Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич, Спектр и псевдоспектр
несамосопряженного оператора Шрёдингера с перио-
дическими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2006,
том 80, выпуск 3, 356–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:37:09

УДК 517.984.55+514.84

СПЕКТР И ПСЕВДОСПЕКТР НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич

В работе изучается псевдоспектр несамосопряженного оператора

$$\mathfrak{D} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x),$$

где $V(x)$ – периодичная целая аналитическая функция, действительная на действительной оси, с вещественным периодом T . В этом операторе h рассматривается как малый параметр. Показывается, что псевдоспектром данного оператора является замыкание его числового образа – полуполоса в $\mathbb{C}$. Причем псевдособственные функции, т.е. функции $\varphi(h, x)$, удовлетворяющие условию

$$\|\mathfrak{D}\varphi - \lambda\varphi\| = O(h^N), \quad \|\varphi\| = 1, \quad N \in \mathbb{N},$$

строятся явно. Таким образом, как оказывается, псевдоспектр изучаемого оператора гораздо шире его спектра.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Известно, что структура спектра несамосопряженного дифференциального оператора, как правило, существенно сложнее, чем в самосопряженном случае; в частности, точки спектра могут быть по-разному расположены на комплексной плоскости.

Для самосопряженных задач один из эффективных методов исследования спектра – квазиклассическая асимптотика, позволяющая при определенных условиях вычислять так называемые спектральные серии – наборы чисел, приближенно (вместе с соответствующими функциями) удовлетворяющие спектральному уравнению для исходного оператора. Каждая спектральная серия соответствует изотропному многообразию в фазовом пространстве соответствующей классической системы и вычисляется при помощи так называемых условий квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова; если многообразие лагранжево, эти условия имеют вид

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma} \Theta = m(\gamma) + \frac{1}{4}\mu(\gamma),$$

где γ – произвольный цикл на многообразии, Θ – первообразная симплектической структуры, $m(\gamma)$ – произвольное целое число, $\mu(\gamma)$ – индекс Маслова и $h \rightarrow 0$ – квазиклассический параметр. Условия квантования должны быть выполнены для всех

циклов на лагранжевом многообразии; они необходимы для существования на этом многообразии канонического оператора Маслова, определяющего асимптотическую собственную функцию. Самосопряженность исходного оператора гарантирует близость спектральной серии к спектру исходной задачи: если спектральное уравнение выполнено $\text{mod } O(h^N)$, то в h^N -окрестности любой точки спектральной серии найдется точка спектра.

Развитой квазиклассической теории, описывающей спектры несамосопряженных операторов, к настоящему времени не существует; это связано, во-первых, с тем, что соответствующие изотропные многообразия, как правило, оказываются комплексными, а во-вторых, с тем, что спектральные серии могут не иметь никакого отношения к спектру исходного оператора. В работах [1], [2] исследовался так называемый псевдоспектр – множество, состоящее из чисел, приближенно удовлетворяющих спектральному уравнению; в частности, отмечалось различие между псевдоспектром и асимптотикой точного спектра. В [3]–[6] асимптотика спектра вычислена для операторов Шрёдингера и Орра–Зоммерфельда, заданных на отрезке; в частности, показано, что точки спектра асимптотически стремятся к некоторому графу на комплексной плоскости, в то время как псевдоспектр может заполнять целые области.

В настоящей работе изучается спектр и псевдоспектр оператора $-h^2\partial^2/\partial x^2 + iV(x)$, где V – периодическая функция, вещественная на вещественной оси (например, $V = \cos x$). Показано, что при $h \rightarrow 0$ h^N -псевдоспектр этого оператора для любого N заполняет полуполосу на комплексной плоскости, в то время как настоящий спектр $\text{mod } O(h^2)$ концентрируется вблизи одномерного множества (графа). Ребра этого графа соответствуют различным спектральным сериям, которые могут быть вычислены при помощи условий Бора–Зоммерфельда–Маслова на комплексной кривой (римановой поверхности); в отличие от самосопряженного случая разные циклы на одной и той же поверхности определяют разные серии (другими словами, для конструкции асимптотики достаточно требовать выполнения условий квантования только на одном цикле).

