Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Ахунжанов, Н. Г. Мощевитин, О векторах заданного диофантова типа, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 328–338

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2818>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:35:26

УДК 511.3

О ВЕКТОРАХ ЗАДАННОГО ДИОФАНТОВА ТИПА

Р. К. Ахунжанов, Н. Г. Мощевитин

Для функции $\varphi(y) = o(y^{-1/s})$, $y \rightarrow \infty$, доказывается существование векторов $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^s$, допускающих для любого $\varepsilon > 0$ бесконечно много совместных $\varphi(1+\varepsilon)$ -приближений, но не допускающих ни одного совместного φ -приближения.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть $\varphi(y)$ – некоторая вещественнозначная функция вещественного аргумента. Натуральное число p называется *совместным φ -приближением к вектору $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$* , если

$$\max_{1 \leq j \leq s} \|p\alpha_j\| = \max_{1 \leq j \leq s} \min_{q \in \mathbb{Z}} |p\alpha_j - q| \leq \varphi(p).$$

В работе [1] Дж. Касселсом доказано, что существует константа C_s , зависящая только от размерности s , такая, что найдется континуальное семейство векторов $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^s$, не допускающих ни одного совместного φ -приближения с функцией $\varphi(y) = C_s y^{-1/s}$. В дальнейшем этот результат обобщался и усиливался в работах Г. Давенпорта и В. Шмидта (см. книгу [2]).

С другой стороны, в работах [3], [4] В. Ярником установлен следующий результат. Пусть $\varphi(y)y^{1/s}$ убывает при $y \rightarrow \infty$, а $\lambda(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Тогда найдется континуальное семейство векторов $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^s$, допускающих бесконечно много совместных φ -приближений, но не допускающих более чем конечного числа $\varphi\lambda$ -приближений.

В статье [5] было доказано, что если $\varphi(y) = O(y^{-1/s})$, $y \rightarrow \infty$, то найдется континуальное семейство векторов $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^s$, допускающих бесконечно много совместных φ -приближений, но не допускающих ни одного совместного $\sigma_s \varphi$ -приближения с некоторой очень маленькой константой $\sigma_s < 1$. Отметим, что значение константы σ_s из процитированной теоремы работы [5] можно сделать существенно лучше, используя соображения Давенпорта–Шмидта из [6], [2], однако идеи из этих работ не позволяют полностью устранить имеющийся зазор в константу $\sigma_s < 1$.

В настоящей работе мы в случае $\varphi(y) = o(y^{-1/s})$, $y \rightarrow \infty$, доказываем существование векторов $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^s$, допускающих для любого $\varepsilon > 0$ бесконечно много совместных $\varphi(1+\varepsilon)$ -приближений, но не допускающих ни одного совместного φ -приближения, и, тем самым, в случае $\varphi(y) = o(y^{-1/s})$ устраняем зазор в константу. Особо отметим, что наши методы *не* устраняют зазор в константу в случае $\varphi(y) = O(y^{-1/s})$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-00912, № НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ № МД-3321.2004.1 и фонда INTAS.

2. Формулировки и результаты. Пусть $F(\bar{y}): \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ – лучевая функция некоторого замкнутого, симметричного относительно $\bar{0}$, выпуклого, ограниченного тела $U \subset \mathbb{R}^s$; тогда $U = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^s \mid F(\bar{y}) \leq 1\}$. Тело $V = \sigma U$ и все его параллельные переносы мы будем называть *шаром* с радиусом σ . Положим

$$b = \left(1 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^s\right)^{-1}, \quad c = C(s)\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^s b\right),$$

где

$$C(s) = \frac{2(s+1)^{1/(2s)}}{V(s)^{1/s}},$$

а $V(s)$ – объем s -мерного шара единичного радиуса. Далее, определим

$$A = \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \frac{b}{c}, \quad B = \frac{3}{2}c;$$

здесь для величин A и B выполнено

$$A \sim \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \sqrt{\frac{\pi e}{2s}}, \quad B \sim \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2s}{\pi e}},$$

и

$$R(U) = \max_{\bar{y} \in U} |\bar{y}|.$$

Заметим, что

$$\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^s \quad |\bar{y}| \leq F(\bar{y})R(U). \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi(p): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонная невозрастающая положительная функция и $\psi(1) \leq A/R(U)$. Тогда найдется континуальное семейство векторов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ таких, что

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\bar{\alpha} - \bar{a}) \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} (1 - B \cdot R(U)\psi(p)),$$

и неравенство

$$\min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\bar{\alpha} - \bar{a}) \leq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} (1 + B \cdot R(U)\psi(p))$$

