Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ш. Цагарейшвили, О структуре класса $A(\varphi)$, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 296–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:41:13

УДК 517.521

О СТРУКТУРЕ КЛАССА $A(\varphi)$

В. Цагарейшвили

В работе решаются вопросы о замкнутости множества $A(\varphi)$ относительно произведения $f \cdot g$, где f и g принадлежат классу $A(\varphi)$. Также изучается вопрос о решении уравнения $Bx = C$ (где $B, C \in A(\varphi)$ и $B \neq 0$) на множестве $A(\varphi)$.

Библиография: 6 названий.

1. Вспомогательные утверждения и обозначения

Пусть (φ_n) – ортонормированная на $[0, 1]$ и полная в $L_2(0, 1)$ система. Через

$$c_n(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (A)$$

обозначаются коэффициенты Фурье функции $f \in L(0, 1)$.

Обозначим через $A(\varphi)$ класс всех функций f , для которых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|.$$

Класс $A(\varphi)$ является пространством Банаха с нормой

$$\|f\|_A = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|.$$

Вопросы замкнутости относительно умножения функций класса $A(\varphi)$ хорошо известны для конкретных ортогональных систем. Для тригонометрической системы T замкнутость класса $A(T)$ относительно умножения функции легко доказывается (см., например, [1]). Обобщение задачи о замкнутости множества $A(T)$ относительно умножения функций рассматривается в работе Ульянова [2]. Ему же принадлежит решение аналогичной задачи относительно системы Хаара (см., например, [3]). Именно, справедлива

ТЕОРЕМА I. *Если f и g ограничены и принадлежат классу $A(\chi)$, где χ – система Хаара, то $f \cdot g \in A(\chi)$.*

Для изучения вопроса о решении уравнения

$$Bx = C$$

в пространстве $A(\varphi)$, где $B \in A(\varphi)$, $B(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$, и $C \in A(\varphi)$, является важным результатом Винера–Леви (см. [1]).

ТЕОРЕМА II. Если функция $f \in A(T)$ и если f нигде не обращается в нуль, то $1/f \in A(T)$, где T – тригонометрическая система.

Наконец, для произвольных полных в $L_2(0, 1)$ ортонормированных систем можно поставить такие задачи:

- 1) для каких ортонормированных систем замкнуты относительно умножения функции пространства $A(\varphi)$;
- 2) для каких ортонормированных систем имеет решение уравнение

$$Bx = C, \quad B, C \in A(\varphi), \quad B \neq 0,$$

в пространстве $A(\varphi)$.

Пусть множество $E \subset D$, $|E| > 0$, где D – k -мерный единичный куб. При $0 < p < 2$ имеем¹

$$\int_E \left| \sum_{n=e}^{\infty} a_n r_n(x) \right|^p dx \geq C_p \left(\sum_{n=q}^{\infty} a_n^2 \right)^{p/2}. \quad (B)$$

Здесь e есть k -мерный единичный вектор. Вместе с этим $n = (n_1; n_2; \dots; n_k)$, $q = (q_1; q_2; \dots; q_k)$ и q зависит лишь от E ; функция $r_n(x) = r_{n_1}(x_1) \cdot r_{n_2}(x_2) \dots r_{n_k}(x_k)$, где $r_{n_m}(x_m)$ суть функции Радемахера (см. [5]).

1.1. Замкнутость.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (φ_n) – ортонормированная на $[0, 1]$ и полная в $L_2(0, 1)$ система функций. Рассмотрим выражение

$$A_{mn} = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_m(x) \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right|.$$

Для того, чтобы из условий $f \in A(\varphi)$ и $g \in A(\varphi)$ следовало

$$f \cdot g \in A(\varphi),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_{mn} < M, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где M не зависит от m и n . В этом случае

$$\|f \cdot g\|_A \leq K \|f\|_A \|g\|_A, \quad \text{где} \quad K = \sup_{m,n} A_{mn}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $f \in A(\varphi)$ и $g \in A(\varphi)$, тогда почти всюду на $[0, 1]$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(f) \varphi_m(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) \varphi_n(x).$$

¹Неравенство (B) доказывается при помощи неравенства Хинчина–Минковского с использованием метода Бочкарева из работы [4].