2. Постановка задачи. Ряд вопросов, естественно возникающих в спектральной теории дифференциальных операторов, приводит к исследованию спектра оператора

$$\mathfrak{D} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x), \quad (1)$$

где $V(x)$ – периодичная целая аналитическая функция, действительная на действительной оси, с вещественным периодом T . В частности, (1) возникает как “эталонный” оператор в теории гидродинамической устойчивости: его спектр при определенных условиях похож на спектр оператора Орра–Зоммерфельда. Другой пример – спектральная задача для оператора $\varepsilon\Delta + (v(x), \Delta)$ на плоском торе (здесь $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$). Пусть $v(x)$ – бездивергентное поле вида $v(x_1, x_2) = w(x_1)\partial/\partial x_2$. Спектральная задача допускает разделение переменных: собственная функция $\varphi(x_1, x_2)$ имеет вид $e^{imx_2}\psi(x_1)$, причем ψ удовлетворяет спектральной задаче для оператора (1) при $V(x_1) = mw(x_1)$ и $\varepsilon = h^2$.

Оператор $\mathfrak{D}$ естественно рассматривать как неограниченный несамосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, в то же время, поскольку уравнение $(\mathfrak{D} - E)\varphi = 0$ – обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с целыми аналитическими коэф-

фициентами, все его решения – аналитические функции, и $\mathfrak{D}$ можно рассматривать как оператор в пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{C}/T\mathbb{Z})$ целых аналитических периодических функций. Цель настоящей работы – сравнение асимптотики при $h \rightarrow 0$ спектра оператора $\mathfrak{D}$ и псевдоспектра этого оператора в частном случае $V(x) = \cos x$.

Подробному описанию асимптотики спектра посвящена отдельная статья авторов [7]. Оказывается, эта асимптотика спектра выражается через интегралы от голоморфных форм по циклам на римановой поверхности Λ , задаваемой в $\mathbb{C}^2/T\mathbb{Z}$ уравнением $p^2 + iV(x) = E$ ($p \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}^2/T\mathbb{Z}$). Эта (некомпактная) поверхность при $E \neq \pm i$ гомеоморфна сфере с четырьмя дырками и получается склейкой двух экземпляров цилиндра $\mathbb{C}/T\mathbb{Z}$ по отрезку, соединяющему нули функции $iV(x) - E$. Именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть E таково, что на поверхности Λ существует цикл γ , для которого

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma} p dx = m + \frac{\mu}{2}. \quad (2)$$

Тогда существует собственное число λ оператора $\mathfrak{D}$, для которого $\lambda - E = O(h^2)$. Здесь $\mu = 0$, если цикл γ становится стягиваемым при заклеивании некоторой дырки на Λ , и $\mu = 1$ в противоположном случае.

На сфере с четырьмя дырками имеется три базисных цикла. Тем самым выделяется три серии собственных чисел – каждая соответствует базисному циклу на поверхности Λ . При $h \rightarrow 0$ собственные значения концентрируются в $O(h^2)$ – окрестности графа на комплексной плоскости. Ребра этого графа задаются уравнениями

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma_j} p dx = 0.$$

Назовем этот граф *предельным спектральным графом* оператора $\mathfrak{D}$. Вне окрестностей точек $\pm i$ предельный спектральный граф выглядит так, как показано на рис. 1.

Рис. 1

В этой работе мы найдем псевдоспектр оператора $\mathfrak{D}$ и покажем, что он существенно больше спектра.

3. Общие определения и формулировка основного результата. Пусть задано пространство функций, снабженное скалярным произведением

$$\Phi = (\{\varphi(x)\}, (\cdot, \cdot)).$$

Обозначим через $\|\cdot\|$ норму на этом пространстве, порожденную этим скалярным произведением. Кроме того, пусть задан линейный (неограниченный) оператор

$$A = A(x, \varepsilon): \Phi_0 \rightarrow \Phi, \quad \overline{\Phi_0} = \Phi,$$

зависящий от параметра $\varepsilon \in (0, +\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка λ принадлежит ε -псевдоспектру оператора $A = A(x, \varepsilon)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $\varphi = \varphi(x, \varepsilon)$, принадлежащая единичной сфере пространства Φ_0 (т.е. $\|\varphi(\cdot, \varepsilon)\| = 1$) для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, +\infty)$ и обладающая свойством

$$\|A(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) - \lambda\varphi(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0+0; \quad (3)$$

ε -псевдоспектр оператора A будем обозначать $\text{PSP}_\varepsilon(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что ε -псевдоспектр не зависит от ε , а зависит только от того, как параметр ε входит в оператор $A(x, \varepsilon)$.