имеет бесконечно много решений.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть

$$F(\bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq s} |y_i|, \quad \psi(1) \leq \frac{A}{\sqrt{s}}.$$

Тогда найдется континуальное семейство векторов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ таких, что

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \max_{1 \leq i \leq s} \|p\alpha_i\| \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} (1 - B \cdot \sqrt{s}\psi(p)),$$

и неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq s} \|p\alpha_i\| \leq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} (1 + B \cdot \sqrt{s}\psi(p))$$

имеет бесконечно много решений.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть

$$F(\bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq s} |y_i|,$$

$$\psi(p) = o(1) \quad \text{при } p \rightarrow \infty, \quad \psi(1) \leq \frac{A}{2\sqrt{s}}.$$

Тогда найдется континуальное семейство векторов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ таких, что

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \max_{1 \leq i \leq s} \|p\alpha_i\| \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq s} \|p\alpha_i\| \leq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}}(1 + \varepsilon)$$

имеет бесконечно много решений.

3. Лучи и цилиндры. Рассматривается евклидово пространство $\mathbb{R}^{s+1}$, отнесенное к декартовым координатам $(x, y_1, \dots, y_s)$. Пусть $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \mathbb{R}^s$; тогда будем обозначать через $\ell(\bar{\gamma})$ луч, исходящий из начала координат $\bar{0}$ в полупространство $\{x > 0\}$, направляющий вектор которого $(1, \gamma_1, \dots, \gamma_s)$. Пусть заданы луч $\ell = \ell(\bar{\beta})$, натуральное число p и действительное число $\sigma > 0$. Мы будем рассматривать цилиндры вида

$$\Pi = \Pi(\ell, p, \sigma) = \{\bar{z} = (x, y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{R}^{s+1} \mid 0 \leq x \leq p, F(x\bar{\beta} - \bar{y}) \leq \sigma\}.$$

Будем говорить, что луч $k = k(\bar{\alpha})$ *протыкает* цилиндр $\Pi = \Pi(\ell(\bar{\beta}), p, \sigma)$, если

$$F(p\bar{\alpha} - p\bar{\beta}) \leq \sigma.$$

Взаимное расположение луча k и цилиндра Π схематически изображено на рис. 1. В этом случае мы будем писать $\Pi \succ k$.

Рис. 1. Луч протыкает цилиндр

4. Вспомогательные утверждения. В дальнейшем нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, которые мы сформулируем в виде лемм.

Сделаем одно замечание. Если мы рассматриваем s -мерное множество M в пространстве $\mathbb{R}^{s+1}$, то его *внутренностью* мы будем называть множество его внутренних точек как s -мерного множества. *Границей* M мы будем называть множество $\partial M = M \setminus (\text{int } M)$.

ЛЕММА 1. Пусть $\bar{\zeta} = (p, a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^s$, $\text{НОД}(p, a_1, \dots, a_s) = 1$ и $\max(p, |a_1|, \dots, |a_s|) = p$. Тогда существует вполне рациональная гиперплоскость π размерности s такая, что $\bar{0}, \bar{\zeta} \in \pi$ и решетка $\Gamma = \mathbb{Z}^{s+1} \cap \pi$ имеет определитель $\det \Gamma \leq C(s)p^{1/s}$.

СЛЕДСТВИЕ. Решетка $\mathbb{Z}^{s+1}$ содержится в объединении гиперплоскостей параллельных гиперплоскости π , причем евклидово расстояние $h = 1/\det \Gamma$ между соседними параллельными гиперплоскостями удовлетворяет неравенству

$$h \geq \frac{1}{C(s)p^{1/s}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Рассмотрим s -мерную решетку целых чисел

$$\Lambda = \{\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{Z}^{s+1} \mid y_0 p + y_1 a_1 + \dots + y_s a_s = 0\}.$$

Определитель этой решетки равен $\det \Lambda = |\bar{\zeta}|$. В силу теоремы Минковского о выпуклом теле, существует целочисленный вектор $\bar{y} \in \Lambda$ такой, что

$$0 < |\bar{y}| \leq \frac{2}{V(s)^{1/s}} |\bar{\zeta}|^{1/s} \leq C(s)p^{1/s}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что все y_i , $0 \leq i \leq s$, взаимнопросты. Рассмотрим вполне рациональную гиперплоскость

$$\pi = \{\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}^{s+1} \mid x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_s y_s = 0\}.$$

Очевидно, что $\bar{0}, \bar{\zeta} \in \pi$, и решетка Γ имеет определитель $\det \Gamma = |\bar{y}| \leq C(s)p^{1/s}$.