Поэтому п.в. на $[0, 1]$

$$f(x)g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m(f)c_n(g)\varphi_m(x)\varphi_n(x). \quad (2)$$

Из (2) имеем

$$f(x)g(x)\varphi_s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m(f)c_n(g)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\varphi_s(x). \quad (3)$$

В силу полноты в $L_2(0, 1)$ системы (φ_n) и равенства Парсеваля получаем (см. (1))

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\varphi_n(x)\varphi_m(x))^2 dx &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\varphi_s(x) dx \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\varphi_s(x) dx \right| \right)^2 = A_{mn}^2 < M^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя (4), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_m(f)| |c_n(g)| \int_0^1 |\varphi_m(x)\varphi_n(x)\varphi_s(x)| dx \\ \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_m(f)| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)| \left(\int_0^1 \varphi_s^2(x) \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 (\varphi_n(x)\varphi_m(x))^2 dx \right)^{1/2} \\ \leq M \sum_{m=1}^{\infty} |c_m(f)| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)| < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, можно проинтегрировать (3) и получить

$$c_s(f \cdot g) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m(f)c_n(g) \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\varphi_s(x) dx. \quad (5)$$

Наконец, из (5) и (1) следует

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} |c_s(f \cdot g)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_m(f)| |c_n(g)| \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_m(x)\varphi_s(x) dx \right| \\ &= \|f\|_A \cdot \|g\|_A \cdot A_{mn} < \|f\|_A \cdot \|g\|_A \cdot M. \end{aligned}$$

Таким образом, $f \cdot g \in A(\varphi)$ и

$$\|f \cdot g\|_A \leq M \|f\|_A \cdot \|g\|_A.$$

Необходимость. Рассмотрим несколько случаев.

I) Пусть для некоторых m_0 и n_0

$$A_{m_0 n_0} = +\infty.$$

Поэтому (см. (A))

$$\sum_{s=1}^{\infty} |c_s(\varphi_{m_0} \cdot \varphi_{n_0})| = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_{m_0}(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x) dx \right| = A_{m_0 n_0} = +\infty.$$

Так как $\varphi_{m_0} \in A(\varphi)$, $\varphi_{n_0} \in A(\varphi)$ и $\varphi_{m_0} \cdot \varphi_{n_0} \notin A(\varphi)$, то в этом случае справедливость теоремы 1 очевидна.

II) Предположим, что

$$\overline{\lim}_{m,n} A_{mn} = +\infty$$

и для некоторого числа s_0

$$\overline{\lim}_{m,n} \sum_{s=1}^{s_0} \left| \int_0^1 \varphi_m(x) \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right| = +\infty.$$

Тогда существуют последовательности (m_k) , (n_k) и число s_1 такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 \varphi_{m_k}(x) \varphi_{n_k}(x) \varphi_{s_1}(x) dx \right| = +\infty. \quad (6)$$

Предположив $A_{mn} < \infty$ из (4), имеем

$$\int_0^1 (\varphi_{n_k}(x) \varphi_{s_1}(x))^2 dx \leq A_{n_k s_1}^2 < \infty. \quad (7)$$

Рассмотрим последовательность функционалов

$$G_k(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_{n_k}(x) \varphi_{s_1}(x) dx, \quad (8)$$

где $f \in A(\varphi)$.

В силу неравенства Гёльдера и (7) имеем

$$\begin{aligned} |G_k(f)| &\leq \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (\varphi_{n_k}(x) \varphi_{s_1}(x))^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L_2} \cdot A_{n_k s_1} \leq \|f\|_A A_{n_k s_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, линейные функционалы (8) непрерывны на $A(\varphi)$.

Теперь рассмотрим последовательность функции (φ_{m_k}) из $A(\varphi)$. Согласно (8), (7) и (6) имеем

$$|G_k(\varphi_{m_k})| = \left| \int_0^1 \varphi_{m_k} \varphi_{n_k} \varphi_{s_1}(d) dx \right| \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |G_k(\varphi_{m_k})| = +\infty.$$

Так как $\|\varphi_{m_k}\|_A = 1$, то в силу теоремы Банаха–Штейнгауза существует функция $f_0 \in A(\varphi)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |G_k(f_0)| = +\infty.$$

Отсюда имеем

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |C_{n_k}(f_0 \cdot \varphi_{s_1})| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |G_k(f_0)| = +\infty,$$

при $f_0 \in A(\varphi)$ и $\varphi_{s_1} \in A(\varphi)$. Теорема 1 и в этом случае доказана.