Основной результат настоящей работы теперь можно сформулировать так.

ТЕОРЕМА 2. В случае непостоянной $V(x)$ для любого N из натурального ряда h^N -псевдоспектр оператора $-\hbar^2 d^2/dx^2 + iV(x)$, заданного на окружности, равен полуполосе $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$.

То есть псевдоспектр выглядит так, как показано на рис. 2.

Рис. 2

При сравнении с теоремой 1 видим насколько сильно отличается спектр от псевдоспектра.

4. Связь псевдоспектра и числового образа.

ЛЕММА 1. ε -псевдоспектр замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку из замыкания ε -псевдоспектра: $\lambda_0 \in \overline{\text{PSP}_\varepsilon(A)}$. Тогда по определению замыкания имеем

$$(\forall \delta > 0) (\exists \lambda_\delta \in \text{PSP}_\varepsilon(A)) : |\lambda_0 - \lambda_\delta| < \delta.$$

Это верно в том числе для $\delta = \varepsilon$. Кроме того, по определению ε -псевдоспектра

$$\exists \varphi(x, \varepsilon) \in \{\varphi(\cdot, \varepsilon) \in \Phi_0 \mid \|\varphi(\cdot, \varepsilon)\| = 1\} : \|A\varphi - \lambda_\delta \varphi\| = O(\varepsilon).$$

Беря $\delta = \varepsilon$ и объединяя написанное выше, получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq \|A\varphi - \lambda_0 \varphi\| &= \|A\varphi - \lambda_\varepsilon \varphi + (\lambda_\varepsilon - \lambda_0) \varphi\| \\ &\leq \|A\varphi - \lambda_\varepsilon \varphi\| + |\lambda_\varepsilon - \lambda_0| \cdot \|\varphi\| < O(\varepsilon) + \varepsilon \cdot 1 = O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Значит, $\|A\varphi - \lambda_0 \varphi\| = O(\varepsilon)$; следовательно, λ_0 – точка ε -псевдоспектра. Другими словами, $\overline{\text{PSP}_\varepsilon(A)} \subseteq \text{PSP}_\varepsilon(A)$; значит, ε -псевдоспектр замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Числовым образом оператора A называется множество

$$\{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Phi_0, \|\psi\| = 1\}.$$

ЛЕММА 2. ε -псевдоспектр оператора A содержится в замыкании его числового образа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть E – точка ε -псевдоспектра; тогда найдется функция ψ , $\|\psi\| = 1$, удовлетворяющая равенству $A\psi = E\psi + O(\varepsilon)$. Умножим скалярно это равенство на ψ :

$$(A\psi, \psi) = (E\psi, \psi) + (O(\varepsilon), \psi).$$

С учетом того, что $(\psi, \psi) = \|\psi\| = 1$ и $(O(\varepsilon), \psi) = O(\varepsilon)$, получаем

$$(A\psi, \psi) = E + O(\varepsilon).$$

Другими словами, $E \in \{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Psi_0, \|\psi\| = 1\} + O(\varepsilon)$. Устремляя ε к нулю, получаем требуемое:

$$E \in \overline{\{(A\psi, \psi) \mid \psi \in \Psi_0, \|\psi\| = 1\}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\varepsilon(h)$ – непрерывная обратимая функция параметра h и $\varepsilon(0+0) = 0+0$. Тогда $\varepsilon(h)$ -псевдоспектр оператора $\mathfrak{D}$ содержится в полуполосе $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нашем случае $\Phi = L_2(\mathbb{S}^1)$, $\Phi_0 = W_2^2(\mathbb{S}^1)$, $A(x, \varepsilon) = D_{\mathbb{S}^1} = -h(\varepsilon)^2 d^2/dx^2 + iV(x)$. Скалярное произведение на пространстве $L_2(\mathbb{S}^1)$ задается формулой

$$(u, v) = \int_{\mathbb{S}^1} u \bar{v} dx.$$

Распишем выражение $(D_{\mathbb{S}^1} \psi, \psi)$:

$$(D_{\mathbb{S}^1} \psi, \psi) = (-h^2 \psi'' + iV \psi, \psi) = -h^2 (\psi'', \psi) + i(V \psi, \psi).$$

