Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций, *Матем. заметки*, 1999, том 66, выпуск 4, 603–616

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:09:39

УДК 517.55

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Б. Н. Хабибуллин

Пусть f – целая функция в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, $E \subset \mathbb{C}^n$. В терминах взаимного индикатора функции f и множества E , широкого класса плотностей распределения множества Λ дается шкала достаточных условий полноты системы функций $\{f(\lambda \times z): \lambda \in \Lambda\}$, $z \in E$, где $\lambda \times z = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \dots, \lambda_n z_n)$, в пространстве $H(E)$ голоморфных на E функций в топологии равномерной сходимости на компактах. Эти условия новые уже при $n = 1$, даже когда E – круг.

Библиография: 19 названий.

Введение. Пусть $E \subset \mathbb{C}^n$. Через $H(E)$ обозначаем пространство голоморфных на E функций, т.е. функций, голоморфных в открытой окрестности E . Говорим, что *система функций $\mathcal{F}$ полна* на (или в) множестве $E \in \mathbb{C}^n$, если для любой функции $g \in H(E)$ существует последовательность конечных линейных комбинаций с комплексными коэффициентами функций из системы $\mathcal{F}$, сходящаяся к g в топологии равномерной сходимости на компактах из E .

Пусть f – целая функция в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$.

Первые результаты при $n = 1$ о полноте в круге заданного радиуса с центром в нуле системы функций $\{f(\lambda_k z)\}$, где $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность комплексных чисел, стремящаяся к бесконечности, были получены, по-видимому, А. О. Гельфондом и А. И. Маркушевичем [1], [2] (здесь мы опускаем обсуждение обширного материала для случая явно заданных функций f типа $f(z) = e^z$). Дальнейшие исследования при $n = 1$, когда полнота рассматривалась в круге или на всей комплексной плоскости, проводились И. И. Ибрагимовым [3], [4, гл. IV, § 3, п. 2], Б. Я. Левиным [5, с. 283], А. Ф. Леонтьевым [6], [7, гл. II, § 1]. Полнота в областях на плоскости, отличных от круга и плоскости, изучалась И. Ф. Лохиным [8], [9] и И. И. Ибрагимовым [4, гл. IV, § 3, п. 5].

В работах автора установлена

ТЕОРЕМА А. Пусть G – выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией $h(-\theta)$,

$$s_h(\theta) = h'(\theta - 0) + \int_0^\theta h(\varphi) d\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (0.1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-960-011746, и Конкурсного центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете, грант № 01-960-000936.

$\{\lambda_q\}$ – последовательность попарно различных комплексных чисел, $k(\theta)$ – 2π -периодическая γ -тригонометрически выпуклая неотрицательная функция,

$$\Lambda(t; k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\lambda_q| < t} k(\arg \lambda_q). \quad (0.2)$$

Если выполнено неравенство

1) при $\gamma < 1$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r} \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t} \right)^\gamma + \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma \right) \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt \geq \frac{1}{1 - \gamma^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) ds_h(\theta), \quad (0.3)$$

или

2) при $\gamma = 1$

$$\overline{\lim}_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{\Lambda(t; k)}{t^2} dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) ds_h(\theta), \quad (0.4)$$

или

3) при $\gamma > 1$ и $\|k\| = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} k(\theta)$

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r} \left(2\|k\| \int_1^r \frac{\Lambda(t; 1)}{t} dt - \int_1^r \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt + \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t} \right)^\gamma \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt \right) \\ & \geq \|k\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + \frac{1}{\gamma^2 - 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) ds_h(\theta), \end{aligned} \quad (0.5)$$

то система $\{\exp(\lambda_q z)\}$ полна в области G .

Первое и второе условие полноты были получены в [10, теорема 4.1]. Впрочем, в силу известной связи между полнотой систем экспонент в области и теоремами единственности [2] второе условие полноты в теореме А было известно и несколько раньше как теорема единственности из совместной работы А. Ф. Гришина и М. Л. Содина [11]. Последнее условие также в виде теоремы единственности впервые установлено в несколько иной форме в [12, теорема единственности, 3)], которая интегрированием по частям легко сводится к виду (0.5).

Основная цель настоящей работы – расширение теоремы А до условий полноты системы функций вида $\{f(\lambda \times z) : \lambda \in \Lambda\}$ в области Рунге $G \subset \mathbb{C}^n$ или на полиномиально выпуклом компакте $K \subset \mathbb{C}^n$, где f – целая функция в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, конечного типа при порядке ρ , $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$,

$$\lambda \times z \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \dots, \lambda_n z_n).$$

При этом в п. 2 уже в случае $n = 1$ теорема А дополняется новыми условиями полноты системы функций вида $\{f(\lambda_q z) : \lambda = \{\lambda_q\} \subset \mathbb{C}, q \in \mathbb{N}\}$ в области G .

При $n > 1$ основная теорема о полноте имеет смысл только в случае, когда множество Λ имеет ненулевую меру Лебега–Хаусдорфа порядка $2n - 2$ и существенно отличается от ситуации дискретного вещественного множества Λ (см. обзор [13, п. 5.3]).

В последнем пункте статьи схематически рассмотрено возможное обобщение теоремы о полноте на вопросы полноты системы функций вида $\{f(z, \lambda) : \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{C}^n\}$.

