция f для существенного характера ρ с дивизором $(f) = D_1/D_2$, $D_1, D_2 \in F_k$, удовлетворяющим условию $\psi(\rho) = \varphi(D_1/D_2)$ в $J(F)$;*
- 3) *все пересечение $\{\psi(\rho) + W_k\} \cap W_k$ можно отождествить с проективизацией пространства мероморфных мультипликативных функций f для существенного характера ρ на F , имеющих дивизоры $(f) = D_1/D_2$, $D_1, D_2 \in F_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $M \in J(F)$, $M \neq 0$, существует существенный характер ρ такой, что $M = \psi(\rho)$ в $J(F)$.

Пусть W_1 инвариантно относительно сдвига на $\psi(\rho)$, тогда для любой точки $P \in F$ верно

$$\psi(\rho) + \varphi(\rho) \in W_1 \setminus \{W_0 + \varphi(P)\}.$$

Таким образом, по теореме 4.1 [1] число $n_1 = 1$ – мультипликативный не пробел Вейерштрасса в P для ρ на F . Из неравенства $n_1 = 1 \leq g - 1$ следует, что P – мультипликативная точка Вейерштрасса для ρ на F . Но по теореме 3.3 [1] число мультипликативных

точек Вейерштрасса для ρ на F конечно. Противоречие. Утверждение для $k = 1$ доказано.

Пусть W_k , $1 < k \leq g - 1$, инвариантно относительно сдвига на $\psi(\rho) \neq 0$, тогда верно равенство $\psi(\rho) + W_k = W_k$. В частности, для любой точки $P \in F$ верно, что

$$\psi(\rho) + \varphi(P^k) = \psi(\rho) + k\varphi(P) \in W_k.$$

Отсюда, если $\psi(\rho) + k\varphi(P) \notin W_{k-1} + \varphi(P)$, то число k – мультипликативный не пробел Вейерштрасса в P для ρ , $k \leq g - 1$, а значит, P – мультипликативная точка Вейерштрасса для ρ на F . Если же $\psi(\rho) + k\varphi(P) \in W_{k-1} + \varphi(P)$, т.е. $\psi(\rho) + (k - 1)\varphi(P) \in W_{k-1}$, то существует j такое, что $1 \leq j < k \leq g - 1$ и выполняется условие

$$\psi(\rho) + j\varphi(P) \in W_j \setminus \{W_{j-1} + \varphi(P)\}.$$

Поэтому j – мультипликативный не пробел Вейерштрасса в P для ρ , и снова P – мультипликативная точка Вейерштрасса для ρ на F . По теореме 3.3 [1] таких точек на F конечное число. Противоречие. Утверждение доказано для всех k , $1 \leq k \leq g - 1$.

Докажем утверждения 2), 3). Если $\{\psi(\rho) + W_k\} \cap W_k \neq \emptyset$, то любая точка из $J(F)$, лежащая в этом пересечении, приводит к равенству $\psi(\rho) + \varphi(Q_1 \cdots Q_k) = \varphi(P_1 \cdots P_k)$ в $J(F)$. Отсюда

$$0 \neq \psi(\rho) = \varphi(D), \quad \text{где } D = P_1 \cdots P_k / Q_1 \cdots Q_k \neq 1,$$

и по теореме Абеля для характеров [2, с. 134] дивизор D будет дивизором мультипликативной функции f для ρ на F . Для другой точки этого пересечения также верно равенство $\varphi(D) = \psi(\rho) = \varphi(D')$, где $D' = P'_1 \cdots P'_k / Q'_1 \cdots Q'_k \neq 1$ – дивизор мультипликативной функции f' для ρ на F . Следовательно, дивизор D линейно эквивалентен D' на F . Функция f для ρ определяется по дивизору $D = D_1/D_2$ с точностью до умножения на ненулевую константу. Поэтому все пересечение $\{\psi(\rho) + W_k\} \cap W_k$ отождествляется с проективизацией пространства всех мероморфных мультипликативных функций f для ρ на F , имеющих дивизоры $(f) = D_1/D_2$, $D_1, D_2 \in F_k$. Теорема доказана.

Все дивизоры мероморфных дифференциалов Прима для фиксированного ρ на F линейно эквивалентны и составляют класс Z_ρ линейной эквивалентности дивизоров на F , который мы будем называть ρ -каноническим классом дивизоров на F . Пусть $|Z_\rho|$ – ρ -каноническая линейная система дивизоров на F , т.е. $|Z_\rho|$ содержит все дивизоры (ϕ) голоморфных дифференциалов Прима ϕ для ρ на F .