Учитывая, что $(\psi'', \psi) = -(\psi', \psi')$ (так как ψ периодична), получаем

$$(D_{\mathbb{S}^1} \psi, \psi) = h^2(\psi', \psi') + i(V\psi, \psi).$$

В правой части первое слагаемое действительное и неотрицательное, а второе чисто мнимое и для него легко сделать оценку (из теоремы о среднем, так как функция $\psi(x)\overline{\psi(x)} = |\psi(x)|^2 \geq 0$ не меняет знак)

$$\begin{aligned} (V\psi, \psi) &= \int_{\mathbb{S}^1} V(x)\psi(x)\overline{\psi(x)} dx = V(x)|_{x=x_0 \in \mathbb{S}^1} \int_{\mathbb{S}^1} \psi(x)\overline{\psi(x)} dx \\ &\in \left[\min_{x \in \mathbb{S}^1} V(x), \max_{x \in \mathbb{S}^1} V(x) \right] \cdot \|\psi\| = [\min V, \max V]. \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что

$$\{(D_{\mathbb{S}^1} \psi, \psi) \mid \psi \in W_2^2(\mathbb{S}^1), \|\psi\| = 1\} \subseteq [0, +\infty) + i[\min V, \max V];$$

следовательно,

$$\text{PSP}_{h^N} \left(-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + iV(x) \right) \in \overline{[0, +\infty) + i[\min V, \max V]} = [0, +\infty) + i[\min V, \max V].$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для аналитичной $V(x) \neq \text{const}$ числовой образ оператора $\mathfrak{D}$ – это полуполоса $[0, +\infty) + i(\min V, \max V)$. Действительно, в оценке для интеграла $(V\psi, \psi)$ равенство $\min V$ достигается только при $V|_{\text{supp } \psi} = \min V$. Так как ψ непрерывна и не равна нулю в некоторой точке, это означает постоянство V на некотором интервале. В этом случае аналитичная V должна быть константой. То есть в оценке для интеграла $(V\psi, \psi)$ значение $\min V$ не достигается при $V \neq \text{const}$. Аналогично для $\max V$. При этом можно сколь угодно близко приблизиться к $\min V$ (и $\max V$), беря в качестве ψ функции, сосредоточенные в окрестности точки $\arg \min V$ (соответственно в окрестности точки $\arg \max V$).

Обозначим $A_V = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{S}^1: V(x) = a, V'(x) \neq 0\}$; Очевидно вложение $A_V \subseteq (\min V, \max V)$; кроме того, множество $(\min V, \max V) \setminus A_V$ конечно. Если бы оно было бесконечно, у аналитичной функции V' на компакте $\mathbb{S}^1$ было бы бесконечное число нулей. Тогда $V' \equiv 0$, $V = \text{const}$ и $[\min V, \max V] = \{\cdot\}$, но одноточечное множество не может содержать бесконечное подмножество, таким образом, A_V – это интервал $(\min V, \max V)$, из которого выкинуто конечное число точек (или $A_V = \emptyset$ для $V = \text{const}$). Случай постоянного V тривиален и мы его уже рассмотрели. В дальнейшем, будем считать что $V \neq \text{const}$.

На рис. 3 множество $(0, +\infty) + iA_V$ выделено серым цветом.

5. Явная конструкция почти собственных функций, отвечающих точкам полуполосы. Для любого натурального N мы покажем, что h^N -псевдоспектр содержит множество $(0, +\infty) + iA_V$ – набор конечного числа полуполос, замыканием которого (в случае непостоянного V) является полуполоса $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$.

ЛЕММА 3. Для любого $E \in (0, +\infty) + iA_V$ при любом натуральном N существует функция ψ_N с нормой $\|\psi_N\| = 1$, удовлетворяющая равенству (3), в котором $\varepsilon = h^N$.

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные $E \in (0, +\infty) + iA_V$ и $N \in \mathbb{N}$. Функцию ψ_N построим в следующем виде:

$$\psi_N(x) = e^{iS(x)/h} \sum_{\ell=0}^{N-2} h^\ell \chi_\ell(x). \quad (4)$$

Мы не будем писать индекс N у функций S и χ_ℓ для того чтобы не загромождать запись; кроме того, отметим, что под h^0 подразумевается единица. При подстановке представления (4) в уравнение (3) получаем следующее условие:

$$\begin{aligned} & ((S')^2 + iV(x) - E)e^{iS(x)/h} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^\ell \chi_\ell(x) - 2iS'e^{iS(x)/h} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^{\ell+1} \chi'_\ell(x) \\ & - iS''e^{iS(x)/h} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^{\ell+1} \chi_\ell(x) - e^{iS(x)/h} \sum_{\ell=0}^{N-1} h^{\ell+2} \chi''_\ell(x) = O(h^N). \end{aligned}$$