1. Взаимный индикатор плюрисубгармонической или целой функции и множества. Пусть u – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$ (субгармоническую в $\mathbb{C}$ функцию также называем плюрисубгармонической), E – множество в $\mathbb{C}^n$. Положим

$$B(\lambda; u, E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z \in E} u(\lambda \times z), \quad B^*(\lambda; u, E) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{\lambda' \rightarrow \lambda} B(\lambda'; u, E), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

– полунепрерывная сверху регуляризация функции $B(\lambda; \cdot, \cdot)$. Из простых свойств плюрисубгармонических функций следует

Предложение 1.1. *В введенных обозначениях*

- 1) *функция $B^*(\lambda; u, E)$ плюрисубгармоническая во внутренности того множества, где она локально ограничена сверху;*
- 2) *если E – ограниченное множество, то $B^*(\lambda; u, E)$ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$;*
- 3) *если E – ограниченное множество и u – функция конечного типа при порядке ρ , то такова же и функция $B^*(\lambda; u, E)$.*

Определение 1.1. Пусть число $\rho > 0$ и функция

$$H_\rho(\lambda; u, E) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{B^*(t\lambda; u, E)}{t^\rho}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Взаимным индикатором функции u и множества E при порядке ρ называем ее полунепрерывную сверху регуляризацию

$$H_\rho^*(\lambda; u, E) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{\lambda' \rightarrow \lambda} H_\rho(\lambda'; f, G), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Если функция u конечного типа при порядке ρ , E – ограниченное множество, то их взаимный индикатор есть регуляризованный радиальный индикатор функции $B^*(\lambda; u, E)$.

Если $E = \{(1, 1, \dots, 1)\}$ – одноточечное множество, то взаимный индикатор функции u и множества E при порядке ρ есть обычный регуляризованный радиальный индикатор функции u при порядке ρ .

Если $\rho = 1$, $f(z) = \exp(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$, $z \in \mathbb{C}^n$, а E – выпуклая область или выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$, то взаимный индикатор этой функции и E при порядке 1 совпадает с опорной функцией множества E .

Отметим свойства взаимного индикатора.

Предложение 1.2. *Взаимный индикатор $H_\rho^*(\lambda; u, E)$*

- 1) *плюрисубгармоничен во внутренности того множества, где он локально ограничен сверху;*
- 2) *плюрисубгармоническая функция конечного типа при порядке ρ , если u – конечного типа при порядке ρ и E ограничено;*
- 3) *положительно однороден степени ρ , т.е. $H_\rho^*(t\lambda; \cdot, \cdot) = t^\rho H_\rho^*(\lambda; \cdot, \cdot)$, $t > 0$.*

Если H – непрерывная положительно однородная степени ρ функция на $\mathbb{C}^n$ такая, что $H_\rho^* \leq H$ на $\mathbb{C}^n$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная C_ε такая, что $B^*(\lambda; u, E) \leq H(\lambda) + \varepsilon |\lambda|^\rho + C_\varepsilon$. При $n = 1$ в этом неравенстве функцию H можно заменить на взаимный индикатор, поскольку он непрерывен.

Перечисленные свойства следуют из определения взаимного индикатора и элементарных свойств плюрисубгармонических функций и радиального индикатора (см. [14]).

Если плюрисубгармоническая функция $u = \log |f|$, где f – целая функция, то всюду ниже в функциях $B(\lambda; u, \cdot)$, $B^*(\lambda; u, \cdot)$, $H_\rho(\lambda; u, \cdot)$ и $H_\rho^*(\lambda; u, \cdot)$ допускается замена u на f . При этом функцию $H_\rho^*(\lambda; f, E)$ называем *взаимным индикатором целой функции f и множества E при порядке ρ* .

2. Теорема о полноте для комплексной плоскости. Пусть h – 2π -периодическая ρ -тригонометрически выпуклая функция, $\rho \geq 0$ [5]. С функцией h ассоциируется неотрицательная мера $ds_h^{(\rho)}(\theta)$ на окружности:

$$s_h^{(\rho)}(\theta) = h'(\theta - 0) + \rho^2 \int_0^\theta h(\varphi) d\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.1)$$

Для непрерывной функции $k(\theta)$ положим (ср. с правыми частями в (0.3)–(0.5))

$$S_\rho(k, h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(\theta) ds_h^{(\rho)}(\theta). \quad (2.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Верхнюю (k, ρ) -плотность $\overline{D}_k(\Lambda; \rho)$ последовательности $\Lambda = \{\lambda_q\}$, $q \in \mathbb{N}$, $\lambda_q = t_q e^{i\theta_q} \rightarrow \infty$, для 2π -периодической γ -тригонометрически выпуклой неотрицательной функции k , при которой функция $\Lambda(t; k)$ задана соотношением (0.2) и $\|k\| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k(\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, определяем следующим образом:

$$\overline{D}_k(\Lambda; \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r^\rho} \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t} \right)^\gamma + \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma \right) \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt & \text{при } \gamma < \rho, \\ \overline{\lim}_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{\Lambda(t; k)}{t^{\rho+1}} dt & \text{при } \gamma = \rho, \\ \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r^\rho} \left(2\|k\| \int_1^r \frac{\Lambda(t; 1)}{t} dt - \int_1^r \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt \right. \\ \quad \left. + \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t} \right)^\gamma \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt \right) & \text{при } \gamma > \rho. \end{cases}$$

Легко видеть, что в определении 2.1 при $\rho = 1$ получаются в точности левые части соотношений (0.3)–(0.5).