III) Пусть $\overline{\lim}_{m,n} A_{mn} = +\infty$. Тогда существуют последовательности $m_k \uparrow \infty$ и $n_k \uparrow \infty$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m_k n_k} = +\infty.$$

Пусть M_l выбраны так, чтобы

$$\sum_{s=M_{l-1}+1}^{M_l} \left| \int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_l}}(x) \varphi_s(x) dx \right| > l^4, \quad l = 1, 2, \dots, \quad M_l \uparrow \infty. \quad (9)$$

Рассмотрим функции

$$f_t(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \varphi_{m_{k_l}}(x) r_l(t) \quad \text{и} \quad g_u(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \varphi_{n_{k_p}}(x) r_p(u),$$

где (r_l) – система Радемахера. Ясно, что $f_t \in A(\varphi)$ и $g_u \in A(\varphi)$ для любых $t \in [0, 1]$ и $u \in [0, 1]$. Далее,

$$f_t(x) g_u(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \frac{1}{p^2} \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_p}}(x) r_l(t) r_p(u).$$

Отсюда

$$f_t(x) g_u(x) \varphi_s(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{l^2 p^2} \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_p}}(x) \varphi_s(x) r_l(t) r_p(u). \quad (10)$$

Так как $A_{mn} < \infty$ и

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |\varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_p}}(x) \varphi_s(x) dx| \\ & \leq \left(\int_0^1 \varphi_s^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (\varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_p}}(x))^2 dx \right)^{1/2} < A_{mn}, \end{aligned}$$

то из (10) получаем

$$\begin{aligned} c_s(f_t \cdot g_u) &= \int_0^1 f_t(x) g_u(x) \varphi_s(x) dx \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{l^2 p^2} \int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_p}}(x) \varphi_s(x) dx r_l(f) r_p(u). \end{aligned}$$

Отсюда, если $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$ – любое множество положительной меры, то, используя неравенство Хинчина (см. (B)), получаем

$$\begin{aligned} \iint_E |c_s(f_t \cdot g_u)| dt du &\geq A(E) \left(\sum_{l=q}^{\infty} \sum_{p=q}^{\infty} \frac{1}{l^4 p^4} \left(\int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_p}}(x) \varphi_s(x) dx \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{A(E)}{l^4} \left| \int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_l}}(x) \varphi_s(x) dx \right|, \end{aligned} \quad (11)$$

где $l > q > 0$ – любое целое число, $M_{l-1} < s \leq M_l$ и $A(E) > 0$ зависит лишь от E , как и число q .

Наконец, из (11) и (9) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{s=M_{l-1}+1}^{M_l} \iint_E |c_s(f_t \cdot g_u)| dt du \\ & \geq \frac{A(E)}{l^4} \sum_{s=M_{l-1}+1}^{M_l} \left| \int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_{k_l}}(x) \varphi_s(x) dx \right| \geq A(E) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \iint_E |c_s(f_t \cdot g_u)| dt du = +\infty.$$

Таким образом, для некоторых $t \in [0, 1]$ и $u \in [0, 1]$ имеем $f_t \cdot g_u \notin A(\varphi)$. Теорема 1 в случае III доказана.

IV) Пусть для некоторого числа n_0

$$\overline{\lim}_m A_{mn_0} = +\infty.$$

Тогда существует последовательность натуральных чисел (m_k) такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m_k n_0} = +\infty. \quad (12)$$

Положим, что

$$f_t(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \varphi_{m_{k_p}}(x) r_p(t),$$

где $r_p(t)$ – функции Радемахера.

Из (12) следует, что для некоторой последовательности (M_l) имеет место неравенство (см. (9))

$$\sum_{s=M_{l-1}+1}^{M_l} \left| \int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x) dx \right| > l^2. \quad (13)$$

Далее, имеем

$$f_t(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \varphi_{m_{k_p}}(x) \varphi_{n_0}(x) r_p(x). \quad (14)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x)| dx & \leq \left(\int_0^1 \varphi_s^2(d) dx \right)^{1/2} \\ & \times \left(\int_0^1 (\varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_0}(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq A_{k_l n_0} < \infty, \end{aligned}$$

то из (14) получаем

$$c_s(f_t \varphi_{n_0}) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^1 \varphi_{m_{k_p}}(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x) dx r_p(t).$$

