Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Пекарский, Об устранении особенностей мероморфных функций с конечным числом полюсов p^r , *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 2, 317–319

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 02:18:25

ОБ УСТРАНЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОЛЮСОВ p^r

А. А. Пекарский

Пусть G – односвязная ограниченная область Жордана в комплексной плоскости; ∂G – граница G и $\overline{G} = G \cup \partial G$. Через $E_\infty = E_\infty(G)$ обозначим пространство ограниченных аналитических функций f в G , наделенных стандартной $\sup$ -нормой: $\|f\|_{E_\infty} = \sup_{z \in G} |f(z)|$. Далее $C_A = C_A(\overline{G})$ – подпространство E_∞ , состоящее из функций f , допускающих непрерывное продолжение в $\overline{G}$. В дальнейшем под $f(\xi)$ для $f \in C_A$ и $\xi \in \partial G$ подразумеваем $\lim_{G \ni z \rightarrow \xi} f(z)$. Полагаем $\|f\|_{C_A} = \|f\|_{E_\infty}$. В силу принципа максимума модуля аналитической функции имеем $\|f\|_{C_A} = \max_{\xi \in \partial G} |f(\xi)|$. Через $M = M(G)$ обозначим множество функций h , определенных в G и представимых в виде $h = f - g$, где $f \in E_\infty$, а g – рациональная функция (р. ф.) с полюсами лишь в G . Ясно, что M есть некоторое подмножество множества мероморфных в G функций, имеющих конечное число полюсов. Для $h \in M$ положим

$$\|h\|_M = \sup_{\xi \in \partial G} \overline{\lim_{G \ni z \rightarrow \xi}} |h(z)|.$$

Согласно результату Данченко [1], если $f \in E_\infty$ и g_m – р. ф. степени $m \geq 1$ с полюсами лишь в G , то

$$\|f\|_{E_\infty} \leq 51m \|f - g_m\|_M. \quad (1)$$

Оценке (1) предшествовали результаты Гончара и Григоряна [2], [3] и некоторых других авторов. Из примеров, построенных в [3], следует, что неравенство (1) точное в смысле порядка. Отметим также, хотя это мы и не будем использовать, что в [1] неравенство (1) получено для *любой* области.

В настоящей заметке мы получим одно дополнение к оценке (1). Именно, мы выясним: как хорошо можно исправить функцию f посредством рациональных функций степени не выше k , $1 \leq k \leq m$? При этом мы вынуждены на область G накладывать дополнительные ограничения: G должна быть областью Альпера или Радона. Определения этих областей имеются, например, в [4], [5], где даны также ссылки на другие работы. Условимся в дальнейшем через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначать некоторые положительные величины, зависящие лишь от G .

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – область Альпера или Радона, $f \in E_\infty(G)$, g_m – р. ф. степени m , $m \geq 1$, все полюсы которой лежат в G и $1 \leq k \leq m$. Тогда

(i) существует р. ф. g_k степени не выше k с полюсами лишь в G такая, что

$$\|f - g_k\|_M \leq \frac{c_1 m}{k} \|f - g_m\|_M;$$

(ii) существует р. ф. ω_k степени не выше k с полюсами лишь в области $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ такая, что

$$\|f - \omega_k\|_{E_\infty} \leq \frac{c_2 m}{k} \|f - g_m\|_M.$$

Для $f \in C_A(\overline{G})$ введем наилучшие равномерные рациональные приближения:

$$R_n(f, \overline{G}) = \inf_{r_n} \max_{z \in \overline{G}} |f(z) - r_n(z)|, \quad R_n(f, \partial G) = \inf_{r_n} \max_{\xi \in \partial G} |f(\xi) - r_n(\xi)|,$$

где инфимумы берутся по всем рациональным функциям r_n степени не выше n , $n = 0, 1, 2, \dots$. При вычислении $R_n(f, \overline{G})$ мы должны учитывать р. ф. с полюсами лишь в области Ω , а при вычислении $R_n(f, \partial G)$ – в $G \cup \Omega$. Поэтому $R_n(f, \partial G) \leq R_n(f, \overline{G})$.