Также рассмотрим (q, ρ) -канонический класс Z_ρ^q дивизоров, состоящий из всех дивизоров мероморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима на F при $q > 1$, $q \in \mathbb{N}$. Пусть $|Z_\rho^q|$ – (q, ρ) -каноническая линейная система дивизоров на F , т.е. система, содержащая все дивизоры (ϕ) голоморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима ϕ на F .

В [1] доказано, что $|Z_\rho|$ может иметь базисные точки, а $|Z_\rho^q|$ не имеет базисных точек на F при $q > 1$ для любого характера ρ . Для существенного характера ρ , т.е. такого, что $\psi(\rho) \neq 0$, следующие условия эквивалентны:

- точка P является базисной точкой для $|Z_\rho|$;
- $i_\rho(P) = i_\rho(1)$;
- $r_{\rho^{-1}}(P^{-1}) = 1$;
- $n = 1$ является мультипликативным не пробелом Вейерштрасса в P для ρ^{-1} на F ;
- $-\psi(\rho) + \varphi(P) \in W_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ при любых $q > 1$, кроме случая $q = 2 = g$, и любом характере ρ (q, ρ) -каноническое отображение

$$\vartheta_{|Z_\rho^q|}: F \rightarrow \mathbf{P}^{(2q-1)(g-1)-1}$$

будет голоморфной инъекцией и изоморфизмом на свой образ, причем Z_ρ^q – очень обильный дивизор на F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.9 [1] получаем, что в $|Z_\rho^q|$ нет базисных точек при $g \geq 2$, $q > 1$. Теперь утверждение следует из предложения 4.20 [3, с. 163], если и только если для любых точек $P, Q \in F$ верно равенство

$$r(PQ/D) = r(1/D) - 2,$$

где $D \in |Z_\rho^q|$. Последнее равенство равносильно равенству $i(D/PQ) = i(D)$. При $g \geq 2$, $q > 1$, кроме случая $q = 2 = g$, это равенство имеет вид $i(D/PQ) = 0 = i(D)$, так как $q(2g - 2) - 2 > 2g - 2$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Имеется четыре канонических расслоения над

$$\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*),$$

у которых слой над $([\mu], \rho)$ есть Z_ρ , $|Z_\rho|$, Z_ρ^q и $|Z_\rho^q|$ соответственно на F_μ , где $\mathbf{T}_g$ – пространство Тейхмюллера компактных римановых поверхностей рода $g \geq 2$ и $q \geq 2$ [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Классические точки Вейерштрасса на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ являются нулями абелева голоморфного $(g(g+1)/2)$ -дифференциала на F [2], а мультипликативные точки Вейерштрасса для существенного характера ρ являются нулями голоморфного $(g(g-1)/2)$ -дифференциала Прима на F по теореме 4.10 [1]. Поэтому количество нулей с кратностью у таких дифференциалов будет различно. На “общей” компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ все классические точки Вейерштрасса являются нормальными, т.е. их вес равен единице. Таким образом, число различных классических точек Вейерштрасса на такой поверхности равно $N = g^3 - g \neq 0$. На этой же римановой поверхности число $N(\rho)$ мультипликативных точек Вейерштрасса для существенного характера ρ не превышает $(g-1)^2 g$ по теореме 4.10 [1]. Поэтому существуют нормальные классические точки Вейерштрасса, не являющиеся мультипликативными точками Вейерштрасса ни для какого существенно-го характера ρ на “общей” компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$. Число $N - N(\rho)$ не меньше числа $2g(g-1) \neq 0$ при $g \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При любом характере ρ каждый конформный автоморфизм h на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ задает биекцию множества мультипликативных точек Вейерштрасса для ρ на себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для несущественного характера ρ и, в частности, для $\rho = 1$ это утверждение является классическим фактом, как замечено в [1, § 2] и в [2].

Пусть P_0 – мультипликативная точка Вейерштрасса для существенного характера ρ на F . Тогда существует мультипликативная функция f для ρ с единственным полюсом в P_0 порядка j , $1 \leq j \leq g-1$. Автоморфизм h осуществляет голоморфную биекцию окрестности $U(P_0)$ точки P_0 на $U(h(P_0))$. Мультипликативная функция $g = fh^{-1}$

на F имеет единственный полюс в $h(P_0)$ порядка j , так как локальные параметры в P_0 и в $h(P_0)$ можно выбрать одинаковыми. А также, из $f(P) \mid a = \rho(a)f(P)$ следует, что

$$fh^{-1}(Q) \mid a' = \rho(a)fh^{-1}(Q),$$

где a – петля из точки P_0 , $P \in U(P_0)$, $a' = lal^{-1}$ и l – кривая из точки P_0 в точку $h(P_0)$, $Q = h(P)$. Следовательно, $h(P_0)$ – тоже мультипликативная точка Вейерштрасса для того же существенного характера ρ на F . Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 4. *На компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ множество голоморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима с простыми нулями является:*