ЛЕММА 2. Пусть имеется s -мерный шар $E \subset \mathbb{R}^s$ с радиусом σ и гиперплоскость π , проходящая через точку $\bar{\zeta}$, — центр шара E . Тогда найдутся два различных s -мерных шара $E^+, E^- \subset \mathbb{R}^s$ с радиусом $\sigma/2$, обладающие следующими свойствами:

- 1) $E^+ \subset E$, $E^- \subset E$;
- 2) $\pi \cap E^+ \subset \partial E^+$, $\pi \cap E^- \subset \partial E^-$;
- 3) E^+ и E^- лежат по разные стороны от гиперплоскости π ;
- 4) $\bar{\zeta} \in \partial E^+$, $\bar{\zeta} \in \partial E^-$.

5. Специальная последовательность цилиндров. В этом пункте мы построим последовательность цилиндров $\mathcal{P}$ специального вида, которая позволит нам установить существование векторов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$, удовлетворяющих условию теоремы 1. Положим

$$\mathcal{B} = \left\{ \bar{z} = (p, y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^s \mid \min_{\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}^s} F(\bar{y} - \bar{\alpha}) < \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2} cR(U) \psi(p) \right) \right\}.$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $\psi(p): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная невозрастающая положительная функция и

$$\psi(1) \leq \left(\frac{1}{4} \right)^s \frac{b}{cR(U)}.$$

Тогда найдется последовательность цилиндров

$$\mathcal{P}: \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_\nu, \dots,$$

состоящая из цилиндров $\Pi_\nu = \Pi(\ell_\nu, p_\nu, \sigma_\nu)$, обладающих следующими свойствами:

А) выполнено

$$\sigma_\nu = \begin{cases} 2\psi(1), & \text{если } \nu = 1, \\ \frac{\psi(p_{\nu-1})}{2p_{\nu-1}^{1/s}}, & \text{если } \nu > 1; \end{cases}$$

Б) $p_1 = 1$, а при $\nu > 1$ имеет место следующее неравенство:

$$p_\nu \geq \frac{p_{\nu-1}}{cR(U)\psi(p_{\nu-1})};$$

В) $(\text{int } \Pi_\nu) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset$;

Г) грань $\{x = p_\nu\}$ цилиндра Π_ν содержит ровно одну целую точку $\bar{\zeta}_\nu = (p_\nu, a_{1,\nu}, \dots, a_{s,\nu}) \in \mathbb{Z}^{s+1}$, которая является ее центром, и $\max(p_\nu, |a_{1,\nu}|, \dots, |a_{s,\nu}|) = p_\nu$; при этом $\ell_\nu = \ell(\bar{a}_\nu/p_\nu)$ и $\text{НОД}(p_\nu, a_{1,\nu}, \dots, a_{s,\nu}) = 1$;

Д) если $\Pi_\nu \succ \ell(\bar{\alpha})$ при $\nu > 1$, то выполнены неравенства

$$\frac{\psi(p_{\nu-1})}{p_{\nu-1}^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2}cR(U)\psi(p_{\nu-1})\right) \leq F(p_{\nu-1}\bar{\alpha} - \bar{a}_{\nu-1}) \leq \frac{\psi(p_{\nu-1})}{p_{\nu-1}^{1/s}} \left(1 + \frac{3}{2}cR(U)\psi(p_{\nu-1})\right);$$

при этом

$$F(p_{\nu-1}\bar{\alpha} - \bar{a}_{\nu-1}) = \min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p_{\nu-1}\bar{\alpha} - \bar{a});$$

Е) если $\Pi_\nu \succ \ell$ при $\nu > 1$, то $\Pi_{\nu-1} \succ \ell$;

Ж) если выполнены неравенства

$$\frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2}cR(U)\psi(p_\nu)\right) \leq F(p_\nu\bar{\alpha} - \bar{a}_\nu) \leq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \left(1 + \frac{3}{2}cR(U)\psi(p_\nu)\right),$$

$$\text{то } \ell(\bar{\alpha}) \cap \{x \leq p_\nu\} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве цилиндра Π_1 цилиндр $\Pi_1 = \Pi(\ell_1, 1, 2\psi(1))$, где луч ℓ_1 имеет направляющий вектор $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{s+1}$. Легко проверить, что цилиндр Π_1 обладает указанными в основной лемме свойствами А)–Ж).

Мы построим последовательность цилиндров, с началом в цилиндре Π_1 индуктивным образом. Итак, пусть уже имеется последовательность цилиндров $\mathcal{P} : \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_\nu$, обладающая указанными в основной лемме свойствами А)–Ж). Построим цилиндр $\Pi_{\nu+1}$, также обладающий свойствами А)–Ж).