Поскольку полюсы дроби наилучшего приближения для $R_n(f, \partial G)$ могут оказаться в G , то, вообще говоря, последнее неравенство нельзя заменить равенством. Правда, это неравенство можно частично обратить. Именно, из (1) немедленно следует, что

$$R_n(f, \overline{G}) \leq 51nR_n(f, \partial G), \quad n \geq 1. \quad (2)$$

Из теоремы 1 (ii) легко получить, что при дополнительных ограничениях на G множитель $51n$ в (2) можно заменить некоторой постоянной, зависящей от области G .

ТЕОРЕМА 2. Если G – область Альпера или Радона и $f \in C_A(\overline{G})$, то для $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство

$$R_n(f, \overline{G}) \leq c \cdot R_n(f, \partial G).$$

Отметим, что неравенство типа (2) было впервые найдено Гончаром и Григорьяном [2], [3]. Теорема 2 для круга получена нами ранее (см. [4] или [6; с. 313]) с константой $c = 2$.

При доказательстве теоремы 1 мы будем применять классические пространство Лебега L_p на ∂G ; пространство Харди H_p в круге $D = \{w: |w| < 1\}$; пространства В. И. Смирнова E_p в областях G и Ω . Будем считать $1 \leq p \leq \infty$ и, что эти пространства наделены стандартными нормами. Необходимые сведения о пространствах Харди и Смирнова можно найти, например, в монографиях [6], [7], а также в работах [5], [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $a = \|f - g_m\|_M$. Согласно теореме 3.1 из [4], или теореме 3 из [1], или теореме 4.1 из [8] имеют место соотношения

$$\|g'_m\|_{E_1(\Omega)} = \|g'_m\|_{L_1(\partial G)} \leq c_1 m a. \quad (3)$$

Поэтому ввиду теоремы 1.3 из [5] найдется р. ф. g_k степени не выше k , $1 \leq k \leq m$, с полюсами лишь в G такая, что

$$\|g_m - g_k\|_M = \|g_m - g_k\|_{C_A(\overline{\Omega})} \leq \frac{c_2}{k} \|g'_m\|_{E_1(\Omega)} \leq \frac{c_3 m a}{k}.$$

Покажем, что функция g_k удовлетворяет условию (i). Действительно,

$$\|f - g_k\|_M \leq \|f - g_m\|_M + \|g_m - g_k\|_M \leq a + \frac{c_3 m a}{k} \leq \frac{c_4 m a}{k}.$$

Для доказательства утверждения (ii) введем дополнительные обозначения. Через $z = \varphi(w)$ обозначим какую-либо функцию, осуществляющую конформное отображение круга D на область G ; $w = \psi(z)$ – обратное отображение. Как известно [7], при условии спрямляемости ∂G (в рассматриваемом случае ∂G спрямляема), имеем $\varphi \in C_A(\overline{D})$, $\psi \in C_A(\overline{G})$, $\varphi' \in H_1$ и $\psi' \in E_1$.

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_m$ – полюсы g_m (не ограничивая общности, будем считать их попарно различными). Положим $w_k = \psi(z_k)$ и введем произведение Бляшке порядка m :

$$B_m(w) = \prod_{k=1}^m \frac{w - w_k}{1 - \overline{w}_k w}.$$

Функция

$$F(w) := \{f[\varphi(w)] - g_m[\varphi(w)]\} B_m(w) \in H_\infty$$

и $\|F\|_{H_\infty} = \|f - g_m\|_M = a$. Из теоремы Пика–Неванлинны (см., например, [6; с. 592]) следует существование произведения Бляшке $B_{m-1}(w)$ порядка не выше $m-1$ и числа α , $|\alpha| \leq a$, таких, что

$$F(w_k) - \alpha B_{m-1}(w_k) = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, m.$$