- 1) *плотным и открытым подмножеством в $\Omega_{\rho, q}(1)$ – при несущественном характере ρ и $q \geq 1$ или при существенном характере ρ и $q \geq 2$;*
- 2) *открытым подмножеством в $\Omega_{\rho}(1)$ – при существенном характере ρ и $q = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $d = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{\rho, q}(1)$. Возьмем ω_1 – любой нетривиальный голоморфный (ρ, q) -дифференциал Прима на F и рассмотрим его произвольную окрестность $U(\omega_1)$. Построим голоморфный (ρ, q) -дифференциал Прима ω_2 , который не имеет общих нулей с ω_1 .

Если ρ – несущественный характер и $q \geq 1$, то, как в [2, с. 98–99], существуют голоморфные абелевы q -дифференциалы $\tilde{\omega}_1 = \omega_1/f_0$ и $\tilde{\omega}_2$ без общих нулей на F . Отсюда, $\omega_2 = f_0\tilde{\omega}_2$ – искомым голоморфный (ρ, q) -дифференциал Прима на F , где f_0 -функция без нулей и полюсов на F для ρ .

При существенном характере ρ и $q \geq 2$ построим голоморфный (ρ, q) -дифференциал Прима ω_2 в виде $\omega_2 = \omega_0 f_2$, где ω_0 – некоторый голоморфный абелев q -дифференциал на F , f_2 -мультипликативная функция для ρ на F такая, что $(\omega_0) = (f_2)_{\infty}$ и $\varphi((f_2)_0) = -2Kq + \psi(\rho)$. Здесь $(f_2) = (f_2)_0/(f_2)_{\infty}$, $\varphi((\omega_0)) = -2Kq$ и K – вектор-констант Римана для F [1], [2]. Для дивизора $(\omega_1) = Q_1 \cdots Q_m$, $m = q(2g - 2)$, выберем дивизор $D = P_{g+1} \cdots P_m$ из попарно различных точек такой, что объединение достаточно малых замкнутых окрестностей $\overline{U(P_{g+1})}, \dots, \overline{U(P_m)}$ не содержит точек $Q_1, \dots, Q_m$ и

$$-2Kq + \psi(\rho) - \varphi(D_1) \notin W_g^1 \subset J(F)$$

для любого дивизора D_1 из симметрического произведения этих окрестностей [2]. Это возможно, так как $m - g \geq g$ при $g \geq 2$, $q \geq 2$, а множество W_g^1 имеет размерность, не превышающую $g - 2$ [2]. Пусть $D' = P_1 \cdots P_g$ есть единственное решение проблемы обращения Якоби

$$\varphi(D') = -2Kq + \psi(\rho) - \varphi(D)$$

при выбранном дивизоре D . Если дивизор D' имеет s , $1 \leq s \leq g$, (правых) точек, совпадающих с точками $Q_1, \dots, Q_m$, то выберем вместо этих s точек точки $P'_1, \dots, P'_s$, близкие к $P_1 = Q_1, \dots, P_s = Q_s$ и отличные от Q_j , $j = 1, \dots, m$. В силу гомеоморфности отображения Якоби φ вне множества F_g^1 , где $\varphi(F_g^1) = W_g^1$ [2], и того, что $m - g \geq g$ при $g \geq 2$, $q \geq 2$, для дивизора $D'_1 = P'_1 \cdots P'_s P_{s+1} \cdots P_g$ существует соответствующий ему единственный дивизор D_1 , не содержащий точек $Q_1, \dots, Q_m$. Следовательно, $\omega_2 = \omega_0 f_2$, где $(f_2)_0 = D'_1 D_1$ – искомым голоморфный (ρ, q) -дифференциал Прима на F , не имеющий общих нулей с (ω_1) .

Такой дифференциал ω_2 можно выбрать другим более классическим способом. Покажем, что для любой точки Q подпространство $\Omega_{\rho,q}(Q)$ имеет коразмерность 1 в $\Omega_{\rho,q}(1)$. По теореме Римана–Роха для характеров [2], [1] имеем равенства

$$i_{\rho,q}(Q) = (2q - 1)(g - 1) - 1 + i((f)Z^q/Q) = i_{\rho,q}(1) - 1,$$

где f – любая мультипликативная функция на F для существенного характера ρ , так как $q(2g - 2) - 1 > 2g - 2$ в условиях теоремы. Поэтому ω_2 можно выбрать из дополнения к объединению подпространств $\Omega_{\rho,q}(Q_j)$, $j = 1, \dots, m$, в пространстве $\Omega_{\rho,q}(1)$.