Отсюда, если $E \subset [0, 1]$ – любое множество ($|E| > 0$), то (см. (B))

$$\begin{aligned} \int_E |c_s(f_t \varphi_{n_0})| dt &\geq A(E) \left(\sum_{p=q}^{\infty} \frac{1}{p^4} \left(\int_0^1 \varphi_{m_{k_p}}(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x) dx \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{A(E)}{l^2} \left| \int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x) dx \right|, \end{aligned}$$

где $l > q > 0$ – любое число и $M_{l-1} < s < M_l$. Следовательно (см. (13)),

$$\begin{aligned} \sum_{s=M_{l-1}+1}^{M_l} \int_E |c_s(f_t \varphi_{n_0})| dt &\geq \frac{A(E)}{l^2} \sum_{s=M_{l-1}+1}^{M_l} \left| \int_0^1 \varphi_{m_{k_l}}(x) \varphi_{n_0}(x) \varphi_s(x) dx \right| \\ &\geq \frac{A(E)}{l^2} \cdot l^2 = A(E) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \int_E |c_s(f_t \varphi_{n_0})| dt = +\infty.$$

Таким образом, с одной стороны, имеем $f_t \in A(\varphi)$ (для любого $t \in [0, 1]$) и $\varphi_{n_0} \in A(\varphi)$. С другой стороны, для некоторых $t \in [0, 1]$ следует

$$\sum_{s=1}^{\infty} |c_s(f_t \varphi_{n_0})| = +\infty,$$

т.е. $f_t \cdot \varphi_{n_0} \notin A(\varphi)$. Теорема полностью доказана.

1.2. Вопросы эффективности. Если (φ_n) – тригонометрическая система или система Уолша, тогда

$$A_{mn} = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_m(x) \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right| < 1.$$

Для системы Хаара

$$\overline{\lim}_{m,n} A_{mn} = +\infty.$$

В самом деле,

$$\int_0^1 \chi_n^{(1)}(x) \chi_n^{(1)}(x) \chi_{n-1}^{(1)}(x) dx = 2^n \int_0^{2^{-n}} \chi_{n-1}^{(1)}(x) dx = 2^{(n-1)/2}.$$

Таким образом,

$$A_{2^n+1, 2^n+1} \geq 2^{(n-1)/2}.$$

Следовательно, если χ – система Хаара, то $A(\chi)$ не замкнуто относительно умножения функций из $A(\chi)$.

2. Решение уравнения $Bx = C$

Пусть $B \in A(\varphi)$ и $C \in A(\varphi)$, причем $B(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$. Введем обозначение

$$B_k(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{1}{f(t)} \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt \right|,$$

где $f \in L(0, 1)$ – любая функция такая, что $f(t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы уравнение*

$$Bx = C \tag{15}$$

имело решение в $A(\varphi)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in A(\varphi)$, $f \neq 0$, имело место неравенство

$$B_k(f) < M(f), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $M(f) > 0$ не зависит от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $C(t) \in A(\varphi)$ и $B(t) \in A(\varphi)$, $B(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$. Тогда п.в. на $[0, 1]$

$$C(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(C) \varphi_k(t), \tag{16}$$

где

$$b_k(C) = \int_0^1 C(t) \varphi_k(t) dt.$$

Из (15) следует, что

$$x(t) = \frac{C(t)}{B(t)}.$$

Поэтому из (16) получаем

$$x(t) = \frac{C(t)}{B(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(C) \frac{1}{B(t)} \varphi_k(t). \tag{17}$$

В силу полноты системы (φ_n) , применяя неравенство Парсеваля и неравенство $B_k(f) < M(f)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{f(t)} \varphi_m(t) \right)^2 dt &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)} \varphi_m(t) \varphi_s(t) dt \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{1}{f(t)} \varphi_m(t) \varphi_s(t) dt \right| \right)^2 \leq B_m^2(f) < M^2(f). \end{aligned} \tag{18}$$

Используя (18), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(C)| \left| \int_0^1 \frac{1}{B(t)} \varphi_k(t) \varphi_s(t) dt \right| \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(C)| \left(\int_0^1 \varphi_s^2(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{B(t)} \varphi_k(t) \right)^2 dt \right)^{1/2} \leq M(B) \|C\|_A. \end{aligned} \tag{19}$$

Из (17) имеем

$$x(t)\varphi_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(c) \frac{1}{B(t)} \varphi_k(t)\varphi_m(t).$$

Поэтому, учитывая (19), получим

$$b_m(x) = \int_0^1 x(t)\varphi_m(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(C) \int_0^1 \frac{1}{B(t)} \varphi_k(t)\varphi_m(t) dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |b_m(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(C)| \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{1}{B(t)} \varphi_k(t)\varphi_m(t) dt \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(C)| |B_k(B)| \leq M(B) \|C\|_A. \end{aligned}$$

Достаточность теоремы доказана.