Определению 2.1 можно придать и иную форму, не использующую функцию $\Lambda(t; k)$, а именно:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1'. В обозначениях и условиях определения 2.1 верхнюю (k, ρ) -плотность $\overline{D}_k(\Lambda; \rho)$ можно определить так:

$$\overline{D}_k(\Lambda; \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\gamma r^\rho} \sum_{1 \leq t_q < r} k(\theta_q) \left(\left(\frac{r}{t_q} \right)^\gamma - \left(\frac{t_q}{r} \right)^\gamma \right) & \text{при } \gamma < \rho, \\ \frac{1}{\rho} \overline{\lim}_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \sum_{r \leq t_q < ar} \frac{k(\theta_q)}{t_q^\rho} & \text{при } \gamma = \rho, \\ \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\gamma r^\rho} \left(2\gamma \|k\| \sum_{1 \leq t_q < r} \ln \frac{r}{t_q} + \sum_{1 \leq t_q < r} k(\theta_q) \left(\frac{t_q}{r} \right)^\gamma \right. \\ \quad \left. + \sum_{t_q \geq r} k(\theta_q) \left(\frac{r}{t_q} \right)^\gamma \right) & \text{при } \gamma > \rho. \end{cases}$$

Переход от определения 2.1' к определению 2.1 нетрудно получить интегрированием по частям.

ТЕОРЕМА 2.1 (о полноте). Пусть f – целая функция на комплексной плоскости конечного типа при порядке $\rho > 0$ и все ее тейлоровские коэффициенты a_m отличны от 0, E – односвязная область (соответственно компакт со связным дополнением) в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_q\}$ – последовательность попарно различных комплексных чисел, $\lambda_q \rightarrow \infty$, k – 2π -периодическая γ -тригонометрически выпуклая неотрицательная функция, h – сужение на единичную окружность взаимного индикатора функции f и множества E при порядке ρ . Если выполнено неравенство

1) при $\gamma < \rho$

$$D_k(\Lambda; \rho) > \frac{1}{\rho^2 - \gamma^2} S_\rho(k, h), \quad (2.3)$$

или

2) при $\gamma = \rho$

$$D_k(\Lambda; \rho) > \frac{1}{\rho} S_\rho(k, h), \quad (2.4)$$

или

3) при $\gamma > \rho$

$$D_k(\Lambda; \rho) > \frac{\|k\|}{\rho^2} S_\rho(1, h) + \frac{1}{\gamma^2 - \rho^2} S_\rho(k, h), \quad (2.5)$$

то система функций $\{f(\lambda_q z)\}$ полна в области E (соответственно в пространстве $A(E)$ голоморфных во внутренности компакта E и непрерывных на компакте функций в sup-норме).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν – линейный непрерывный функционал на пространстве $H(E)$ (соответственно $A(E)$, если E – компакт), аннулирующий систему $\{f(\lambda_q z)\}$. Он реализуется как комплекснозначная конечная борелевская σ -аддитивная мера с носителем, компактно вложенным в E . Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \int_{\text{supp } \nu} f(\lambda z) d\nu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.6)$$

Функция F целая и $F(\lambda_q) = 0, q \in \mathbb{N}$. В обозначениях п. 1 имеем

$$|F(\lambda)| \leq \int_{\text{supp } \nu} |f(\lambda z)| d|\nu|(z) \leq |\nu|(\mathbb{C}) \exp B^*(\lambda; F, \text{supp } \nu). \quad (2.7)$$

Отсюда по предложению 1.1 следует, что F – целая функция конечного типа при порядке ρ . В силу непрерывности 2π -периодической ρ -тригонометрически выпуклой функции h из предложений 1.1 и 1.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная C_ε такая, что

$$B^*(te^{i\theta}; F, \text{supp } \nu) \leq (h(\theta) + \varepsilon)t^\rho + C_\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Согласно (2.7) это означает, что индикатор роста h_F целой функции F при порядке ρ не превышает h , т.е. $S_\rho(k, h_F) \leq S_\rho(k, h)$ ввиду неотрицательности функции k . Тем самым, выполнение условий теоремы 2.1 влечет выполнение одного из неравенств (2.3)–(2.5) с заменой h на h_F . По теореме единственности, доказанной в конце работы [12] (там используется определение в форме 2.1'), это означает, что $F(\lambda) \equiv 0$. Раскладывая целую функцию f по степеням, из (2.6) получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m \int_{\text{supp } \nu} z^m d\nu(z) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Так как $a_m \neq 0$ при всех m , мера ν аннулирует все степени z^m , которые полны в $H(E)$, когда E – односвязная область, и полны в $A(E)$ по теореме Мергеляна, если E – компакт. Значит $\nu = 0$ и по известному следствию теоремы Хана–Банаха система функций $\{f(\lambda_q z)\}$ полна.

Теорема доказана.

3. Формулировка теоремы о полноте для многих переменных и теорема единственности. Пусть S^{m-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^m$ с центром в нуле, $D'(S^{m-1})$ – пространство обобщенных функций на S^{m-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [16]. Полунепрерывная сверху интегрируемая на S^{m-1} функция $h: S^{m-1} \rightarrow [-\infty, +\infty)$ называется *субсферической функцией порядка ρ* , если $\mathcal{L}_\rho h \geq 0$, где оператор $\mathcal{L}_\rho$ определяется как $\mathcal{L}_\rho = \Delta_\theta + \rho(\rho + m - 2)$, Δ_θ – сферическая часть оператора Лапласа [15, с. 115], а неравенство выполнено в $D'(S^{m-1})$. При этом меру $s_h^{(\rho)} = \mathcal{L}_\rho h$ на S^{m-1} называем *ассоциированной с h мерой* (аналог (0.1) и (2.1)).