Это условие можно расписать по степеням h ; тогда получим систему

$$\begin{cases} ((S')^2 + iV(x) - E)e^{iS(x)/h} \chi_0 = O(h^N), \\ ((S')^2 + iV(x) - E)e^{iS(x)/h} \chi_1 - (2iS'\chi'_0 - iS''\chi_0)e^{iS(x)/h} = O(h^{N-1}), \\ ((S')^2 + iV(x) - E)e^{iS(x)/h} \chi_{\ell+1} - (2iS'\chi'_\ell - iS''\chi_\ell + \chi''_{\ell-1})e^{iS(x)/h} = O(h^{N-\ell-1}), \\ -(2iS'\chi'_{N-2} - iS''\chi_{N-2} + \chi''_{N-3})e^{iS(x)/h} = O(h), \\ \chi''_{N-2}e^{iS(x)/h} = O(1). \end{cases} \quad (5)$$

Для удовлетворения системы (5) достаточно (нам необходимо лишь показать существование решения, а не найти их все) того, чтобы

$$\begin{cases} ((S')^2 + iV(x) - E)e^{iS(x)/h} = O(h^N), \\ \chi_\ell(x)e^{iS(x)/h} = O(1), \\ (-2iS'\chi'_0 - iS''\chi_0)e^{iS(x)/h} = O(h^{N-1}), \\ (-2iS'\chi'_\ell - iS''\chi_\ell)e^{iS(x)/h} = \chi''_{\ell-1}e^{iS(x)/h} + O(h^{N-\ell-1}), \\ \ell \in \{1, \dots, N-1\}. \end{cases} \quad (6)$$

Для упрощения дополнительно сузим класс функций среди которых ищем ψ_N , а именно, будем искать их среди функций асимптотически (при $h \rightarrow 0$) сосредоточенных в одной точке, т.е. функций, для которых

$$\psi_N(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \text{при } x \neq x_0$$

при некотором $x_0 \in \mathbb{S}^1$. Тогда $e^{iS(x)/h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ при $x \neq x_0$ быстрее любой степени h^k , т.е.

$$\operatorname{Im} S(\mathbb{S}^1 \setminus \{x_0\}) \subseteq \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{Im} S(x_0) = 0.$$

Тогда $\operatorname{Im}(S'(x_0)) = 0$ и для выполнения первого условия системы (6) возьмем x_0 и S такие, что

$$\begin{cases} \operatorname{Re} E = (S'(x_0))^2, \\ \operatorname{Im} E = V(x_0). \end{cases}$$

Это означает, что мы по заданной E фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{S}^1$, в которой V достигает значения $\operatorname{Im} E$ (и при этом, что понадобится нам в дальнейшем, $V'(x_0) \neq 0$). Такая точка x_0 на окружности существует в силу определения множества A_V и того, что $\operatorname{Im} E \in A_V$. Кроме того, мы также получили одно условие на функцию S .

Займемся построением функции S в виде степенного ряда в точке x_0 :

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} S^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}.$$

Так как искомая функция $\psi_N(x)$ определена условием (3) с точностью до ненулевого мультипликативного множителя, то $S(x_0)$ можно естественным образом выбирать произвольно из $\mathbb{C}$ при условии, что $e^{iS(x_0)/h} \neq 0$. Для определенности возьмем $S(x_0) = 0$. Для того, чтобы норма ψ_N была единична, в конце процедуры построения просто поделим ψ_N на ее норму. Условие на $S'(x_0)$ уже есть: $S'(x_0) = \pm \sqrt{\operatorname{Re} E}$.

