Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Беляков, Экстремальность некоторых тригонометрических функций и многомерных аналогов многочленов Чебышева, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 350–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:50:30

УДК 517

ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА

И. В. Беляков

В настоящей работе доказано свойство минимального уклонения от нуля для широкого класса симметрических тригонометрических многочленов. Как следствие, установлено экстремальное свойство компонент чебышевских полиномиальных отображений, соответствующих симметрическим алгебрам A_α .

Библиография: 8 названий.

Как известно, многочлены Чебышева (первого рода), определяемые соотношением $T_n(\cos t) = \cos nt$, обладают следующим экстремальным свойством.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого ненулевого многочлена $P_{n-1}(x)$ над $\mathbb{C}$ степени $\leq n-1$*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x)| < \max_{x \in [-1, 1]} |T_n(x) + P_{n-1}(x)|.$$

Более сильным является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *При ненулевом тригонометрическом многочлене*

$$Q_{n-1}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

с комплексными коэффициентами $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\cos(nt + \alpha)| < \max_{t \in \mathbb{R}} |\cos(nt + \alpha) + Q_{n-1}(t)|.$$

(См. например, [1; с. 331]. Теорема 1 получается при $\alpha = b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$ и замене $x = \cos t$.)

Цель настоящей работы – доказать многомерное обобщение теоремы 2 и применить его к доказательству экстремального свойства многомерных аналогов многочленов Чебышева. Речь идет о полиномиальных отображениях, связанных с простыми комплексными алгебрами Ли, введенных в работах Веселова [2], [3] и Хоффмана, Уизерса [4]; при этом нас будут интересовать отображения, связанные с симметрическими алгебрами A_d , $d \in \mathbb{N}$.

Реализуем пространство $\mathbb{R}^d$ как гиперплоскость V в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ с координатами $u_0, u_1, \dots, u_d$, задаваемую уравнением $u_0 + u_1 + \dots + u_d = 0$. Положим

$$h \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1(e^{-2\pi i u_0}, \dots, e^{-2\pi i u_d}) \\ \vdots \\ \sigma_d(e^{-2\pi i u_0}, \dots, e^{-2\pi i u_d}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$ – первые d элементарных симметрических функций от $d+1$ переменной. По теореме о симметрических многочленах имеем

$$h(nu_1, \dots, nu_d) = T_n(h(u_1, \dots, u_d)),$$

где T_n – полиномиальное отображение. В силу теоремы о степени выражающего многочлена [5; § 53] компоненты $T_n^{(s)}$ отображения T_n имеют степень n по совокупности переменных $y_1, \dots, y_d$. Отображение h называется *обобщенным косинусом*, а T_n , $n \in \mathbb{N}$, называются *отображениями Чебышева* (или *полиномиальными отображениями*, связанными с Алгебрами Ли типа A_d , или *generalized Chebyshev polynomials*). Заметим, что поскольку $y_k = \bar{y}_{d+1-k}$, образ $h(V)$ лежит в подпространстве $Y \subset \mathbb{C}^d$ вещественной размерности d . Он представляет собой компакт Δ_d , гладкий образ d -мерного симплекса (так называемый сингулярный симплекс) и называется *дельтоидом*. Отображения T_n n^d -листно переводят Δ_d на себя. Удобно ввести переменные $z_k = y_k$, $\bar{z}_k = y_{d+1-k}$; тогда компоненты $T_n^{(s)}$ будут многочленами от $z = (z_1, \dots, z_l, [z_{l+1}], \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_l)$, где $l = [d/2]$ и переменная $z_{l+1} = \bar{z}_{l+1}$ присутствует только в случае нечетной размерности d .

Для удобства записи договоримся, что в дальнейшем при обозначении многочлена нижний индекс будет указывать на ограничение степени по совокупности переменных, а нижний индекс с чертой – на ограничение степени по каждой переменной.

Положим $u = (u_0, u_1, \dots, u_d)$, $\zeta_0(u) = e^{-2\pi i u_0}, \dots, \zeta_d(u) = e^{-2\pi i u_d}$.

ТЕОРЕМА 3. Для любых $d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $s = 1, \dots, d$ для многочленов Q_{n-1} над $\mathbb{C}$

$$\mu(s, d) = \inf_{Q_{n-1}} \max_{u \in V} |\sigma_s(\zeta_0^n(u), \dots, \zeta_d^n(u)) + Q_{n-1}(\zeta_0(u), \dots, \zeta_d(u))| = \binom{d+1}{s}$$

и достигается только при $Q_{n-1} \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во всем выражении под знаком $\inf \max$ подставим $\zeta_0 = 1/(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_d)$. При этом моном $\zeta_0^{a_0} \zeta_1^{a_1} \dots \zeta_d^{a_d}$ перейдет в $\zeta_1^{a_1 - a_0} \dots \zeta_d^{a_d - a_0}$, и значит, $Q_{n-1}(\zeta_0, \dots, \zeta_d)$ перейдет в лорановский многочлен $\tilde{Q}_{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ с мономами вида $\zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d}$, где $|i_k| \leq n-1$, $k = 1, \dots, d$, а также $\forall k, l \leq d$

$$|i_k - i_l| \leq n-1. \quad (*)$$

Свойство $(*)$ означает, что числа $i_1, \dots, i_d$ лежат на отрезке длины $\leq n-1$. Докажем теперь лемму, которая понадобится в дальнейшем.