В силу следствия леммы 1 существует вполне рациональная гиперплоскость π_ν размерности s такая, что $\bar{0}, \bar{\zeta}_\nu \in \pi_\nu$ и евклидово расстояние h_ν между соседними гиперплоскостями удовлетворяет неравенству

$$h_\nu \geq \frac{1}{C(s)p_\nu^{1/s}}. \quad (2)$$

Согласно лемме 2 найдется s -мерный шар E_ν^+ с радиусом $\sigma_\nu/2$, содержащийся в грани $\{x = p_\nu\}$ цилиндра Π_ν , причем $\bar{\zeta}_\nu \in \partial E_\nu^+$.

Докажем, что выполнено неравенство

$$\frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \leq \frac{\sigma_\nu}{2}. \quad (3)$$

Действительно, если $\nu = 1$, то это неравенство очевидно выполняется. Если же $\nu > 1$, то из условия основной леммы и предположения индукции имеем

$$\psi(p_\nu) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^s \frac{1}{cR(U)}, \quad p_\nu \geq \frac{p_{\nu-1}}{cR(U)\psi(p_{\nu-1})}, \quad \sigma_\nu = \frac{\psi(p_{\nu-1})}{2p_{\nu-1}^{1/s}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\sigma_\nu}{2} = \frac{\psi(p_{\nu-1})}{4p_{\nu-1}^{1/s}} \geq \frac{\psi(p_\nu)}{4p_\nu^{1/s}(cR(U)\psi(p_\nu))^{1/s}} \geq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}}.$$

Неравенство (3) доказано.

Построим еще один s -мерный шар $\tilde{R}_\nu \subset E_\nu^+$ с радиусом $\psi(p_\nu)/p_\nu^{1/s}$ такой, что $\bar{\zeta}_\nu \in \partial\tilde{R}_\nu$. Это можно сделать, так как выполнено неравенство (3).

Обозначим через $\tilde{\ell}_\nu = \ell(\bar{a}_\nu)$ луч, исходящий из начала координат $\bar{0}$ в центр шара $\tilde{R}_\nu$, и положим

$$\tilde{\Pi}_\nu = \Pi\left(\tilde{\ell}_\nu, p_\nu, \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}}\right).$$

Заметим, что при этом выполнено равенство

$$F(p_\nu \bar{a}_\nu - \bar{a}_\nu) = \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}}. \quad (4)$$

Гранью $\{x = p_\nu\}$ цилиндра $\tilde{\Pi}_\nu$ является этот самый шар $\tilde{R}_\nu$. Поскольку $\tilde{\Pi}_\nu \subset \Pi_\nu$, а внутри цилиндра Π_ν целых точек нет, то $(\text{int } \tilde{\Pi}_\nu) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset$. Нет целых точек и строго внутри s -мерной грани $\tilde{R}_\nu$ цилиндра $\tilde{\Pi}_\nu$. Определим теперь число $p_{\nu+1}$ как наименьшее натуральное число большее p_ν такое, что цилиндр $\Pi(\tilde{\ell}_\nu, q, \psi(p_\nu)/p_\nu^{1/s})$ содержит целую точку строго внутри своей грани $\{x = q\}$.

Через $\bar{\zeta}_{\nu+1}$ обозначим целую точку, фигурирующую в определении числа $p_{\nu+1}$. Положим

$$\bar{\Pi}_\nu = \Pi\left(\tilde{\ell}_\nu, p_{\nu+1}, \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}}\right).$$

Ясно, что $(\text{int } \bar{\Pi}_\nu) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset$.

Обозначим через $\ell_{\nu+1} = \ell(\bar{a}_{\nu+1}/p_{\nu+1})$ луч, исходящий из начала координат $\bar{0}$ и проходящий через точку $\bar{\zeta}_{\nu+1}$, и положим

$$\Pi_{\nu+1} = \Pi\left(\ell_{\nu+1}, p_{\nu+1}, \frac{\psi(p_\nu)}{2p_\nu^{1/s}}\right).$$

Итак, построение цилиндра $\Pi_{\nu+1}$ завершено. Докажем теперь, что так построенный цилиндр $\Pi_{\nu+1}$ удовлетворяет всем условиям индуктивного предположения.

Условие А) индуктивного предположения выполнено по построению.

