Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Кобельков, О выходах гауссовского процесса с переменной дисперсией за неограниченно растущий барьер, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 386–394

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:39:35

УДК 519.218.7

О ВЫХОДАХ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА С ПЕРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ЗА НЕОГРАНИЧЕННО РАСТУЩИЙ БАРЬЕР

С. Г. Кобельков

Для семейства действительнзначных гауссовских процессов $\xi_u(t)$, $t \in [0, T]$, при некоторых условиях на дисперсию и корреляцию найдена точная асимптотика вероятности пересечения уровня u при $u \rightarrow \infty$. Данный результат применяется к задаче о выходе стационарного центрированного процесса за неограниченно растущий барьер.

Библиография: 8 названий.

Пусть $\xi_u(t)$, $t \in [0, T]$, – семейство действительнзначных гауссовских процессов с нулевым средним и п.н. непрерывными траекториями такое, что дисперсия

$$E\xi_u(t)^2 = \sigma_u^2(t) = 1 - f(u, t)(1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$, где функция $f(t, u) \geq 0$ определена для $u > 0$, $0 \leq t \leq T$ и непрерывна на этом множестве; $f(t, u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по t . Пусть для некоторого $u_0 > 0$ и всех $u > u_0$ существует единственное $t_0 = t_0(u)$ такое, что $f(t_0, u) = 0$, $t_0 \in (0, T)$, и для некоторых $C > 0$, $D_0 > 0$, $\alpha > 0$

$$|f(u, t) - f_2(u)(t - t_0)^2| \leq C(t - t_0)^{2+\alpha}, \quad f_2(u) > 0,$$

при $|t| \leq D_0$. Пусть также корреляционная функция $E\xi_u(t)\xi_u(s)/(\sigma_u(t)\sigma_u(s)) = r_u(t, s) < 1$ при $t \neq s$ непрерывна, и для любого положительного ε существуют $\delta(\varepsilon) > 0$, $u_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $u > u_0$, $|t - s| \leq \delta$ и некоторого $\gamma \in (0, 2]$ выполнено

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1 - r_u(t, s)}{|t - s|^\gamma} \leq 1 + \varepsilon.$$

Определим константу Пикандса H_γ , $0 < H_\gamma < \infty$, как [1]

$$H_\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_\gamma(T)}{T}, \quad H_\gamma(T) = E \exp \left(\max_{0 \leq t \leq T} (\sqrt{2} B_{\gamma/2}(t) - t^\gamma) \right),$$

где $B_{\gamma/2}(t)$ – дробное броуновское движение с параметром Харста $\gamma/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00700.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены вышеприведенные условия. Тогда

- 1) если для некоторого $D_0 \geq D_1 > 0$ выполнено $\min_{|t-t_0| \geq D_1} (1 - \sigma_u^2(t))u^2 \rightarrow \infty$, $u^2 f_2(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow \infty$), то

$$P\left(\max_{t \in [0, T]} \xi_u(t) > u\right) = \frac{H_\gamma}{u^{2-2/\gamma} \sqrt{f_2(u)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1));$$

- 2) если $u^2 f(u, t) \rightarrow f_0(t)$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$, то

$$P\left(\max_{t \in [0, T]} \xi_u(t) > u\right) = \frac{H_\gamma}{\sqrt{2\pi} u^{1-2/\gamma}} \left(\int_0^T \exp\{-f_0(t)/2\} dt\right) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1));$$

- 3) если $u^2 f(u, t) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$, то

$$P\left(\max_{t \in [0, T]} \xi_u(t) > u\right) = \frac{TH_\gamma}{\sqrt{2\pi} u^{1-2/\gamma}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае 1) достаточно, чтобы корреляция удовлетворяла следующим условиям: $r_u(t, s) < 1$ при $t \neq s$, $r_u(t, s)$ непрерывна, и для любого положительного ε существуют $\delta(\varepsilon) > 0$, $u_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $u > u_0$, $|t - t_0| \leq \delta$, $|s - t_0| \leq \delta$ и некоторого $\gamma \in (0, 2]$ выполнено