Класс всех (соответственно неотрицательных) субсферических функций порядка ρ обозначим через SS_ρ (соответственно через SS_ρ^+).

Другие эквивалентные определения субсферических функций и их свойства имеются в [10], [16]. Из них следует, что если $\gamma \leq \rho$, то $\text{SS}_\gamma^+ \subset \text{SS}_\rho^+$. Поэтому далее считаем, что каждая субсферическая функция задается вместе с ее порядком. Субсферические функции порядка 0 – это постоянные.

Функция h – субсферическая функция порядка $\rho > 0$ тогда и только тогда, когда функция $H(x) = h(x/|x|)|x|^\rho$, $H(0) = 0$, $\rho > 0$, где $|x|$ – евклидова норма элемента $x \in \mathbb{R}^m$, является субгармонической функцией в $\mathbb{R}^m$ [10].

При $m = 2$ класс субсферических функций порядка ρ совпадает с классом 2π -периодических ρ -тригонометрически выпуклых функций. Примерами субсферических функций порядка ρ служат сужения на единичную сферу индикаторов (плюри)субгармонических и целых функций конечного типа при порядке ρ [16], [10], и при $\rho = 1$ опорных функций выпуклых ограниченных множеств из $\mathbb{R}^m$. По предложению 1.2 сужения на единичную сферу в $\mathbb{C}^n$, отождествленном с $\mathbb{R}^{2n}$, взаимного индикатора $H_\rho^*(\lambda; u, E)$ – функции из SS_ρ , если u конечного типа при порядке ρ и E ограничено.

Для полунепрерывной сверху функции k на S^{m-1} при $h \in \text{SS}_\rho$ полагаем

$$S_\rho(k, h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{S^{m-1}} k \, ds_h^{(\rho)}.$$

Это многомерный аналог (2.2) и правой части (0.4).

Через σ_p обозначаем меру Лебега–Хаусдорфа порядка p в $\mathbb{R}^m$, т.е. для множества $E \subset \mathbb{R}^m$

$$\sigma_p(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_p^\varepsilon(E), \quad \sigma_p^\varepsilon(E) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \omega_p \sum_j r_j^p,$$

где инфимум берется по всем покрытиям множества E не более чем счетными множествами шаров из $\mathbb{R}^m$ радиусов $r_j < \varepsilon$, ω_p – объем единичного шара в $\mathbb{R}^p$ [17, п. 6].

Пусть k – неотрицательная субсферическая функция порядка γ на единичной сфере S^{2n-1} из $\mathbb{C}^n$, отождествленного с $\mathbb{R}^{2n}$, т.е. k – функция на $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$,

$$\|k\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{k(\zeta) : \zeta \in S^{2n-1}\}.$$

Для $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, аналогично (0.2) полагаем

$$\Lambda(t; k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Lambda \cap t\mathbf{B}} k\left(\frac{z}{|z|}\right) d\sigma_{2n-2}(z), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{B}$ – единичный открытый шар в $\mathbb{C}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Верхнюю (k, ρ) -плотность $\overline{D}_k(\Lambda; \rho)$ множества $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ для функции $k \in \text{SS}_\gamma^+$ определим следующим образом:

$$\overline{D}_k(\Lambda; \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r^{\rho+2n-2}} \int_1^r \left(\frac{\gamma+2n-2}{\gamma+n-1} \left(\frac{r}{t} \right) \right)^{\gamma+2n-2} \\ \quad + \frac{\gamma}{\gamma+n-1} \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt & \text{при } \gamma < \rho, \\ \overline{\lim}_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \int_r^{ar} \frac{\Lambda(t; k)}{t^{\rho+2n-1}} dt & \text{при } \gamma = \rho, \\ \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r^{\rho+2n-2}} \left(2\|k\| r^{2n-2} \int_1^r \frac{\Lambda(t; 1)}{t^{2n-1}} dt \right. \\ \quad - \frac{\gamma}{\gamma+n-1} \int_1^r \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt \\ \quad \left. + \frac{\gamma+2n-2}{\gamma+n-1} \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t} \right)^{\gamma+2n-2} \frac{\Lambda(t; k)}{t} dt \right) & \text{при } \gamma > \rho. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $n = 1$ верхняя (k, ρ) -плотность $\overline{D}_k(\Lambda; \rho)$ в точности совпадает с определением 2.1.

ТЕОРЕМА 3.1 (о полноте). Пусть f – целая функция в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, конечного типа при порядке $\rho > 0$ и все частные производные (по комплексным переменным) функции f в нуле отличны от 0, E – область Рунге или полиномиально выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$, h^* – сужение на единичную сферу $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ взаимного индикатора функции f и множества E при порядке ρ , h – непрерывная субсферическая функция порядка ρ и $h^* \leq h$ на S^{2n-1} , $k \in SS_\gamma^+$. Если выполнено неравенство

1) при $\gamma < \rho$

$$\overline{D}_k(\Lambda; \rho) > \frac{1}{(\rho - \gamma)(\rho + \gamma + 2n - 2)} S_\rho(k, h),$$

или

2) при $\gamma = \rho$

$$\overline{D}_k(\Lambda; \rho) > \frac{1}{\rho + 2n - 2} S_\rho(k, h),$$

или

3) при $\gamma > \rho$

$$\overline{D}_k(\Lambda; \rho) > \frac{\|k\|}{\rho(\rho + 2n - 2)} S_\rho(1, h) + \frac{1}{(\gamma - \rho)(\gamma + \rho + 2n - 2)} S_\rho(k, h),$$

то система функций $\{f(\lambda \times z) : \lambda \in \Lambda\}$ полна на E .

