Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белов, Е. И. Смирнова, Локализованные асимптотические решения уравнения самосогласованного поля, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 309–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:16:01

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

В. В. Белов, Е. И. Смирнова

В работе исследуется формальная асимптотика при $h \rightarrow 0$ уравнения самосогласованного поля

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_\kappa[\Psi]\Psi + O(h^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \Psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}_x^n), \quad (1)$$

$$\hat{H}_\kappa[\Psi] = -\frac{h^2}{2}\Delta + \kappa \int_{\mathbb{R}^n} V(\vec{x} - \vec{y})|\Psi(\vec{y}, t)|^2 d\vec{y}, \quad (2)$$

играющего фундаментальную роль в квантовой теории и нелинейной оптике; в частности, в теории бозе-эйнштейновского конденсата [1] и при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках [2]. В предположении, что трансляционно инвариантный потенциал самодействия $V(\tau)$ – гладкая функция, растущая на бесконечности вместе со своими производными не быстрее, чем $C_0 e^{|\tau|}$, $C_0 > 0$, мы строим формальные асимптотические решения уравнения (1) в так называемом [3] классе функций, квазиклассически сосредоточенных при $h \rightarrow 0$ на заданной траектории $\vec{x} = \vec{X}(t, h)$, где $\vec{X}(t, h)$ – гладкая вектор функция, регулярно зависящая от малого параметра h , $h \rightarrow 0$. Введем этот класс функций:

$$P_t^h = P_t^h(\vec{X}(t, h), \vec{P}(t, h), S(t, h)) \\ = \left\{ \Phi, \Phi = \phi\left(\frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{h}}, t, \sqrt{h}\right) \exp\left[\frac{i}{h}(S(t, h) + \langle \vec{P}(t, h), \Delta \vec{x} \rangle)\right] \right\}, \quad (3)$$

где $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t, h)$, вещественные функции $\vec{X}(t, h)$, $\vec{P}(t, h)$, $S(t, h)$ подлежат определению, функция $\phi(\xi, t, \sqrt{h})$ по переменной ξ принадлежит пространству Шварца $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ и регулярно зависит от $\sqrt{h}$, $h \rightarrow 0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Следующие ниже свойства функций класса P_t^h играют существенную роль в конструкции асимптотик уравнения (1) в рамках ковариантного подхода, развитого в [3], [4]. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультииндексы, $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ и $\vec{X}^\alpha = \prod_{j=1}^n X_j^{\alpha_j}$. Обозначим $\Delta_{\alpha\beta}(t, h) = \langle \hat{\Delta}_{\alpha\beta} \rangle_\Psi$ – центрированные моменты, где $\hat{\Delta}_{\alpha\beta}$ – оператор с вейлевским символом

$$\Delta_{\alpha\beta}(\vec{p}, \vec{x}) = (\vec{x} - \vec{X}(t, h))^\alpha (\vec{p} - \vec{P}(t, h))^\beta,$$

вычисленные по функциям из класса P_t^h .

ЛЕММА 1. 1. *Имеет место следующее асимптотическое равенство:*

$$\Delta_{\alpha\beta}(t, h) = O(h^{(|\alpha|+|\beta|)/2}), \quad h \rightarrow 0$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, НМЦ № 050122002.

(т.е. момент k -го порядка, $k = \alpha + \beta$, есть $O(h^{k/2})$, $h \rightarrow 0$).

2. Имеют место следующие равенства:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Phi\|^2} |\Phi(\vec{x}, t, h)|^2 = \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, 0)),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|\tilde{\Phi}\|^2} |\tilde{\Phi}(\vec{p}, t, h)|^2 = \delta(\vec{p} - \vec{P}(t, 0)),$$

где $\tilde{\Psi}(\vec{p}, t, h)$ есть h^{-1} -преобразование Фурье [5] функции $\Phi(\vec{x}, t, h)$, а $\|\cdot\|$ — ее $\mathbb{L}_2$ -норма.

Доказательство леммы можно найти, например в [4].