Докажем, что выполнено условие В) индуктивного предположения

$$(\text{int } \Pi_{\nu+1}) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset. \quad (5)$$

Рассмотрим цилиндр $\bar{\Pi}_\nu^* = \bar{\zeta}_{\nu+1} - \bar{\Pi}_\nu$, получающийся из цилиндра $\bar{\Pi}_\nu$ симметрией относительно начала координат $\bar{0}$ и последующим переносом на вектор $\bar{\zeta}_{\nu+1}$. Ясно,

Рис. 2. (а) Взаимное расположение цилиндров $\bar{\Pi}_\nu$, $\bar{\Pi}_\nu^*$ и $\Pi_{\nu+1}$. (б) Сечение гиперплоскостью $\{x = p\}$, где $0 \leq p \leq p_{\nu+1}$

что $(\text{int } \bar{\Pi}_\nu^*) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset$. Обозначим $T_\nu = \bar{\Pi}_\nu \cup \bar{\Pi}_\nu^*$. Теперь получаем $(\text{int } T_\nu) \cap \mathbb{Z}^{s+1} = \emptyset$, так как $\text{int } T_\nu = (\text{int } \bar{\Pi}_\nu) \cup (\text{int } \bar{\Pi}_\nu^*)$.

Рассуждая, как и в работе [5], покажем, что $\Pi_{\nu+1} \subset T_\nu$. Взаимное расположение параллелепипедов $\bar{\Pi}_\nu$, $\bar{\Pi}_\nu^*$, $\Pi_{\nu+1}$ изображено схематически на рис. 2а и рис. 2б. Сечение множества T_ν гиперплоскостью $\{x = p\}$, $1 \leq p \leq p_{\nu+1}$, представляет собой объединение двух s -мерных шаров

$$\left\{ \bar{z} = (p, y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^s \mid F(p\bar{\alpha}_\nu - \bar{y}) \leq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \right\},$$

$$\left\{ \bar{z} = (p, y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^s \mid F(p\bar{\alpha}_\nu - \bar{y} + \bar{a}_{\nu+1} - p_{\nu+1}\bar{\alpha}_\nu) \leq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \right\},$$

причем

$$F(\bar{a}_{\nu+1} - p_{\nu+1}\bar{\alpha}_\nu) \leq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}}.$$

Сечение цилиндра $\Pi_{\nu+1}$ гиперплоскостью $\{x = p\}$ представляет собой шар с радиусом $\psi(p_\nu)/2p_\nu^{1/s}$ и с центром, лежащим на отрезке, соединяющем точки $(p, p\bar{\alpha}_\nu)$ и $(p, p\bar{\alpha}_\nu + \bar{a}_{\nu+1} - p_{\nu+1}\bar{\alpha}_\nu)$ – центры сечений гиперплоскостью $\{x = p\}$ цилиндров $\bar{\Pi}_\nu$ и $\bar{\Pi}_\nu^*$ соответственно. Теперь ясно, что сечение параллелепипеда $\Pi_{\nu+1}$ либо целиком содержится в сечении параллелепипеда $\bar{\Pi}_\nu$, либо целиком содержится в сечении параллелепипеда $\bar{\Pi}_\nu^*$.

Отсюда, получаем (5).

Определим действительное число $p'_{\nu+1}$ так, что центр сечения цилиндра $\Pi_{\nu+1}$ гиперплоскостью $\{x = p'_{\nu+1}\}$ лежит в гиперплоскости π'_ν соседней к π_ν . Очевидно, что $p_{\nu+1} \geq p'_{\nu+1}$, и, более того, $p_{\nu+1} = np'_{\nu+1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Докажем, что выполнено условие Б) индуктивного предположения

$$p_{\nu+1} \geq p'_{\nu+1} \geq \frac{p_\nu}{cR(U)\psi(p_\nu)}. \quad (6)$$

Рассмотрим точки

$$\bar{\zeta}_{\nu+1} = (p'_{\nu+1}, \bar{a}_{\nu+1}), \quad \frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu} \bar{\zeta}_\nu = \left(p'_{\nu+1}, \bar{a}_\nu \frac{p_{\nu+1}}{p_\nu} \right),$$

лежащие в гиперплоскости $\{x = p'_{\nu+1}\}$. В силу построения цилиндра $\bar{\Pi}_\nu$, а так же из (4) для точек $\bar{a}_{\nu+1}$ и $\bar{a}_\nu \frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu}$ выполнены следующие неравенства:

$$F\left(\bar{a}_{\nu+1} - \bar{a}_\nu \frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu}\right) \leq F(\bar{a}_{\nu+1} - \bar{\alpha}_\nu p'_{\nu+1}) + F(\bar{\alpha}_\nu p_\nu - \bar{a}_\nu) \frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu} \leq \left(1 + \frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu}\right) \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}}. \quad (7)$$