При подстановке $n = 1$ эта теорема совпадает с формулировкой теоремы 2.1 с несколько более мягкими условиями на топологию пространства функций на E , когда E – компакт. Ограничение $h^* \leq h$ при $n = 1$ несущественно, так как в этом случае функция h^* всегда непрерывна.

Для доказательства теоремы 3.1 нам потребуется

ТЕОРЕМА 3.2 (единственности). Пусть F – целая функция в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, конечного типа при порядке $\rho > 0$ с радиальным регуляризованным индикатором (при порядке $\rho > 0$), не превышающим непрерывную функцию $h \in SS_\rho$. Если Λ – подмножество нулевого множества $\Lambda_F = \{z \in \mathbb{C}^n : F(z) = 0\}$ функции F и для $k \in SS_\gamma^+$ выполнено одно из соотношений 1)–3) теоремы 3.1, то $F(z) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (случай $\gamma \leq \rho$). Из условий на рост целой функции F следует, что в силу непрерывности положительно однородной степени ρ функции h для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε , для которой (см. [14, следствие 7.3]) $\ln |F(z)| \leq h_\varepsilon(z/|z|) + C_\varepsilon$, $z \in \mathbb{C}^n$, где $h_\varepsilon = h + \varepsilon$. Легко показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ ассоциированная с h_ε мера слабо сходится к мере $s_h^{(\rho)}$. Поэтому строгие неравенства в 1)–3) справедливы и после замены h на h_ε для достаточно малых ε . Следовательно, не умаляя общности, можно считать в условиях теоремы выполненным неравенство

$$\ln |F(z)| \leq h\left(\frac{z}{|z|}\right) |z|^\rho + \text{const}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (3.2)$$

Обозначим через μ_F распределение масс Рисса субгармонической функции $\ln |F|$, если F – ненулевая функция, и введем функцию

$$\mu(t; k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t\mathbf{B}} k\left(\frac{z}{|z|}\right) d\mu_F(z).$$

Из известной формулы Пуанкаре–Лелона следует (см. рассуждения в конце [18, § 3]), что ввиду совпадения меры Лебега–Хаусдорфа порядка $2n - 2$ на аналитическом множестве Λ_F с мерой, задаваемой $(2n - 2)$ -мерной площадью на Λ_F в евклидовой метрике, справедливо соотношение

$$\Lambda(t; k) \leq \frac{\theta_{2n}}{2\pi} \mu(t; k),$$

где $\theta_2 = 2\pi$, а при $m \geq 3$ $\theta_m = (m - 2)s_m$, s_m – площадь сферы $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$.

В введенных обозначениях соотношения 1) или 2) теоремы 3.1 при условии (3.2) в точности совпадают с соответствующими условиями теоремы единственности для субгармонической функции $u = \ln |F|$ из [10] после определенной перенормировки. Применяя эту теорему, из ее заключения имеем $u \equiv -\infty$, что и завершает доказательство теоремы 3.2 в случае $\gamma \leq \rho$.

Доказательство теоремы 3.2 при $\gamma > \rho$ не следует из теоремы единственности из [10] для субгармонических функций и требует некоторой подготовки. Оно приводится в следующем пункте.

4. Специальные функции Йенсена и доказательство теоремы 3.2 при $\gamma > \rho$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 [18]. Функцию V , определенную в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $m \geq 3$, назовем *функцией Йенсена* (относительно точки 0), если выполнены следующие условия:

- 1) V субгармонична и неотрицательна в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$;
- 2) $V(y) \leq |y|^{-m+2} + O(1)$, $|y| \rightarrow 0$ ($|y|$ – евклидова норма y);
- 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт K_ε такой, что $V(y) \leq \varepsilon$ при $y \in \mathbb{R}^m \setminus K_\varepsilon$.

Класс всех функций Йенсена обозначим через $\mathcal{J}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если V – функция Йенсена на $\mathbb{C}^n$, отождествленном с $\mathbb{R}^{2n}$, $n > 1$, то при любом $r > 0$ функция $r^{2-2n}V(\zeta/r)$ – также функция Йенсена по переменной $\zeta \in \mathbb{C}^n$.

Сохранение свойств из определения 4.1, характеризующих функции Йенсена, в предложении 4.1 очевидны.

Для субгармонической в $\mathbb{R}^m$ функции u через μ_u обозначим распределение масс Рисса функции u , т.е. $\mu_u = \theta_m^{-1} \Delta u$ в смысле теории распределений.

Для целой функции f в $\mathbb{C}^n$ положим $\Lambda_f = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}$ – нулевое множество функции f .

Важность понятия функций Йенсена связана со следующей оценкой нулевых множеств, которая в [18] доказана для голоморфных в области функций.