В этой работе мы ограничимся для простоты построением главного члена асимптотики ($\alpha = 3/2$) одномерного уравнения (1) ($x \in \mathbb{R}$), выбрав в качестве начальных условий $\Psi|_{t=0} \in P_0^h$ нормированные фоковские состояния

$$\Psi|_{t=0} = \Psi_0(x, h) \frac{1}{\nu! 2^{\nu/2}} H_\nu \left(\frac{(x - x_0) \operatorname{Im} b}{\sqrt{h}} \right), \quad \nu \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\Psi_0(x, h) = N_0 \exp \left[\frac{i}{h} (p_0(x - x_0) + b(x - x_0)^2) \right]. \quad (4)$$

Здесь $H_\nu(\xi)$ — полином Эрмита с номером ν , $(x_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} b > 0$, — параметры, $N_0 = (\pi h)^{-1/4} (\operatorname{Im} b)^{1/4}$ — нормировочная постоянная.

Следуя идеям ковариантного подхода [3], [4], основанного на идеях комплексного роста Маслова [6], в начале определим (с точностью до $O(h^{3/2})$) носитель $\supp \Psi$ асимптотического решения Ψ задачи (1)–(4): $\supp \Psi = X(t, h) + O(h^{3/2})$ (в p -представлении $\supp \tilde{\Psi} = P(t, h) + O(h^{3/2})$) из системы Гамильтона–Эренфеста (см., например, [3], [4]) относительно квантовых средних базисного набора наблюдаемых. В данном случае этот базисный набор является универсальной обертывающей алгебры Гейзенберга–Вейля с образующими $\hat{1}$, $\hat{\Delta}x = \vec{x} - \vec{X}(t, h)$, $\hat{p} - P(t, h) = \hat{\Delta}p$, где $\hat{1}$ — тождественный оператор, $X(t, h)$, $P(t, h)$ — квантовые средние, вычисленные по функциям из класса P_t^h .

ТЕОРЕМА 1. *Средние значения операторов координат, импульсов и центрированных моментов σ_{xx} , σ_{pp} , σ_{px} , рассчитанных по формальным асимптотическим решениям $(\bmod h^{3/2})$ из класса P_t^h , удовлетворяют следующей системе Гамильтона–Эренфеста:*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{p}, & \dot{\hat{p}} &= -\kappa(V'(0) + V'''(0)\sigma_{xx}), \\ \dot{\sigma}_{xx} &= 2\sigma_{px}, & \dot{\sigma}_{pp} &= -2\kappa V''(0)\sigma_{px}, & \dot{\sigma}_{px} &= -\kappa V''(0)\sigma_{xx} + \sigma_{pp}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$V^{(k)}(0) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} V(x - y)|_{x=y}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Доказательство следует из аналога формулы Эренфеста для квантовых средних самосопряженного оператора $\hat{A}(t) = A(\hat{x}, \hat{p}, t)$:

$$\frac{d}{dt} \overline{\hat{A}(t, h)} = \overline{\frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t}} + \frac{i}{h} \left[\frac{\hat{p}^2}{2}, \hat{A}(t) \right] + \frac{i}{h} \kappa \int_{\mathbb{R}} [V(x - y), \hat{A}(t)] |\Psi(y, t)|^2 dy,$$

где черта означает усреднение в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}_x)$ по решению Ψ унитарно-нелинейного уравнения (1), и последующим разложением средних в ряд Тейлора по степеням $\hat{\Delta}x$, $\hat{\Delta}p$ с учетом оценок из леммы 1.

Сформулируем теперь основной результат работы. Обозначим

$$(X(t, h), P(t, h) = \dot{X}(t, h), \sigma_{xx}(t, h), \sigma_{pp}(t, h), \sigma_{px}(t, h))$$

решение задачи Коши для уравнения системы (5) с начальными данными, индуцированными начальным условием (4)

$$\begin{aligned}\bar{x}(0) &= x_0, & \bar{p}(0) &= p_0, & \sigma_{xx}(0, h) &= \frac{h}{2\operatorname{Im} b} \left(\nu + \frac{1}{2} \right), \\ \sigma_{pp}(0, h) &= \frac{h|b|^2}{2\operatorname{Im} b} \left(\nu + \frac{1}{2} \right), & \sigma_{px}(0, h) &= \frac{h\operatorname{Re} b}{2\operatorname{Im} b} \left(\nu + \frac{1}{2} \right), & \nu &\in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены перечисленные выше условия на потенциал $V(x - y)$. Тогда четырехпараметрическое семейство асимптотических $(\bmod h^{3/2})$, $h \rightarrow 0$, решений задачи (1), (4) имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi_\nu(x, t, h, p_0, x_0, b) &= N_0 \exp \left[\frac{i}{h} \left(S_0(t, h) + \dot{X}(t, h) \Delta x + \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} \frac{\Delta x^2}{2!} \right) \right] \\ &\times \frac{1}{\sqrt{C(t)}} \frac{1}{\nu!} \frac{1}{\sqrt{2}^\nu} \exp[-i\nu \arg(C(t))] H_\nu \left(\frac{\Delta x \sqrt{\operatorname{Im} b}}{|C(t)|\sqrt{h}} \right), \quad \nu \in \mathbb{Z}_+, \quad (6)\end{aligned}$$