Функцию $V(x)$ представим в виде степенного ряда в точке x_0 (это можно сделать, так как $V(x)$ является аналитичной):

$$V(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} V^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!},$$

причем, как мы уже выяснили, $\operatorname{Im} E = V(x_0)$. Тогда условие $(S'(x))^2 + iV(x) - E \equiv 0$ можно записать в виде (бесконечной) системы на $S^k(x_0)$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} S^{(0)}(x_0) = 0, \\ S^{(1)}(x_0) = \pm \sqrt{\operatorname{Re} E}, \\ iV^{k-1}(x_0) + \sum_{\substack{j, m \in \mathbb{N} \\ j+m=k+1}} \frac{S^{(j)}(x_0)S^{(m)}(x_0)}{(j-1)!(m-1)!} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Хоть эта система и бесконечна, нас интересует лишь конечная ее часть. Действительно, для того, чтобы удовлетворить первое уравнение системы (6), не требуется точного $(S')^2 + iV - E \equiv 0$, а достаточно чтобы $\operatorname{Re}(iS'(x_0)) = 0$ (это уже выполняется по второму уравнению полученной системы), $\operatorname{Re}(iS''(x_0)) < 0$ (это требование

придется добавить к системе) и $(S')^2 + iV - E = O((x - x_0)^{2N})$. Покажем это:

$$\begin{aligned} e^{iS(x)/h} O((x - x_0)^{2N}) &= e^{\operatorname{Re}(iS(x)/h)} e^{i \operatorname{Im}(\dots)} O((x - x_0)^{2N}) \\ &= e^{\operatorname{Re}(iS''(x_0))(x - x_0)^2/h + O((x - x_0)^3)} O((x - x_0)^{2N}). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь нужное свойство следует из очевидной оценки

$$e^{\lambda(x - x_0)^2/h} (x - x_0)^k = e^{\lambda(x - x_0\sqrt{h})^2} (x - x_0\sqrt{h})^k \cdot h^{k/2} = O(h^{k/2+1/4})$$

при $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (оценка понимается в норме L_2). Таким образом, $e^{iS(x)/h} O((x - x_0)^{2N}) = O(h^N)$, значит, для выполнения первого равенства системы (6) нам нужно $(S')^2 + iV - E = O((x - x_0)^{2N})$ и, таким образом, нас интересует лишь следующая конечная часть выписанной ранее системы на $S^{(k)}(x_0)$ (с небольшой добавкой в виде неравенства):

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(iS''(x_0)) < 0, \\ S^{(0)}(x_0) = 0, \\ S^{(1)}(x_0) = \pm \sqrt{\operatorname{Re} E}, \\ iV^{k-1}(x_0) + \sum_{\substack{j, m \in \mathbb{N} \\ j+m=k+1}} \frac{S^{(j)}(x_0)S^{(m)}(x_0)}{(j-1)!(m-1)!} = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cap [2, 2N-1]. \end{cases} \quad (8)$$

Последнее уравнение этой системы можно переписать:

$$\frac{2}{(k-1)!} S^{(1)}(x_0)S^{(k)}(x_0) = -iV^{(k-1)}(x_0) - \sum_{\substack{j, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ j+m=k+1}} \frac{S^{(j)}(x_0)S^{(m)}(x_0)}{(j-1)!(m-1)!},$$

значит, (так как $S^{(1)}(x_0) = \pm \sqrt{\operatorname{Re} E} \neq 0$) из этой системы однозначно (при фиксированном знаке $S'(x_0)$) находятся все $S^{(k)}$; таким образом находится S . Остается только выполнить добавочное требование $\operatorname{Re}(iS''(x_0)) < 0$. Из последнего уравнения системы при $k = 2$ имеем $S''(x_0) = -iV'(x_0)/(2S'(x_0))$; значит, добавочное требование можно удовлетворить подходящим выбором (произвольного до этого момента) знака $S'(x_0)$, если только $V'(x_0) \neq 0$. Именно для этого и требовалось вводить множество A_V и выбирать x_0 с оглядкой на $V'(x_0) \neq 0$. Итак, мы определились со знаком $S'(x_0)$:

$$S'(x_0) = -\operatorname{sign}(V'(x_0))\sqrt{\operatorname{Re} E}.$$

Таким образом, найдя из системы (8) $S^{(k)}$ при $k < 2N$ и полагая $S^{(k)}(x_0) = 0$ при $k \geq 2N$, мы однозначно построили S в виде многочлена по $(x - x_0)$. При этом мы удовлетворили и первое и второе уравнение системы (6).