ТЕОРЕМА Б [18]. Пусть $n > 1$, u – субгармоническая, а f – целая в $\mathbb{C}^n$ функции, $f(z) \not\equiv 0$, функция u ограничена в единичном шаре $\mathbf{B} \subset \mathbb{C}^n$. Если $\log |f| \leq u$ на $\mathbb{C}^n$, то найдется постоянная C такая, что

$$\int_{\Lambda_f \setminus \mathbf{B}} V d\sigma_{2n-2} \leq \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!} \int_{\mathbb{C}^n} V d\mu_u + C \quad \text{для всех } V \in \mathcal{J}.$$

Введем в рассмотрение специальные функции Йенсена на $\mathbb{C}^n$. Пусть по определению $b^+ = \max\{0, b\}$, $b \in \mathbb{R}$. Пусть k – субсферическая функция на единичной сфере из $\mathbb{C}^n$ и $k \in \text{SS}_\gamma^+$. Положим

$$V_k(\zeta) = \begin{cases} \frac{n-1}{\gamma+n-1} \frac{k(\zeta/|\zeta|)}{\|k\|} |\zeta|^{-(\gamma+2n-2)}, & \text{если } |\zeta| \geq 1, \\ \frac{n-1}{\gamma+n-1} \frac{k(\zeta/|\zeta|)}{\|k\|} |\zeta|^\gamma + (|\zeta|^{2-2n} - 1)^+, & \text{если } 0 < |\zeta| < 1. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. $V_k(\zeta)$ – функция Йенсена по переменной $\zeta \in \mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неотрицательность этой функций и выполнение условий 2) и 3) из определения 4.1 очевидны по построению этой функции. В доказательстве нуждается только ее субгармоничность при $\zeta \neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$W(\zeta) = W(t\theta) = k(\theta)t^\gamma, \quad t = |\zeta|, \quad \theta = \frac{\zeta}{|\zeta|} \in S^{2n-1}.$$

Эта функция субгармоническая в $\mathbb{C}^n$ по одному из эквивалентных определений субсферических функций порядка γ [10, предложение 1.3]. Тогда функция

$$W^*(t\theta) = \frac{1}{t^{2n-2}} W\left(\frac{\theta}{t}\right) = k(\theta)t^{-(\gamma+2n-2)}, \quad t > 0,$$

субгармоническая в $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ как преобразование Кельвина относительно единичной сферы субгармонической функции W [19, с. 205].

Следовательно, функция V_k субгармоническая всюду за исключением, быть может, нуля и единичной сферы, так как строится из функций W при $|\zeta| > 1$ и W^* при $0 < |\zeta| \leq 1$, а также гармонической при $0 < |\zeta| < 1$ функции $|\zeta|^{2-2n} - 1$.

При проверке субгармоничности на единичной сфере предположим сначала, что k – функция класса C^2 на единичной сфере.

Нам потребуется

ЛЕММА 4.1. Пусть u – субгармоническая функция в допустимых в смысле [19, 1.4.4] областях D_1 и D_2 из $\mathbb{R}^m$, S – общая часть их границы и u непрерывно продолжена на $D = D_1 \cup S \cup D_2$, $\partial/\partial n_i$ – оператор дифференцирования по внешней нормали к области D_i , $i = 1, 2$. Если $u \in C^2$ в $\overline{D_i}$, $i = 1, 2$, и выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} \leq 0 \quad \text{на } S,$$

то u – субгармоническая в D функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ – бесконечно дифференцируемая финитная неотрицательная функция в D . По формуле Грина [19, 1.4.4] имеем

$$\int_{D_i} (u \Delta \psi - \psi \Delta u) = \int_S \left(u \frac{\partial \psi}{\partial n_i} - \psi \frac{\partial u}{\partial n_i} \right), \quad i = 1, 2.$$

Складывая эти тождества, получаем

$$\int_D u \Delta \psi = \int_{D_1 \cup D_2} u \Delta \psi = \int_{D_1 \cup D_2} \psi \Delta u - \int_S \psi \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2} \right) \geq 0,$$

т.е. $\Delta u \geq 0$, значит u – субгармоническая в D функция. Лемма доказана.

Согласно лемме для доказательства субгамоничности V_k на единичной сфере достаточно показать, что сумма производных по внешней нормали к единичной сфере относительно областей $D_1 = \mathbf{B} \setminus \{0\}$ и $D_2 = \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{B}$ неположительна.

При $t = |\zeta| \geq 1$ и $\theta = \zeta/|\zeta| \in S^{2n-1}$ имеем

$$\frac{\partial V_k}{\partial n_2}(\theta) = -\frac{n-1}{\gamma+n-1} \frac{k(\theta)}{\|k\|} \frac{\partial t^{-(\gamma+2n-2)}}{\partial t} \Big|_{t=1} = (\gamma+2n-2) \frac{n-1}{\gamma+n-1} \frac{k(\theta)}{\|k\|},$$

а при $t = |\zeta| \leq 1$

$$\frac{\partial V_k}{\partial n_1}(\theta) = \frac{n-1}{\gamma+n-1} \frac{k(\theta)}{\|k\|} \frac{\partial t^\gamma}{\partial t} \Big|_{t=1} + \frac{\partial(t^{2-2n}-1)}{\partial t} \Big|_{t=1} = \gamma \frac{n-1}{\gamma+n-1} \frac{k(\theta)}{\|k\|} + (2-2n).$$

Складывая полученные значения производных по внешней нормали, получаем $2(n-1) \times k(\theta)/\|k\| + (2-2n) \leq 0$. По лемме это означает субгармоничность V_k всюду вне нуля.