где $\Delta x = x - X(t, h)$, фаза

$$S_0(t, h) = \int_0^t \left(\frac{\dot{X}(\tau, h)}{2} - \kappa \left(V(0) + \frac{1}{2} \sigma_{xx}(\tau, h) \right) \right) d\tau,$$

а комплекснозначная функция $C(t)$ – решение задачи Коши для уравнения

$$\ddot{C}(t) + \kappa V''(0) C(t) = 0, \quad C(0) = 1, \quad \dot{C}(0) = b.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из условия $\operatorname{Im} b > 0$ следует, что функция (6) локализована в пределе при $h \rightarrow 0$ на классической траектории $X(t, 0)$: $\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{supp} \Psi_\nu(x, t, h) = X(t, 0)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнено условие $\kappa V''(0) > 0$. Тогда формула (6) определяет солитонобразные асимптотические решения, квадратичные дисперсии которых $\sigma_{xx}(t)$, $\sigma_{pp}(t)$ являются ограниченными функциями времени $t \in \mathbb{R}$ (на языке квантовой механики это означает, что асимптотики Ψ_ν – нерасплывающиеся волновые пакеты гауссовой формы, центр тяжести которых перемещается по закону $x = X(t, h)$).

Приведем пример такого решения. Пусть потенциал самодействия $V(\tau)$ удовлетворяет условиям

$$V'(0) = 0, \quad V'''(0) = 0, \quad \kappa V''(0) > 0,$$

и пусть $b = i\Omega$, $\Omega = \sqrt{\kappa V^{(2)}}$. Тогда центр тяжести пакета движется равномерно: $X(t, h) = x_0 + p_0 t$ и функция (6) при $x_0 = 0$ имеет вид

$$\Psi_\nu(x, t, h) = \exp \left[-\frac{i}{h} \left(\lambda_\nu - \frac{p_0^2}{2} \right) t \right] \exp \left[\frac{i}{h} (x - p_0 t) p_0 \right] \Psi_{\lambda_\nu}(x - p_0 t),$$

где $(\lambda_\nu, \Psi_{\lambda_\nu})$ – квазимода $(\bmod h^{3/2})$ оператора (2), отвечающая точке покоя системы Гамильтона–Эренфеста:

$$\hat{H}_\kappa[\Psi_{\lambda_\nu}] \Psi_{\lambda_\nu} = \lambda_\nu \Psi_{\lambda_\nu} + O(h^{3/2}).$$

При этом

$$\lambda_\nu = \kappa V(0) + \frac{3h\Omega}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right), \quad \Psi_{\lambda_\nu}(x) = N_0 \exp \left[-\frac{1}{2h} \Omega x^2 \right] H_\nu \left(x \sqrt{\frac{\Omega}{h}} \right), \quad N_0 = \left(\frac{\Omega}{\pi h} \right)^{1/4}.$$

Функция Ψ_{λ_ν} есть асимптотика автомодельного решения уравнения (1), порожденного законом сохранения импульса. Существование такого решения было установлено в [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. П. Питаевский, *Успехи физ. наук*, **168** (1988), 641–653. [2] А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах*, Наукова Думка, Киев, 1984. [3] V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, *Ann. of Phys. (NY)*, **246**:2 (1996), 231–280. [4] В. В. Белов, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов, *Теор. матем. физ.*, **130**:3 (2002), 460. [5] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976. [6] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977. [7] В. П. Маслов, М. В. Карасев, “Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. Операторные унитарно нелинейные уравнения”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*, **13**, ВИНТИ, М., 1979, 232–233.

В. В. Белов, Е. И. Смирнова

Московский институт электроники и
математики (технический университет)

Поступило

07.03.2006