Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Леонтьев, О корнях случайных полиномов над конечным полем, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 313–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:12:33

О КОРНЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛИНОМОВ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

В. К. Леонтьев

Пусть F_q – конечное поле и $F_q[x]$ – кольцо полиномов над полем F_q . Для полинома $f(x) \in F_q[x]$ мы обозначим через $\lambda(f)$ число корней $f(x)$, лежащих в поле F_q . В статье обсуждается проблема статистических свойств величины $\lambda(f)$ при равномерном распределении на множестве нормированных полиномов¹ степени не выше, чем m . Такого рода проблемы встречаются при изучении перестановочных полиномов и в ряде разделов теории корректирующих кодов [1]–[3]. Для вещественного поля $\mathbb{R}$ теорема М. Каца утверждает, что “в среднем” полином степени n с вещественными коэффициентами, нормально и независимо распределенными на отрезке $[0, 1]$, имеет асимптотически $(\log_2 n)/(2\pi)$ вещественных корней [4].

Основной результат настоящей работы состоит в следующем: число нулей случайного полинома из $F_q[x]$, лежащих внутри поля F_q , имеет в асимптотике ($q \rightarrow \infty$) распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$. В частности, случайный полином из $F_q[x]$ при растущем q имеет “в среднем” ровно один корень в поле F_q .

Пусть t_m – число нормированных (с коэффициентом при старшей степени, равным единице) полиномов степени m , не имеющих корней в поле F_q (здесь $q = p^r$ и p – простое число).

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$t_m = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{q}{i} q^{m-i}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Z_m^i множество полиномов степени m из $F_q[x]$, имеющих корень $\alpha_i \in F_q = \{\alpha_1 = 0, \alpha_2, \dots, \alpha_q\}$, и пусть $Z_m = \bigcup_{i=1}^q Z_m^i$. Тогда

$$t_m = q^m - |Z_m|, \quad (2)$$

где $|Z_m|$ – мощность множества Z_m . Применяя формулу “включений–исключений”, из (2) получаем

$$|Z_m| = \sum_{s=1}^m (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq q} |Z_m^{i_1} \cap Z_m^{i_2} \cap \dots \cap Z_m^{i_s}|. \quad (3)$$

Если нормированный полином $f(x) \in F_q[x]$ степени m имеет в качестве корней элементы $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$ из поля F_q , то

$$f(x) = (x - \alpha_{i_1}) \dots (x - \alpha_{i_s}) \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – произвольный нормированный полином степени $m-s$ из $F_q[x]$. Отсюда следует, что

$$|Z_m^{i_1} \cap Z_m^{i_2} \cap \dots \cap Z_m^{i_s}| = q^{m-s}. \quad (4)$$

Из (2)–(4) следует (1).

Применяя лемму, вычислим для примера значения t_m при $m = 0, 1, 2, 3$: $t_0 = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = \binom{q}{2}$, $t_3 = q(q^2 - 1)/3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05-01-01019.

¹Всюду ниже, если специально не оговаривается, речь идет только о нормированных полиномах из $F_q[x]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $B_{m,q,r}$ – число полиномов степени m из $F_q[x]$, имеющих ровно r различных корней в поле F_q . Тогда

$$B_{m,q,r} = \binom{q}{r} \sum_{i=0}^{m-r} \binom{r+i-1}{r-1} t_{m-(r+i)}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если полином $f(x)$ имеет r различных корней в поле F_q , то

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\lambda_1} (x - \alpha_2)^{\lambda_2} \dots (x - \alpha_r)^{\lambda_r} \varphi(x),$$

где все α_i различны, $\lambda_i \geq 1$ и $\varphi(x)$ не имеет корней в F_q . Отсюда следует соотношение

$$B_{m,q,r} = \binom{q}{r} \sum_{k=r}^m \binom{k-1}{r-1} t_{m-k} = \binom{q}{r} \sum_{i=0}^{m-r} \binom{r+i-1}{r-1} t_{m-(r+i)}.$$

Пусть далее

$$t_{m,\lambda}(q) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{q}{i} \lambda^{m-i}$$

и $F(x)$ – производящая функция последовательности $\{t_{m,\lambda}(q)\}_{m=0}^{\infty}$, т.е.