От предположения, что k – функция класса C^2 на единичной сфере, легко избавиться, аппроксимируя произвольную функцию $k \in \text{SS}_\gamma^+$ монотонно убывающей последовательностью субсферических функций класса C^2 (см. [10, предложение 1.7]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2 (при $\gamma > \rho$). Допустим, что F – ненулевая целая функция. Так как F конечного типа при порядке ρ , то выполнены соотношения

$$\Lambda(t; k) = O(t^{\rho+2n-2}), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \text{и} \quad \Lambda(1; k) < +\infty, \quad k \in \text{SS}_\gamma^+. \quad (4.1)$$

В начале доказательства теоремы в п. 3 было показано, что можно считать выполненным условие (4.2), где функция $H(z) = h(z/|z|)|z|^\rho$ субгармоническая. Тогда по теореме Б и предложениям 4.1 и 4.2 при $r > 0$ выполнено

$$\int_{\Lambda_F \setminus \mathbf{B}} V_k \left(\frac{\zeta}{r} \right) d\sigma_{2n-2}(\zeta) \leq \frac{2\pi^{n-1}}{(n-2)!} \int_{\mathbb{C}^n} V_k \left(\frac{\zeta}{r} \right) d\mu_H(\zeta) + \text{const} \cdot r^{2n-2}. \quad (4.2)$$

Как отмечено в [10, (3.4)],

$$d\mu_H = \frac{1}{\theta_{2n}} ds_h^{(\rho)} \otimes t^{\rho+2n-3} dt, \quad \text{где} \quad \theta_{2n} = \frac{4\pi^n}{(n-2)!}.$$

Отсюда и из явного вида функции V_k непосредственные вычисления в сферических координатах дают, что правая часть соотношения (4.2) равна

$$\begin{aligned} I_R(r) = 2(n-1) & \left(\frac{1}{\rho(\rho+2n-2)} S_\rho(1, h) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\|k\|(\gamma-\rho)(\gamma+\rho+2n-2)} S_\rho(k, h) \right) r^{\rho+2n-2} + \text{const} \cdot r^{2n-2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом левая часть (4.2) по определению функций V_k при $r \geq 1$ равна

$$\begin{aligned} I_L(r) = & \int_{\substack{1 \leq |\zeta| < r \\ \zeta \in \Lambda_F \setminus \mathbf{B}}} \left(\left(\frac{r}{|\zeta|} \right)^{2n-2} - 1 \right) d\sigma_{2n-2}(\zeta) \\ & + \frac{n-1}{\|k\|(\gamma+n-1)} \left(\int_{\substack{1 \leq |\zeta| < r \\ \zeta \in \Lambda_F \setminus \mathbf{B}}} \left(\frac{|\zeta|}{r} \right)^\gamma k \left(\frac{\zeta}{|\zeta|} \right) d\sigma_{2n-2}(\zeta) \right. \\ & \left. + \int_{\substack{|\zeta| \geq r \\ \zeta \in \Lambda_F \setminus \mathbf{B}}} \left(\frac{r}{|\zeta|} \right)^{\gamma+2n-2} k \left(\frac{\zeta}{|\zeta|} \right) d\sigma_{2n-2}(\zeta) \right). \end{aligned}$$

Используя (3.1), при $t = |\zeta|$ левую часть можно переписать в виде

$$\begin{aligned} I_L(r) = & \int_1^r \left(\left(\frac{r}{t} \right)^{2n-2} - 1 \right) d\Lambda_F(t; 1) \\ & + \frac{n-1}{\|k\|(\gamma+n-1)} \left(\int_1^r \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma d\Lambda_F(t; k) + \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t} \right)^{\gamma+2n-2} d\Lambda_F(t; k) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая (4.1), при $r \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} I_L(r) = & 2r^{2n-2}(n-1) \int_1^r \frac{\Lambda_F(t; 1)}{t^{2n-1}} dt + \frac{n-1}{\|k\|(\gamma+n-1)} \left(-\gamma \int_1^r \left(\frac{t}{r} \right)^\gamma \frac{\Lambda_F(t; k)}{t} dt \right. \\ & \left. + (\gamma+2n-2) \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t} \right)^{\gamma+2n-2} \frac{\Lambda_F(t; k)}{t} dt \right) + O(r^{2n-2}). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения, тождества (4.3) и неравенства $I_L(r) \leq I_R(r)$, совпадающего с (4.2), учитывая определение верхней (k, ρ) -плотности при $\gamma > \rho$, после деления обеих частей неравенства $I_L(r) \leq I_R(r)$ на $2(n-1)r^{\rho+2n-2}/\|k\|$, устремляя r к $+\infty$, получаем

$$\overline{D}_k(\Lambda_F; \rho) \leq \frac{\|k\|}{\rho(\rho+2n-2)} S_\rho(1, h) + \frac{1}{(\gamma-\rho)(\gamma+\rho+2n-2)} S_\rho(k, h).$$

В силу включения $\Lambda \subset \Lambda_F$ в последнем неравенстве Λ_F можно заменить на Λ . Это противоречит соотношению 3) теоремы 3.1. Следовательно, F — нулевая функция, и теорема 3.2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3.1 (о полноте) и ее обобщение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть ν — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(E)$, аннулирующий систему $\{f(\lambda \times z) : \lambda \in \Lambda\}$. Он реализуется как комплекснозначная конечная борелевская σ -аддитивная мера с носителем, компактно вложенным в E , и

$$\int_{\text{supp } \nu} f(\lambda \times z) d\nu(z) = 0, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = \int_{\text{supp } \nu} f(\lambda \times z) d\nu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n. \quad (5.1)$$

Функция F целая и $F(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda$. В обозначениях п. 1 имеем

$$|F(\lambda)| \leq \int_{\text{supp } \nu} |f(\lambda \times z)| d\nu(z) \leq |\nu|(\mathbb{C}^n) \exp B^*(\lambda; F, \text{supp } \nu). \quad (5.2)$$