Затем $f = \omega_1/\omega_2$ есть непостоянная однозначная мероморфная функция на F степени $q(2g - 2)$. Пусть α – комплексное число, не являющееся значением в точке ветвления функции f . Такое α существует, так как точек ветвления у f конечное число. Поэтому функция f принимает значение α в $q(2g - 2)$ различных точках. Эти точки должны быть всеми нулями дифференциала $\omega_1 - \alpha\omega_2$, и все они будут простыми нулями, так как степень $\omega_1 - \alpha\omega_2$ есть $q(2g - 2)$. Это показывает, что множество всех (ρ, q) -дифференциалов с простыми нулями является полным в $\Omega_{\rho,q}(1)$, поскольку в произвольной окрестности $U(\omega_1)$ любого голоморфного (ρ, q) -дифференциала ω_1 существует “близкий” (при малом α) дифференциал $\omega_1 - \alpha\omega_2$ с простыми нулями.

Покажем, что множество голоморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима с простыми нулями будет открыто в $\Omega_{\rho,q}(1)$ при $q \geq 1$. Пусть ω будет (ρ, q) -дифференциал Прима с простыми нулями в $P_1, \dots, P_{q(2g-2)}$ и $\omega_1, \dots, \omega_d$ – базис в $\Omega_{\rho,q}(1)$. Выберем непересекающиеся малые диски D_j с центрами в P_j , $j = 1, \dots, q(2g - 2)$, такие, чтобы замыкание D_j лежало в области с локальной координатой z_j , $z_j(P_j) = 0$, $j = 1, \dots, q(2g - 2)$. В таких координатах имеем $\omega = \phi_j(z_j)dz_j^q$ и $\omega_k = \phi_{kj}(z_j)dz_j^q$. Наше предположение о простых нулях для ω дает, что $\phi_j(0) = 0$ и ϕ_j не равно нулю на $\gamma_j = \partial D_j$ для всех j . Следовательно, $|\phi_j(z_j)|$ имеет минимум $m_j > 0$ на γ_j для любого j . Также пусть m_{kj} будет максимум $|\phi_{kj}(z_j)|$ на γ_j . Выберем ε такое, что $\varepsilon \sum_{k=1}^d m_{kj} < m_j$ для всех $j = 1, \dots, q(2g - 2)$. Тогда для любых комплексных чисел $\eta_1, \dots, \eta_d$ таких, что $|\eta_k| < \varepsilon$, $k = 1, \dots, d$, по теореме Руше (ρ, q) -дифференциал Прима $\theta = \omega + \sum_{k=1}^d \eta_k \omega_k$ имеет один простой нуль внутри каждого D_j , $j = 1, \dots, q(2g - 2)$, так как на γ_j верно неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^d \eta_k \phi_{kj}(z_j) \right| \leq \sum_{k=1}^d |\eta_k| m_{kj} < \varepsilon \sum_{k=1}^d m_{kj} < m_j, \quad j = 1, \dots, q(2g - 2).$$

Эти нули, их всего $q(2g - 2)$, суть все нули θ , и каждый из этих нулей является простым. Ясно, что $\theta = \omega + \sum_{k=1}^d \eta_k \omega_k$ заполняют окрестность точки ω в множестве голоморфных (ρ, q) -дифференциалов с простыми нулями. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $q = 1$, $g \geq 2$ и существенном характере ρ имеет место следующее утверждение: если $(\omega_1) = Q_1 \cdots Q_m$, $m = 2g - 2$, не содержит мультипликативных точек Вейерштрасса для ρ , то все подпространства $\Omega_{\rho}(Q_k)$, $k = 1, \dots, m$, имеют коразмерность 1 в $\Omega_{\rho}(1)$. Поэтому искомым голоморфный дифференциал Прима ω_2 для ρ можно выбрать из дополнения к объединению этих подпространств в $\Omega_{\rho}(1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чуешев В. В., Якубов Э. Х. Мультипликативные точки Вейерштрасса на компактных римановых поверхностях // Сиб. матем. ж. 2002. Т. 43. № 6.
- [2] Farkas H. M., Kra I. Riemann Surfaces. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [3] Miranda R. Algebraic curves and Riemann surfaces. Graduate Studies in Mathematics. V. 5. New York: Amer. Math. Soc., 1995.
- [4] Чуешев В. В. Векторные расслоение Прима и расслоение Ганнинга над пространством Тейхмюллера // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 4. С. 937–951.

Кемеровский государственный университет
E-mail: chueshev@lanserv1.kemsu.ru

Поступило
24.09.2002