С другой стороны, так как точки $\bar{\zeta}_{\nu+1}$ и $\frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu} \bar{\zeta}_\nu$ лежат в различных гиперплоскостях, в силу (2) и (1) выполнено неравенство

$$F\left(\bar{a}_{\nu+1} - \bar{a}_\nu \frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu}\right) R(U) \geq \left|\bar{a}_{\nu+1} - \bar{a}_\nu \frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu}\right| \geq h_\nu \geq \frac{1}{C(s)p_\nu^{1/s}}. \quad (8)$$

Кроме того, из условия основной леммы получаем

$$R(U)\psi(p_\nu) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \frac{b}{c} = \frac{1}{C(s)} - \frac{1}{c}. \quad (9)$$

Итак, в силу (7), (8) и (9) получаем

$$\frac{p'_{\nu+1}}{p_\nu} \geq \frac{1}{C(s)R(U)\psi(p_\nu)} - 1 = \frac{1}{R(U)\psi(p_\nu)} \left(\frac{1}{C(s)} - R(U)\psi(p_\nu)\right) \geq \frac{1}{cR(U)\psi(p_\nu)}.$$

Тем самым, неравенство (6) доказано.

Докажем, что выполнено условие Д) индуктивного предположения. То есть, если $\Pi_{\nu+1} \succ \ell(\bar{\alpha})$, то выполнены неравенства

$$\frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2} cR(U)\psi(p_\nu)\right) \leq F(p_\nu \bar{\alpha} - \bar{a}_\nu) = \min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p_\nu \bar{\alpha} - \bar{a}) \leq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \left(1 + \frac{3}{2} cR(U)\psi(p_\nu)\right). \quad (10)$$

Действительно, если $\Pi_{\nu+1} \succ \ell(\bar{\alpha})$, то

$$F(p_{\nu+1} \bar{\alpha} - p_{\nu+1} \bar{\alpha}_\nu) \leq F(p_{\nu+1} \bar{\alpha} - \bar{a}_{\nu+1}) + F(\bar{a}_{\nu+1} - p_{\nu+1} \bar{\alpha}_\nu) \leq \frac{\psi(p_\nu)}{2p_\nu^{1/s}} + \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} = \frac{3}{2} \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}}.$$

Далее из (6) следует, что

$$F(p_\nu \bar{\alpha} - p_\nu \bar{\alpha}_\nu) = \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} F(p_{\nu+1} \bar{\alpha} - p_{\nu+1} \bar{\alpha}_\nu) \leq \frac{3}{2} \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \cdot \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} \leq \frac{3}{2} \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \cdot cR(U)\psi(p_\nu).$$

Отсюда, с учетом (4) получаем

$$\begin{aligned} F(p_\nu \bar{\alpha} - \bar{a}_\nu) &\leq F(p_\nu \bar{\alpha}_\nu - \bar{a}_\nu) + F(p_\nu \bar{\alpha} - p_\nu \bar{\alpha}_\nu) \leq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \left(1 + \frac{3}{2} cR(U)\psi(p_\nu)\right), \\ F(p_\nu \bar{\alpha} - \bar{a}_\nu) &\geq F(p_\nu \bar{\alpha}_\nu - \bar{a}_\nu) - F(p_\nu \bar{\alpha} - p_\nu \bar{\alpha}_\nu) \geq \frac{\psi(p_\nu)}{p_\nu^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2} cR(U)\psi(p_\nu)\right), \end{aligned}$$

откуда (10) доказано.

Докажем, что выполнены условия Е) и Г) индуктивного предположения. Условие Е) является следствием условия Д). Первая часть условия Г) выполнена по

построению. Из условия **Е**) и предположения индукции получаем, что если $\Pi_{\nu+1} \succ \ell_{\nu+1}$, то $\Pi_1 \succ \ell_{\nu+1}$. А так как точка $\bar{\zeta}_{\nu+1} = (p_{\nu+1}, a_{1,\nu+1}, \dots, a_{s,\nu+1}) \in \mathbb{Z}^{s+1}$ лежит на луче $\ell_{\nu+1}$, то $\max(p_{\nu+1}, |a_{1,\nu+1}|, \dots, |a_{s,\nu+1}|) = p_{\nu+1}$, откуда следует вторая часть условия **Г**).

Итак, условия **Е**) и **Г**) индуктивного предположения выполнены.