Необходимость. Пусть для некоторой функции $B_0 \in A(\varphi)$ и $B_0(t) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{B_k(B_0)} = +\infty.$$

Поэтому для некоторой подпоследовательности $k_n \uparrow \infty$ имеется, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{k_n}(B_0) = +\infty.$$

Следовательно, существует последовательность $N_l \uparrow \infty$ такая, что

$$\sum_{m=N_{l-1}+1}^{N_l} \left| \int_0^1 \frac{1}{B_0(t)} \varphi_{k_{n_l}}(t)\varphi_m(t) dt \right| > l^2, \quad l = 1, 2, \dots$$

Предположим, что

$$C_x(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \varphi_{k_{n_l}}(t)r_l(x).$$

Очевидно, что $C_x \in A(\varphi)$ для любого $x \in [0, 1]$.

Рассмотрим уравнение

$$B_0(t) \cdot X(t) = C_x(t).$$

Отсюда

$$X_x(t) = \frac{C_x(t)}{B_0(t)}.$$

Тогда

$$X_x(t)\varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \frac{1}{B_0(t)} \varphi_{k_{n_l}}(t)r_l(x).$$

Так как (см. (18))

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{B_0(t)} \varphi_{k_{n_l}} \right)^2 \leq B_{k_{n_l}}^2(f) < \infty,$$

то

$$b_k(X_x) = \int_0^1 X_x(t) \varphi_k(t) dt = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \int_0^1 \frac{1}{B_0(t)} \varphi_{k_{n_l}}(t) \varphi_k(t) dt r_l(x).$$

Пусть $F \subset [0, 1]$ – любое множество и $|F| > 0$, тогда (см. (B))

$$\begin{aligned} \int_F |b_k(X_x)| dx &\geq A(F) \left(\sum_{l=q}^{\infty} \frac{1}{l^4} \left(\int_0^1 \frac{1}{B_0(t)} \varphi_{k_{n_l}}(t) \varphi_k(t) dt \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\geq A(F) \cdot \frac{1}{l^2} \left| \int_0^1 \frac{1}{B_0(t)} \varphi_{k_{n_l}}(t) \varphi_k(t) dt \right|, \end{aligned}$$

где $N_{l-1} < k < N_l$, $A(F) > 0$ не зависит от k и $l > q > 0$ – любое целое число.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_F |b_k(X_x)| dx &\geq A(F) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=N_{l-1}+1}^{N_l} \frac{1}{l^2} \left| \int_0^1 \frac{1}{B_0(t)} \varphi_{k_{n_l}}(t) \varphi_k(t) dt \right| \\ &\geq A(F) \sum_{l=q}^{\infty} \frac{1}{l^2} l^2 = +\infty, \end{aligned}$$

т.е. для п.в. $x \in [0, 1]$ $X_x \notin A(\varphi)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $B_{k_0}(B_0) = +\infty$ для некоторого k_0 , то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{\varphi_{k_0}(t)}{B_0(t)} \varphi_m(t) dt \right| = \sum_{m=1}^{\infty} \left| b_m \left(\frac{\varphi_{k_0}}{B_0} \right) \right| = B_{k_0}(B_0) = +\infty.$$

Отсюда следует, что уравнение (при $B_0 \in A(\varphi)$ и $\varphi_{k_0} \in A(\varphi)$)

$$B_0 \cdot X = \varphi_{k_0}$$

не имеет решения в $A(\varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу теоремы II для тригонометрической системы

$$B_k(f) < M(f), \quad k = 1, 2, \dots,$$

для любой функции $f \in A(\varphi)$, $f \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае системы Хаара

$$\overline{\lim}_k B_k(B) = +\infty$$

для некоторой функции $B \in A(\chi)$.