Теперь займемся построением $\chi_\ell(x)$. Для того, чтобы выполнялись третье и четвертое уравнение системы (6), достаточно (по построению S) выполнения

$$\begin{cases} -2iS'\chi'_0 - iS''\chi_0 = 0, \\ -2iS'\chi'_\ell - iS''\chi_\ell = \chi''_{\ell-1}, \quad \ell \in \{1, \dots, N-1\} \end{cases}$$

в некоторой окрестности $U'(x_0)$ точки x_0 . Так как по построению $S'(x_0) \neq 0$, окрестность $U'(x_0)$ можно выбрать таким образом, что на ней S' отделена от нуля. Тогда находим χ_0 :

$$2S'\chi'_0 + S''\chi_0 = 0 \iff \chi_0 = \operatorname{const}(S')^{-1/2}.$$

Мультипликативную константу в формуле для χ_0 можно выбирать произвольно среди ненулевых чисел. Для определенности положим ее равной единице:

$$\chi_0 = (S')^{-1/2}.$$

Затем из уравнения

$$2S'\chi'_1 + S''\chi_1 = i\chi''_0 = i\frac{3S'' - 2S'S'''}{4(S')^{5/2}},$$

находим χ_1 , и так далее. Так как S' отделена от нуля на $U'(x_0)$, решение уравнения

$$\chi'_\ell = \frac{-S''\chi_\ell + i\chi''_{\ell-1}}{2S'}$$

в окрестности $U'(x_0)$ существует и гладкое.

Построенная таким образом ψ_N обладает лишь одним недостатком – она не периодична. Но это легко устранить. Домножим ее на гладкую срезающую функцию, равную единице в некоторой окрестности точки x_0 и нулю вне другой окрестности этой точки. Теперь можно просто переопределить ψ_N так, чтобы она была периодична – просто возьмем вместо нее сумму (эта сумма в каждой точке x конечна)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_N(x + kT).$$

Осталось только поделить ψ_N на ее ненулевую (так как ψ_N непрерывна и $\psi_N \not\equiv 0$) норму в $L_2(\mathbb{S}^1)$ и мы завершим доказательство.

ТЕОРЕМА 3. *В случае непостоянной $V(x)$ для любого N из натурального ряда h^N -псевдоспектр оператора $-h^2 d^2/dx^2 + iV(x)$, заданного на окружности, равен полуполосе $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, замыканием множества $(0, +\infty) + iA_V$ является полуполоса $[0, +\infty) + i[\min V, \max V]$ (в случае непостоянного V). Значит, для доказательства достаточно объединить результаты лемм 1, 3 и следствия 1.

В работе [8] анонсирована экспоненциальная оценка скорости роста резольвенты аналогичного оператора (с граничными условиями на отрезке вместо условия периодичности) в полуполосе числового образа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Yu. Dobrokhotov, V. N. Kolokoltsov, V. M. Olivé, “Quasimodes of the diffusion operator $-\varepsilon\Delta + v(x) \cdot \nabla$, corresponding to asymptotically stable limit cycles of the field $v(x)$ ”, *Third Symposium on Probability Theory and Stochastic Processes* (Hermosillo, 1994), *Aportaciones Mat. Notas Investigación*, **11**, Soc. Mat. Mexicana, México, 1994, 81–89.
- [2] С. Ю. Доброхотов, В. Н. Колокольцов, В. Мартинес Оливе, “Асимптотически устойчивые инвариантные торы векторного поля $V(x)$ и квазимоды оператора диффузии”, *Матем. заметки*, **58:2** (1995), 301–306.
- [3] С. А. Степин, “Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства задачи Орра–Зоммерфельда”, *Матем. сб.*, **188** (1997), 129–146.
- [4] А. А. Шкаликов, “О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи”, *Матем. заметки*, **62:6** (1997), 950–953.

- [5] С. А. Степин, А. А. Аржанов, “О локализации спектра в одной задаче сингулярной теории возмущений”, *УМН*, **57**:3 (2002), 161–162.
- [6] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, “О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 177–204.
- [7] С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич, “Асимптотика дискретного спектра несамосопряженного периодического оператора.”, *Труды XXVII Конференции молодых ученых*, Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, М., 2005, 18–22.
- [8] А. А. Schkalikov, “Spectral portraits and the resolvent growth of a model problem associated with the Orr–Sommerfeld equation”, [arXiv: math.FA/0306342v1](https://arxiv.org/abs/math.FA/0306342v1).

С. В. Гальцев, А. И. Шафаревич

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: galtsev@mccme.ru, shafar@mech.math.msu.su

Поступило

14.12.2005

Исправленный вариант

16.03.2006