ЛЕММА 1. Пусть набор вещественных чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $d \geq 2$, таков, что все x_i укладываются на отрезке длины $n-1$. Преобразование $(\pm n)$ состоит в следующем: к одному числу прибавить n , от другого отнять n . Пусть, применив преобразование $(\pm n)$ несколько раз, мы получили набор $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_d)$. Тогда либо $X' = X$, либо точки x'_i уже не укладываются ни на каком отрезке длины $n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $x'_i = x_i + k_i n$, $i = 1, \dots, d$, где $\sum k_i = 0$. Если $X' \neq X$, то не все $k_i = 0$. Не нарушая общности, будем считать, что $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_d$. Тогда

$$|x'_d - x'_1| = |(x_d - x_1) + (k_d - k_1)n| \geq 2n - (n - 1) > n,$$

ибо $k_d - k_1 \geq 2$ из условия нулевой суммы.

Итак, после подстановки $\zeta_0 = 1/(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_d)$ $\mu(s, d)$ будет удовлетворять неравенству

$$\mu(s, d) \geq \inf_{Q_{n-1}} \max_{|\zeta_i|=1} \left| \sigma_s \left(\zeta_1^n, \dots, \zeta_d^n, \frac{1}{(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_d)^n} \right) + Q_{n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) \right|,$$

или, после умножения на $(\zeta_1, \dots, \zeta_d)^n$, обозначив еще

$$\rho_{n,s} = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)^n \sigma_s \left(\zeta_1^n, \zeta_2^n, \dots, \frac{1}{(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_d)^n} \right),$$

получим

$$\mu(s, d) \geq \inf_{Q_{2n-1}} \max_{|\zeta_i|=1} |\rho_{n,s}(\zeta_1^n, \dots, \zeta_d^n) + Q_{2n-1}(\zeta_1, \dots, \zeta_d)|,$$

где от Q_{2n-1} мы будем требовать, кроме ограничения на степень, только свойства (*) и равенства нулю свободного коэффициента, несколько расширяя тем самым класс возмущающих многочленов.

Назовем $(\zeta_1^0, \dots, \zeta_d^0)$ *экстремальной точкой* для $\rho_{n,s}$, если

$$|\zeta_i^0| = 1, \quad i = 1, \dots, d, \quad \text{и} \quad |\rho_{n,s}(\zeta_1^0, \dots, \zeta_d^0)| = \binom{d+1}{s}.$$

ЛЕММА 2. Множество E_n^d экстремальных точек для $\rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ имеет следующий вид:

$$E_n^d = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{C}^d \mid \zeta_1^n = \dots = \zeta_d^n, \zeta_1^{n(d+1)} = 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, модуль $|\rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d)| = |\sigma_s(\zeta_1^n, \dots, \zeta_d^n)|$ достигает максимума, когда все слагаемые в σ_s равны, откуда $\zeta_1^n = \dots = \zeta_d^n = \zeta_0^n = 1/(\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_d)^n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\max_{\Delta_d} |T_n^{(s)} + c| > \max_{\Delta_d} |T_n^{(s)}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\max_{\Delta_d} |T_n^{(s)}| = \max_{|\zeta_i|=1} \max_{\prod \zeta_i=1} |\sigma_s(\zeta_0, \dots, \zeta_d)| = \binom{d+1}{s},$$

образ $T_n^{(s)}(\Delta_d)$ вписан в круг радиуса $\binom{d+1}{s}$ на комплексной плоскости. Из леммы 2 следует, что $T_n^{(s)}(\Delta_d)$ касается границы этого круга в точках $\binom{d+1}{s} \alpha_i$, где α_i – все корни степени $n(d+1)/\text{НОД}(ns, n(d+1)) \geq 2$ из единицы. Сдвиг на ненулевой вектор выводит совокупность $\{\alpha_i\}$ из единичного круга, откуда и получаем доказываемое утверждение.