В самом деле, положим

$$B(t) = \begin{cases} t^{1/2} & \text{при } t \in (0, 1], \\ 1 & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\int_0^1 |B'(t)| dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2} dt = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Значит, B есть функция с конечным изменением. Поэтому (см. [6])

$$B(t) \in A(\chi).$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 \chi_n^{(1)}(t) \chi_n^{(1)}(t) \cdot B^{-1}(t) dt = 2^n \int_0^{2^{-n}} t^{-1/2} dt = 2^{n/2+1}.$$

Следовательно,

$$B_{2^n+1}(B) > 2^{n/2} \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_{2^n+1}(B) = +\infty.$$

Таким образом, при $B \in A(\chi)$ и $C \in A(\chi)$ уравнение $BX = C$ не имеет решения в пространстве $A(\chi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теореме 2 нельзя опустить условие $f \in A(\varphi)$ при $B_k(f) < M(f)$. В самом деле, пусть (φ_n) – ортонормированная система, полная в $L_2(0, 1)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_n(x) dx \right| = +\infty.$$

Тогда $1 \notin A(\varphi)$, но

$$B_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{1}{1} \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx \right| = 1.$$

Теперь, если $B(x) \in A(\varphi)$ – некоторая функция ($B \neq 0$), то уравнение

$$B(x)X(x) = B(x)$$

не имеет решения в $A(\varphi)$, так как $1 \notin A(\varphi)$.

3. Критерии абсолютной сходимости

Пусть (φ_n) – ортонормированная на $[0, 1]$ и полная в $L_2(0, 1)$ система функций. Рассмотрим выражение

$$K_n(f, g) = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right|,$$

где $f \neq 0$ и $g \neq 0$ при $x \in [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы имело место условие*

$$f \in A(\varphi),$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $g \in A(\varphi)$ соблюдалось неравенство

$$K_n(f, g) < M(f, g), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $M(f, g)$ не зависит от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $g \in A(\varphi)$, тогда

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) \varphi_n(x)$$

п.в. на $[0, 1]$, где

$$c_n(g) = \int_0^1 g(x) \varphi_n(x) dx.$$

Так как

$$f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) \varphi_n(x) f(x),$$

то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x).$$

Следовательно,

$$f(x) \varphi_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x). \quad (20)$$

В силу полноты (φ_n)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \right)^2 dx &\leq \sum_{s=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right| \right)^2 \\ &= K_n^2(f, g) \leq M^2(f, g). \end{aligned}$$

Стало быть, функция (20) интегрируема потому, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)| \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x) \right| dx \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)| \left(\int_0^1 \left(\frac{f(x)}{g(x)} \varphi_s(x) \right)^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \varphi_n^2 dx \right)^{1/2} \\ \leq M(f, g) \|g\|_A. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$c_s(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g) \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} |c_s(f)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)| \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n(g)| \cdot K_n(f, g) \leq M(f, g) \|g\|_A. \end{aligned}$$

Следовательно, $f \in A(\varphi)$ и $\|f\|_A \leq M(f, g)\|g\|_A$.

Необходимость. Пусть для некоторой функции f_0 , $f_0 \neq 0$, и для любого $g \in A(\varphi)$ имеем

$$\overline{\lim}_n K_n(f_0, g) = +\infty. \quad (21)$$

Допустим противное и предположим, что $f_0 \in A(\varphi)$. Так как $g \in A(\varphi)$ – любая функция и $f_0 \neq 0$, то в качестве g мы можем взять функцию f_0 .

Таким образом, при $f_0 \in A(\varphi)$ имеем

$$K_n(f_0, f_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \frac{f_0(x)}{f_0(x)} \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right| = \sum_{s=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_s(x) dx \right| = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K_n(f_0, f_0) = 1,$$

что и противоречит условию (21). Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. П. Кахан, *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье*, Мир, М., 1976.
- [2] П. Л. Ульянов, “Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **322**:2 (1992), 253–258.
- [3] В. Бугадзе, *Ряды Фурье–Хаара суперпозиций функций*, Тбилиси, 1988.
- [4] С. В. Бочкарев, “Абсолютная сходимость рядов Фурье относительно общих ортогональных полных систем”, *УМН*, **27**:1 (1972), 53–76.
- [5] В. Цагарейшвили, *Классы функции и коэффициенты Фурье*, Докторская диссертация, Тбилиси, 2004.
- [6] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.

В. Цагарейшвили

Тбилисский государственный университет

Поступило

23.12.2004