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} t_{m,\lambda}(q) x^m.$$

ЛЕММА 2. Имеет место равенство

$$F(x) = \frac{(1-x)^q}{1-\lambda x}. \quad (6)$$

Равенство (6) доказывается “прямым” вычислением.

Далее мы используем стандартный формализм из [5]:

$$\begin{aligned} \binom{r+i-1}{i} &= \text{Coef}_u \left\{ \frac{1}{(1-u)^r u^{i+1}} \right\}, \\ t_{m-(r+i)} &= \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^q}{(1-uv) u^{m-r-i+1}} \right\}, \\ t_{m,\lambda}(q) &= \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^q}{(1-\lambda u) u^{m+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

ЛЕММА 3. Имеет место равенство

$$B_{m,q,r} = \binom{q}{r} t_{m-r,q}(q-r). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5) и (7) имеем

$$\sum_{i=0}^{m-r} \binom{r+i-1}{r-1} t_{m-(r+i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \text{Coef}_u \left\{ \frac{1}{(1-u)^{i+1} u^r} \right\} \text{Coef}_v \left\{ \frac{(1-v)^q}{(1-vq) v^{m-r-i+1}} \right\}. \quad (9)$$

Из (9) после рутинных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-r} \binom{r+i-1}{r-1} t_{m-(r+i)} &= \text{Coef}_v \left\{ \frac{(1-v)^q}{(1-vq) v^{m-r+1}} \text{Coef}_u \left\{ \frac{1}{u^r (1-u)} \cdot \frac{1}{1-\frac{v}{1-u}} \right\} \right\} \\ &= \text{Coef}_v \left\{ \frac{(1-v)^q}{(1-vq) v^{m-r+1} (1-v)^r} \right\} = t_{m-r,q}(q-r). \end{aligned}$$

Пусть $N_m = \{f_1, f_2, \dots, f_{q^m}\}$ – множество всех полиномов степени m из $F_q[x]$. Зададим на N_m равномерное вероятностное распределение, приписав каждому полиному из N_m вероятность $1/q^m$. Рассмотрим случайную величину $\lambda(f)$ – число различных корней полинома f , лежащих в поле F_q , где f – случайно выбранный полином из N_m . Рассмотрим распределение

$$q_r^{(m)} = P\{\lambda(f) = r\}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

и производящую функцию этого распределения

$$\Phi_m^q(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r^{(m)} x^r.$$

ЛЕММА 4. *Имеет место равенство*

$$\Phi_m^q(x) = \sum_{i=0}^m \frac{\binom{q}{i}}{q^i} (x-1)^i. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_m^q(x) &= \sum_{r=0}^m \frac{B_{m,q,r}}{q^m} x^r = \frac{1}{q^m} \sum_{r=0}^m x^r \binom{q}{r} t_{m-r,q}(q-r) \\ &= \frac{1}{q^m} \sum_{r=0}^m x^r \binom{q}{r} \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^{q-r}}{(1-uv)u^{m-r+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{q^m} \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^q}{u^{m+1}(1-uv)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{ux}{1-u} \right)^r \binom{q}{r} \right\} = \frac{1}{q^m} \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1+u(x-1))^q}{(1-uv)u^{m+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{q^m} \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} (x-1)^s \text{Coef}_u \left\{ \frac{1}{u^{m-s+1}} [1 + (uv) + (uv)^2 + \dots] \right\} \\ &= \frac{1}{q^m} \sum_{s=0}^q \binom{q}{s} (x-1)^s q^{m-s} = \sum_{s=0}^m \frac{\binom{q}{s}}{q^s} (x-1)^s. \end{aligned}$$

Во всех выкладках учитывается, что $r \leq \min\{q, m\}$.