Докажем, что выполнено условие **Ж**) индуктивного предположения. То есть, если

$$\frac{\psi(p_{\nu+1})}{p_{\nu+1}^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2} cR(U) \psi(p_{\nu+1})\right) \leq F(p_{\nu+1} \bar{\alpha} - \bar{a}_{\nu+1}) \leq \frac{\psi(p_{\nu+1})}{p_{\nu+1}^{1/s}} \left(1 + \frac{3}{2} cR(U) \psi(p_{\nu+1})\right), \quad (11)$$

то

$$\ell(\bar{\alpha}) \cap \{x \leq p_{\nu+1}\} \cap \mathcal{B} = \emptyset. \quad (12)$$

Достаточно доказать, что при $1 \leq p \leq p_{\nu+1}$

$$\ell(\bar{\alpha}) \cap \{x = p\} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

1) Рассмотрим случай $1 \leq p \leq p_{\nu}$.

Из (11) следует, что $\Pi_{\nu+1} \succ \ell(\bar{\alpha})$. По ранее доказанному свойству **Д**) получаем (10). Далее, по предположению индукции $\ell(\bar{\alpha}) \cap \{x \leq p_{\nu}\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

2) Рассмотрим случай $p_{\nu} < p \leq p'_{\nu+1} - 3p_{\nu}$.

Пусть $d(p)$ ($d^*(p)$) – расстояние в норме $F(\cdot)$ в гиперплоскости $\{x = p\}$ от центра сечения цилиндра $\bar{\Pi}_{\nu}$ (цилиндра $\bar{\Pi}_{\nu}^*$) до плоскости π'_{ν} и пусть $r = \psi(p_{\nu})/p_{\nu}^{1/s}$. Тогда при $1 \leq p \leq p'_{\nu+1}$ выполнено равенство

$$d(p) - d(p') = \frac{p' - p}{p_{\nu}} r \quad \left(d^*(p) - d^*(p') = \frac{p' - p}{p_{\nu}} r \right).$$

Взаимное расположение цилиндров $\bar{\Pi}_{\nu}$, $\bar{\Pi}_{\nu}^*$, $\Pi_{\nu+1}$ и гиперплоскостей π_{ν} , π'_{ν} в сечении гиперплоскостями $\{x = 0\}$ и $\{x = p_{\nu}\}$ изображено схематически на рис. 3а и рис. 3б соответственно.

Рассматривая гиперплоскость $\{x = p'_{\nu+1}\}$ (см. рис. 3в), убеждаемся в неравенстве $d(p'_{\nu+1}) \leq r$ ($d^*(p'_{\nu+1}) \leq r$). Рассматривая гиперплоскость $\{x = p'_{\nu+1} - 3p_{\nu}\}$ (см. рис. 3г), получаем

$$d(p'_{\nu+1} - 3p_{\nu}) = 3r \pm d(p'_{\nu+1}) \geq 2r \quad (d^*(p'_{\nu+1} - 3p_{\nu}) = 3r \pm d^*(p'_{\nu+1}) \geq 2r).$$

Рассмотрим теперь сечение $\mathcal{R}$ цилиндра $\bar{\Pi}_{\nu}$ (или цилиндра $\bar{\Pi}_{\nu}^*$) гиперплоскостью $\{x = p'_{\nu+1} - 3p_{\nu}\}$. Для любых точек $\bar{z} = (p'_{\nu+1}, \bar{y}) \in \pi'_{\nu}$ и $\bar{\zeta} \in \mathcal{R}$ выполнено неравенство

$$F(\bar{\zeta} - \bar{y}) \geq \frac{\psi(p_{\nu})}{p_{\nu}^{1/s}}.$$

Если же рассмотреть сечение $\mathcal{R}_1$ цилиндра $\bar{\Pi}_{\nu}$ (или цилиндра $\bar{\Pi}_{\nu}^*$) гиперплоскостью $\{x = p\}$, то для любых точек $\bar{z} = (p'_{\nu+1}, \bar{y}) \in \pi'_{\nu}$ и $\bar{\zeta} \in \mathcal{R}_1$ выполнено неравенство

$$F(\bar{\zeta} - \bar{y}) \geq \frac{\psi(p_{\nu})}{p_{\nu}^{1/s}} \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}}.$$

Рис. 3. Сечение гиперплоскостями: (а) $\{x = 0\}$; (б) $\{x = p_\nu\}$; (в) $\{x = p'_{\nu+1}\}$; (г) $\{x = p'_{\nu+1} - 3p_\nu\}$

А так как $\bar{\Pi}_{\nu+1} = \bar{\Pi}_\nu \cup \bar{\Pi}_\nu^*$, получаем, что $\ell(\bar{\alpha}) \cap \{p_\nu < x \leq p_{\nu+1} - 3p_\nu\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

3) Рассмотрим случай $p'_{\nu+1} - 3p_\nu < p < p_{\nu+1}$.