Отсюда по предложению 1.1 следует, что F – целая функция конечного типа при порядке ρ . В силу непрерывности субсферической функции h из предложений 1.1 и 1.2 и из [14, следствие 7.3] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная C_ε такая, что

$$B^*(z; F, \text{supp } \nu) \leq \left(h\left(\frac{z}{|z|}\right) + \varepsilon \right) |z|^\rho + C_\varepsilon, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Согласно (5.2) это означает, что радиальный регуляризованный индикатор функции F (при порядке $\rho > 0$) не превышает непрерывную функцию $h \in \text{SS}_\rho$. По теореме единственности 3.2 $F(\lambda) \equiv 0$. Раскладывая целую функцию f по степеням, из (5.1) получаем

$$\sum_m a_m \lambda^m \int_{\text{supp } \nu} z^m d\nu(z) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

где m пробегает множество всех мультииндексов $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, а все коэффициенты разложения $a_m \neq 0$ как частные производные в нуле функции f . Следовательно, мера ν аннулирует все степени z^m . Многочлены полны в области Рунге по определению, а на полиномиально выпуклом компакте по теореме Ока–Вейля. Значит, $\nu = 0$ и по известному следствию из теоремы Хана–Банаха система функций $\{f(\lambda \times z) : \lambda \in \Lambda\}$ полна на E .

Теорема доказана.

Следуя И.И. Ибрагимову [4, гл. IV, § 3, п. 5], укажем возможное обобщение теоремы 3.2.

Пусть система функций $\{a_m(z) : m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n\}$, голоморфных на множестве $E \subset \mathbb{C}^p$, полна на E .

Для мультииндексов m полагаем

$$|m| \stackrel{\text{def}}{=} m_1 + m_2 + \dots + m_n, \quad m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n.$$

Пусть $\rho > 0$. Предположим, что

$$|m|^{1/\rho} \left(\sup_{z \in E} |a_m(z)| \right)^{1/|m|} = O(1), \quad m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n.$$

Тогда [15, теорема 3.1.1] ряд

$$f(z, \lambda) = \sum_m a_m(z) \lambda^m, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

сходится равномерно по $z \in E$ и, в частности, $f(z, \lambda)$ – целая функция конечного типа при порядке ρ в $\mathbb{C}^n$ по λ при каждом $z \in E$. Более того, величина типа целых по λ функций $f(z, \lambda)$ при порядке ρ равномерно ограничена по $z \in E$. Положим

$$B(\lambda; f, E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z \in E} \ln |f(z, \lambda)|, \quad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

и точно так же, как в п. 1, через функцию $B(\lambda; f, E)$ определим взаимный индикатор $H_\rho^*(\lambda; f, E)$ для семейства f и множества E при порядке ρ . При введенных ограничениях взаимный индикатор – плюрисубгармоническая функция конечного типа при порядке ρ , а его сужение на единичную сферу – субсферическая функция порядка ρ .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть во введенных обозначениях и условиях сужение взаимного индикатора семейства f и множества E на единичную сферу в $\mathbb{C}^n$ не превышает некоторой непрерывной субсферической функции h порядка ρ , $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$. Если для $k \in SS_\gamma^+$ выполнено одно из соотношений 1)–3) теоремы 3.1, то система голоморфных функций $\{f(z, \lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ полна на $E \subset \mathbb{C}^p$.

Доказательство этой теоремы практически не отличается от доказательства теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда $\rho = 1$, $f(z) = \exp(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$, $z \in \mathbb{C}^n$, а E – выпуклая область Рунге в $\mathbb{C}^n$, можно показать, что теорема 3.2 останется верной, если строгие неравенства “ $>$ ” в соотношениях 1)–3) заменить на нестрогие “ $\geq$ ”. В такой ситуации теорема 3.2 точна. В этом можно убедиться, выбирая в качестве множества Λ нулевые множества целых функций порядка 1 и вполне регулярного роста с радиальным индикатором сколь угодно близким снизу к опорной функции области E .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфонд А. О. Sur les systèmes complets des fonctions analytiques // Матем. сб. 1938. Т. 4(46). С. 149–156.
- [2] Маркушевич А. И. О базисе в пространстве аналитических функций // Матем. сб. 1945. Т. 17(59). С. 211–252.
- [3] Ибрагимов И. И. О полноте системы аналитических функций $\{f(\alpha_k z)\}$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13. № 1. С. 45–54.
- [4] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.
- [5] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Физматгиз, 1956.
- [6] Леонтьев А. Ф. О полноте одной системы аналитических функций // Матем. сб. 1952. Т. 31(72). С. 381–413.
- [7] Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981.
- [8] Лохин И. Ф. О полноте систем функций вида $\{f(\lambda_n z)\}$ // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. С. 141–155.
- [9] Лохин И. Ф. О полноте систем функций вида $\{f(\lambda_n z)\}$ // Матем. сб. 1954. Т. 35(77). С. 215–222.
- [10] Хабибуллин Б. Н. Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка // Матем. сб. 1991. Т. 35. № 6. С. 811–827.
- [11] Гришин А. Ф., Содин М. Л. Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 50. Харьков: Вища школа, 1988. С. 47–61.
- [12] Хабибуллин Б. Н. Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 5. С. 1101–1123.
- [13] Ронкин Л. И. Целые функции // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–36.
- [14] Груман Л., Лелон П. Целые функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1989.
- [15] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
- [16] Кондратюк А. А. Сферические гармоники и субгармонические функции // Матем. сб. 1984. Т. 125. № 2. С. 147–166.
- [17] Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
- [18] Хабибуллин Б. Н. Оценки объема нулевых множеств голоморфных функций // Изв. вузов. Матем. 1992. № 3. С. 58–63.
- [19] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980.