Значит, функция

$$\lambda(z) = \frac{F[\psi(z)] - \alpha B_{m-1}[\psi(z)]}{B_m[\psi(z)]} = f(z) - g_m(z) - \alpha \frac{B_{m-1}[\psi(z)]}{B_m[\psi(z)]}$$

принадлежит $E_\infty(G)$ и $\|\lambda\|_{E_\infty} \leq 2a$. Введем в рассмотрение функцию

$$t(z) = \alpha \frac{B_{m-1}[\psi(z)]}{B_m[\psi(z)]} \in M(G).$$

Поскольку $f(z)$ и $\lambda(z)$ аналитичны в G , то функция $u(z) = t(z) + g_m(z)$ также аналитична в G и, более того, принадлежит $C_A(\overline{G})$. Легко показать, что

$$\|t'\|_{L_1(\partial G)} \leq 2\pi|\alpha|(2m-1) \leq 4\pi ma.$$

С учетом неравенства (3), получаем

$$\|u'\|_{E_1(G)} = \|u'\|_{L_1(\partial G)} \leq \|t'\|_{L_1(\partial G)} + \|g'_m\|_{L_1(\partial G)} \leq c_5 ma.$$

Таким образом, $u' \in E_1(G)$ и $\|u'\|_{E_1(G)} \leq c_5 ma$. Как и при доказательстве утверждения (i), снова применим теорему 1.3 из [5], однако, в данном случае для области Ω . Согласно этой теореме существует р. ф. ω_k степени не выше k с полюсами лишь в Ω и такая, что

$$\|u - \omega_k\|_{C_A(\overline{G})} \leq \frac{c_6 am}{k}. \quad (4)$$

Покажем, что ω_k удовлетворяет условию (ii). Действительно,

$$\|f - \omega_k\|_{E_\infty(G)} \leq \|f - u\|_{E_\infty(G)} + \|u - \omega_k\|_{E_\infty(G)} \leq 2a + \frac{c_6 am}{k} \leq \frac{c_7 am}{k}.$$

Здесь мы применили неравенство (4), а также соотношения $f(z) - u(z) = \lambda(z)$ и $\|\lambda\|_{E_\infty} \leq 2a$. Теорема 1 доказана.

Можно показать, что множитель m/k в теореме 1 (i), (ii) является точным в смысле порядка. Соответствующий пример строится по аналогии с примером из [3], подтверждающим точность оценки (1).

Как отмечено выше, неравенство (1) выполняется для любой области G . Напротив же, наше дополнение к этому неравенству – теорема 1 получено при весьма жестких ограничениях: G должна быть областью Альпера или Радона. Как видно из доказательства, это ограничение возникает, в первую очередь, из-за применения теоремы 1.3 из [5], в которой дается оценка наилучших равномерных рациональных приближений функций $f \in C_A$, удовлетворяющих условию $f' \in E_1$. Что касается неравенства (3), то оно выполняется для существенно более широкого класса областей (подробности см. в [1], [8]).

В заключение отметим, что аналоги теоремы 2 для пространств Смирнова E_p , $0 < p \leq 1$, получены нами в [8] (см. теоремы 3.3 и 3.4). Для пространств E_p при $1 < p < \infty$ нужный результат вытекает из обобщенной теоремы М. Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Данченко, *Analysis Math.*, **16** (1990), 241–255. [2] А. А. Гончар, Л. Д. Григорян, *Матем. сб.*, **99**:4 (1976.), 634–638. [3] Л. Д. Григорян, *Матем. сб.*, **100**:1 (1976), 156–164. [4] А. А. Пекарский, *Матем. заметки*, **31**:3 (1982), 389–402. [5] А. А. Пекарский, *Алгебра и анализ*, **13**:2 (2001), 165–190. [6] G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Y. Makovoz, *Constructive Approximation. Advanced Problems*, Springer, Berlin, 1996. [7] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950. [8] А. А. Пекарский, *Алгебра и анализ*, **16**:3 (2004), 143–170.

А. А. Пекарский

Белорусский государственный технологический университет

E-mail: pekarski@bstu.unibel.by