Пусть $f(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = \rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) + Q_{\overline{2n-1}}(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$, и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – корни степени n из 1. Известно, что

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^s = \begin{cases} n, & \text{если } n \mid s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Получаем

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n f(\varepsilon_{i_1} \zeta_1, \dots, \varepsilon_{i_d} \zeta_d) = \rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) + c(\zeta_1 \cdots \zeta_d)^n.$$

(Заметим, что в силу $(*)$ $c(\zeta_1 \cdots \zeta_d)^n$ будет единственным мономом в $Q_{\overline{2n-1}}$, показателя которого кратны n .) Из полученного равенства следует

$$\begin{aligned} \max_{|\zeta_i|=1} |\rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) + c(\zeta_1 \cdots \zeta_d)^n| &= \max_{|\zeta_i|=1} \left| \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n f(\varepsilon_{i_1} \zeta_1, \dots, \varepsilon_{i_d} \zeta_d) \right| \\ &\leq \max_{|\zeta_i|=1} |f(\zeta_1, \dots, \zeta_d)|. \end{aligned} \quad (1)$$

Но ввиду следствия 1 при $c \neq 0$

$$\max_{|\zeta_i|=1} |\rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) + c(\zeta_1 \cdots \zeta_d)^n| = \max_{\Delta_d} |T_n^{(s)} + c| > \binom{d+1}{s}.$$

Поэтому

$$\inf_{Q_{\overline{2n-1}}} \max_{|\zeta_i|=1} |f(\zeta_1, \dots, \zeta_d)| = \max_{|\zeta_i|=1} |\rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d)| = \binom{d+1}{s} \leq \mu(s, d).$$

Из определения $\mu(s, d)$ заключаем теперь, что $\mu(s, d) = \binom{d+1}{s}$. Чтобы доказать единственность, предположим, что для некоторого $Q_{\overline{2n-1}}$

$$\max_{|\zeta_i|=1} |\rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) + Q_{\overline{2n-1}}(\zeta_1, \dots, \zeta_d)| = \max_{|\zeta_i|=1} |f(\zeta_1, \dots, \zeta_d)| = \binom{d+1}{s}.$$

Тогда в силу следствия 1 и (1) коэффициент при $(\zeta_1 \cdots \zeta_d)^n$ в многочлене $Q_{\overline{2n-1}}$ равен нулю, и

$$\rho_{n,s}(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n f(\varepsilon_{i_1} \zeta_1, \dots, \varepsilon_{i_d} \zeta_d). \quad (2)$$

Для экстремальной точки $(\zeta_1^0, \dots, \zeta_d^0)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \binom{d+1}{s} &= |\rho_{n,s}(\zeta_1^0, \dots, \zeta_d^0)| = \left| \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n f(\varepsilon_{i_1} \zeta_1^0, \dots, \varepsilon_{i_d} \zeta_d^0) \right| \\ &\leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i_1, \dots, i_d=1}^n |f(\varepsilon_{i_1} \zeta_1^0, \dots, \varepsilon_{i_d} \zeta_d^0)| = \binom{d+1}{s}. \end{aligned}$$

Неравенство оказывается равенством, поэтому все $f(\varepsilon_{i_1} \zeta_1^0, \dots, \varepsilon_{i_d} \zeta_d^0)$, $i_k \leq n$, $k = 1, \dots, d$, равны. Учитывая (2), имеем $f(\varepsilon_{i_1} \zeta_1^0, \dots, \varepsilon_{i_d} \zeta_d^0) = \rho_{n,s}(\zeta_1^0, \dots, \zeta_d^0)$ и, в частности, $Q_{\overline{2n-1}}(\zeta_1^0, \dots, \zeta_d^0) = 0$. Итак, многочлен $Q_{\overline{2n-1}}$ должен обращаться в нуль во всех экстремальных точках, т.е. на множестве E_n^d .

ЛЕММА 3. Если многочлен Q_{2n-1} с нулевым свободным коэффициентом удовлетворяет условию $(*)$ и обращается в нуль на множестве E_n^d , то $Q_{2n-1} \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $d = 3$ (при $d > 3$ рассуждения такие же, только больше индексов; более простой двумерный случай был рассмотрен ранее в работе автора [6]). Пусть $\varepsilon^n = 1$, $\delta^n = 1$. Из вида множества E_n^d следует

$$Q_{2n-1}(\zeta, \varepsilon\zeta, \delta\zeta) = (r_{2n-3}(\varepsilon, \delta)\zeta^{2n-3} + \dots + r_1(\varepsilon, \delta)\zeta)(\zeta^{4n} - 1).$$

Если обозначить $b_m(\varepsilon, \delta) = \sum_{i+j+k=m} a_{ijk}\varepsilon^i\delta^k$, где a_{ijk} — коэффициент при $\zeta_1^i\zeta_2^j\zeta_3^k$ в многочлене $Q_{2n-1}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, то получим соотношения

(А) $b_m(\varepsilon, \delta) = 0$ при $m = 0, 2n - 2, 2n - 1, \dots, 4n$;

(В) $b_m(\varepsilon, \delta) + b_{m+4n}(\varepsilon, \delta) = 0$ при $m = 1, 2, \dots, 2n - 3$.