Докажем, что выполнено неравенство

$$\frac{\psi(p_\nu)}{4p_\nu^{1/s}} \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}}. \quad (13)$$

Действительно, в силу условия основной леммы и неравенства (6) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\psi(p_\nu)}{4p_\nu^{1/s}} &\geq \frac{\psi(p)}{4(p'_{\nu+1})^{1/s}(cR(U)\psi(1))^{1/s}} \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} \left(\frac{p}{p'_{\nu+1}} \right)^{1/s} b^{-1/s} \\ &\geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} \left(1 - \frac{3p_\nu}{p'_{\nu+1}} \right)^{1/s} b^{-1/s} \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}}. \end{aligned}$$

В силу (13), (5), (6) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\bar{\alpha} - \bar{a}) &\geq \min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\bar{\alpha}_\nu - \bar{a}) - F(p\bar{\alpha} - p\bar{\alpha}_\nu) \\ &\geq \frac{\psi(p_\nu)}{2p_\nu^{1/s}} - \frac{\psi(p_{\nu+1})}{p_{\nu+1}^{1/s}} \left(1 + \frac{3}{2}cR(U)\psi(p_{\nu+1}) \right) \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2}cR(U)\psi(p) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\ell(\bar{\alpha}) \cap \{p_{\nu+1} - p_\nu < x < p_{\nu+1}\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

4) Рассмотрим случай $p = p_{\nu+1}$.

Из неравенства (11) следует, что $\ell(\bar{\alpha}) \cap \{x = p_{\nu+1}\} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Таким образом, (12) доказано.

6. Доказательство основного результата. В этом пункте мы, опираясь на основную лемму из предыдущего пункта, докажем теорему 1.

По основной лемме найдется последовательность цилиндров

$$\mathcal{P} : \quad \Pi_1 = \Pi(\ell_1, p_1, \sigma_1), \quad \Pi_2 = \Pi(\ell_2, p_2, \sigma_2), \quad \dots, \quad \Pi_\nu = \Pi(\ell_\nu, p_\nu, \sigma_\nu), \quad \dots$$

таких, что

- 1) $p_1 = 1 < p_2 < \dots < p_\nu < p_{\nu+1} < \dots$ (поскольку $p_\nu \in \mathbb{N}$, то $p_\nu \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow \infty$);
- 2) если $\Pi_{\nu+1} \succ k$, то $\Pi_\nu \succ k$.

Пусть $\ell(\bar{\alpha})$ – луч, исходящий из начала координат $\bar{0}$ и протыкающий все цилиндры последовательности $\mathcal{P}$ (понятно, что такой луч существует и единственный).

Из пункта Д) и Ж) основной леммы следует, что $\ell(\bar{\alpha}) \cap \mathcal{B} = \emptyset$, т.е.

$$\min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\bar{\alpha} - \bar{a}) \geq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} \left(1 - \frac{3}{2} cR(U)\psi(p)\right) \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Из пункта Д) основной леммы следует, что неравенство

$$\min_{\bar{a} \in \mathbb{Z}^s} F(p\bar{\alpha} - \bar{a}) \leq \frac{\psi(p)}{p^{1/s}} \left(1 + \frac{3}{2} cR(U)\psi(p)\right)$$

имеет бесконечно много решений.

Осталось только заметить, что

$$A = \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \frac{b}{c}, \quad B = \frac{3}{2}c.$$

Континуальность множества векторов $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^s$ обеспечивается следующим образом. На каждом шаге индуктивного процесса основной леммы, при применении леммы 2 проводим построение не только для шара E_ν^+ , но и для шара E_ν^- . Нетрудно показать, что получающиеся при этом векторы $\bar{\alpha}$ будут различны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. W. S. Cassels, “Simultaneous Diophantine approximations”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **5** (1955), 435–448.
- [2] В. Шмидт, *Диофантовы приближения*, Мир, М., 1983.
- [3] V. Jarnik, “Über die simultanen diophantischen Approximationen”, *Math. Z.*, **33**:1 (1931), 505–543.
- [4] V. Jarnik, “Un théorème d’existence pour les approximations diophantiennes”, *L’Enseignement Math.*, **15** (1969), 171–175.
- [5] Н. Г. Мощевитин, “О совместных диофантовых приближениях. Векторы заданного диофантова вида”, *Матем. заметки*, **61**:5 (1997), 706–716.
- [6] H. Davenport, “A note on Diophantine approximation”, *Studies in Math. Analysis and Related Topics*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1962, 77–81.

Р. К. Ахунжанов, Н. Г. Мощевитин
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30.12.2003