Пусть теперь $M(\lambda(f))$ и $D(\lambda(f))$ – соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\lambda(f)$.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место равенства*

$$M(\lambda(f)) = 1, \quad D(\lambda(f)) = 1 - \frac{1}{q}. \quad (11)$$

Это утверждение сразу следует из леммы 4, так как первая и вторая производные функции $\Phi_m^q(x)$ легко вычисляются в точке $x = 1$.

Пусть теперь $M_n = \{f\}$ – множество всех полиномов степени $\leq n$ из $F_q[x]$. На множестве M_n зададим равномерное вероятностное распределение, приписав каждому полиному f из M_n вероятность $1/N$, где $N = |M_n| = (q^{n+1} - 1)/(q - 1)$. Рассмотрим ту же самую случайную величину $\lambda_n(f)$ – число различных корней полинома f из M_n , лежащих в поле F_q .

ТЕОРЕМА 2. *Если $n = q - 1$ и $q \rightarrow \infty$, то случайная величина $\lambda_n(f)$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\lambda = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 3 и формулу полной вероятности, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\lambda_n(f) = r\} &= \mathbf{P}_r = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^n q^m q_r^{(m)} = \frac{\binom{q}{r}}{N} \sum_{m=1}^n \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^{q-r}}{(1-qu)u^{m-r+1}} \right\} \\ &= \frac{\binom{q}{r}}{N} \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^{q-r-1}}{(1-qu)u^{n-r+1}} \right\} = \frac{\binom{q}{r}}{N} t_{n-r,q}(q-r-1). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя (12), можно найти производящую функцию распределения $\{\mathbf{P}_r\}$:

$$\begin{aligned} \Phi_q^n(x) &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{q}{r} t_{n-r,q}(q-r-1) x^r = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{q}{r} x^r \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^{q-r-1}}{(1-qu)u^{n-r+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{N} \text{Coef}_u \left\{ \frac{(1-u)^{q-1}}{(1-qu)u^{n+1}} \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} \left(\frac{xu}{1-u} \right)^r \right\} = \frac{1}{N} \text{Coef}_u \left\{ \frac{[1+u(x-1)]^q}{(1-qu)(1-u)u^{n+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Phi_q^n(x) = \frac{1}{2\pi i N} \oint_{|u|=\rho} \frac{[1+u(x-1)]^q}{(1-qu)(1-u)u^{n+1}} du. \quad (13)$$

Здесь ρ — достаточно малое положительное число.

Функция $\Psi(u)$, заданная следующим образом:

$$\Psi(u) = \frac{[1+u(x-1)]^q}{(1-qu)(1-u)u^{n+1}}$$

имеет следующие особые точки: $u_1 = 0$, $u_2 = q^{-1}$, $u_3 = 1$, $u_4 = \infty$. Так как $n = q - 1$, то

$$\text{res}_{u=u_4} \Psi(u) = 0.$$

Далее,

$$\text{res}_{u=u_2} \Psi(u) = q^n \frac{(1+(x-1)/q)^q}{1/q-1}, \quad \text{res}_{u=u_3} \Psi(u) = \frac{x^q}{q-1}.$$

Используя теперь теорему о вычетах, получаем

$$\Phi_q^n(x) = \frac{q^{n+1}-q^n}{q^{n+1}-1} \left(1 - \frac{x-1}{q}\right)^q - \frac{x^q}{q^{n+1}-1}. \quad (14)$$

Из (14) следует

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \Phi_q^n(x) = e^{x-1}$$

для произвольной точки x из $(0, 1]$. Утверждение теоремы 2 теперь следует из теоремы о непрерывности для производящих функции [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Лидл, Г. Нидеррайт, *Конечные поля*, **1, 2**, Мир, М., 1988. [2] Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, *Теория кодов, исправляющих ошибки*, Связь, М., 1979. [3] В. К. Леонтьев, *Труды IV Межд. конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем"*, 2000. [4] М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, М., 1965. [5] Г. П. Егорьев, *Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм*, Наука, Новосибирск, 1977. [6] В. Н. Сачков, *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*, Наука, М., 1978.

В. К. Леонтьев

Вычислительный центр РАН