Случай (А). В выражении $b_m(\varepsilon, \delta) = \sum_{i+j+k=m} a_{ijk}\varepsilon^i\delta^k = 0$ будем уменьшать показатели при ε и δ по закону $\varepsilon^{k+n} = \varepsilon^k$, $\delta^{k+n} = \delta^k$ так, чтобы все показатели оказались на отрезке $[0, n - 1]$. Поскольку сумма индексов $i + j + k$ у всех мономов одинакова (и равна m), при такой операции из двух мономов может получиться один, только если соответствующие наборы индексов получаются друг из друга несколькими преобразованиями $(\pm n)$ из леммы 1. В силу этой леммы и свойства $(*)$ такая ситуация невозможна. Поэтому в результате операции сбрасывания показателей по mod n получится многочлен от ε и δ степени $\leq n - 1$ по каждой переменной, равный нулю во всех парах корней степени n из 1. Значит, все его коэффициенты равны нулю.

Случай (В). Применим описанную выше процедуру сбрасывания показателей к выражению $b_m(\varepsilon, \delta) + b_{m+4n}(\varepsilon, \delta) = 0$. Здесь она также будет однозначна, ибо для того, чтобы сумма индексов $i + j + k$ в коэффициентах a_{ijk} получилась при этом из m равной $m + 4n$, хотя бы к одному из индексов надо прибавить $\geq 2n$, что не позволяет ограничение на степень многочлена Q_{2n-1} . Значит, как и в (А), получается многочлен от ε и δ степени $\leq n - 1$ по каждой переменной, равный нулю во всех парах корней степени n из 1. Все коэффициенты (т.е. a_{ijk}) поэтому равны нулю. Объединяя (А) и (В), получаем, что все a_{ijk} равны нулю, т.е. Q_{2n-1} . Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2 [6], [7]. При $d, n \in \mathbb{N}$, $s = 1, \dots, d$ среди всех многочленов вида $T_n^{(s)}(z) + P_{n-1}(z)$ многочлен $T_n^{(s)}$ имеет строго минимальное отклонение от нуля на Δ_d , равное $\binom{d+1}{s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $d = 2$ первая компонента обобщенного косинуса имеет вид

$$h(u, v) = e^{-2\pi i u} + e^{-2\pi i v} + e^{-2\pi i(u+v)},$$

вторая ей комплексно сопряжена. Первая и вторая компоненты отображений Чебышева также совпадают с точностью до комплексного сопряжения.

Дельтоид $\Delta \subset \mathbb{C}$ (рис. 1) представляет собой область, ограниченную гипоциклоидой с тремя ветвями, и имеющей параметрическое уравнение $z = 2e^{2\pi i u} + e^{-4\pi i u}$, $u \in [0, 1]$. Первые три отображения Чебышева имеют, соответственно, следующие первые компоненты:

$$T_0(z, \bar{z}) = 3, \quad T_1(z, \bar{z}) = z, \quad T_2(z, \bar{z}) = z^2 - 2\bar{z}.$$

Рис. 1

Кроме того, справедлива рекуррентная формула

$$T_n = zT_{n-1} - \bar{z}T_{n-2} + T_{n-3},$$

из которой видно, что старшим членом в T_n является z^n .

СЛЕДСТВИЕ 3 [8]. Для многочленов $P_{n-1}(z, \bar{z})$ над $\mathbb{C}$

$$\mu = \inf_{P_{n-1}} \max_{\Delta} |z^n + P_{n-1}(z, \bar{z})| = 3,$$

и достигается только при $z^n + P_{n-1} \equiv T_n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964.
- [2] А. П. Веселов, “Интегрируемые полиномиальные отображения и алгебры Ли”, *Геометрия, дифференциальные уравнения и механика*, Изд-во МГУ, М., 1986, 59–63.
- [3] А. П. Веселов, “Интегрируемые отображения и алгебры Ли”, *Докл. АН СССР*, **292**:6 (1987), 1289–1291.
- [4] М. Е. Hoffman, W. D. Withers, “Generalized Chebyshev polynomials, associated with affine Weyl groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**:1 (1988), 91–104.
- [5] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Наука, М., 1975.
- [6] И. В. Беляков, А. М. Степин, “Экстремальные свойства многомерных отображений Чебышева”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, № 6, 22–24.
- [7] И. В. Беляков, *Многомерные отображения Чебышева*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, М., МГУ, 1997.
- [8] И. В. Беляков, “Минимальное уклонение от нуля отображений Чебышева, соответствующих равностороннему треугольнику”, *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 919–922.

И. В. Беляков

Московский государственный институт
электроники и математики
E-mail: igor.belyakov@eeg.ru

Поступило

02.11.1998