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1 - r_u(t, s)}{|t - s|^\gamma} \leq 1 + \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случаях 2), 3) достаточно требовать от $f(t, u)$ неотрицательности, непрерывности и соответствующей равномерной сходимости функции $u^2 f(t, u)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\xi_u(t)$, $t \in [0, T]$, – семейство действительных гауссовских процессов с нулевым средним и п.н. непрерывными траекториями. Пусть его дисперсия удовлетворяет соотношению

$$E\xi_u(t)^2 = \sigma_u^2(t) = 1 - a(u)f(t)(1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$, где функция $a(u) > 0$, $a(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$; $f(t)$ – непрерывная функция такая, что $f(t_0) = 0$, $t_0 \in (0, T)$, $f(t) > 0$ при $t \neq t_0$ и $f(t) = f_2(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^{2+\alpha})$, $f_2 > 0$, $\alpha > 0$ при $t \rightarrow t_0$. Пусть также корреляционная функция $E\xi_u(t)\xi_u(s)/(\sigma_u(t)\sigma_u(s)) = r_u(t, s) < 1$ при $t \neq s$, непрерывна, и для любого положительного ε существуют $\delta(\varepsilon) > 0$, $u_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $u > u_0$, $|t - s| \leq \delta$ и некоторого $\gamma \in (0, 2]$ выполнено

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1 - r_u(t, s)}{|t - s|^\gamma} \leq 1 + \varepsilon.$$

Тогда

- 1) если $u^2 a(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow \infty$), то выполнено утверждение 1) теоремы 1 с $f_2(u) = a(u)f_2$;
2) если $u^2 a(u) \rightarrow c > 0$, то выполнено утверждение 2) теоремы 1 с $f_0(t) = cf(t)$;

3) если $u^2 a(u) \rightarrow 0$, то выполнено утверждение 3) теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае 1) достаточно, чтобы корреляция удовлетворяла следующим условиям: $r_u(t, s) < 1$ при $t \neq s$, $r_u(t, s)$ непрерывна, и для любого положительного ε существуют $\delta(\varepsilon) > 0$, $u_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $u > u_0$, $|t - t_0| \leq \delta$, $|s - t_0| \leq \delta$ и некоторого $\gamma \in (0, 2]$ будет выполнено

$$1 - \varepsilon \leq \frac{1 - r_u(t, s)}{|t - s|^\gamma} \leq 1 + \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случаях 2), 3) теорема верна для непрерывных неотрицательных $f(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2 (задача о движущемся барьере). Пусть ξ_t , $t \in [0, T]$ – гауссовский центрированный стационарный процесс с единичной дисперсией, п.н. непрерывными траекториями и ковариационной функцией $R(t)$, $R(t) = 1 - Ct^\gamma + o(t^\gamma)$ при $t \rightarrow 0$, $C > 0$, $\gamma \in (0, 2]$ и $|R(t)| < 1$ при $t > 0$. Функция $f(t, u)$ определена для $u > 0$, $0 \leq t \leq T$ и непрерывна на этом множестве. Обозначим $m(u) = \min_{0 \leq t \leq T} f(t, u)$. Пусть выполнено одно из условий:

- 1) для каждого u существует единственная точка $t_0 = t_0(u)$, $t_0 \in (0, T)$, минимума функции $f(u, t)$ по t , причем для некоторых, не зависящих от t_0 , $D_0 \geq D_1 > 0$, $C > 0$, $\alpha > 0$ выполняются соотношения $\min_{|t - t_0| \geq D_1} u f(u, t) \rightarrow \infty$, $f(t, u)/u \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по t , u

$$\left| \frac{f(u, t)}{u} - \frac{m(u)}{u} - f_2(u)(t - t_0)^2 \right| \leq C(t - t_0)^{2+\alpha}, \quad f_2(u) > 0$$

при $|t| \leq D_0$, где $u^2 f_2(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow \infty$);

- 2) $u f(t, u) \rightarrow f_0(t)$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по t ;
- 3) $u f(t, u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по t .

Тогда в случае 1) для $P_f(u) = P(\max_{0 \leq t \leq T} \xi_t - f(u, t) > u)$ справедливо равенство

$$P_f(u) = \frac{H_\gamma C^{1/\gamma}}{(u + m(u))^{2-2/\gamma} \sqrt{2f_2(u)}} \exp \left\{ -\frac{(u + m(u))^2}{2} \right\} (1 + o(1));$$

в случае 2)

$$P_f(u) = \frac{H_\gamma}{\sqrt{2\pi}(u + m(u))^{1-2/\gamma}} \left(\int_0^{TC^{-1/\gamma}} \exp\{-2f_0(t)\} dt \right) \times \exp \left\{ -\frac{(u + m(u))^2}{2} \right\} (1 + o(1));$$

в случае 3)

$$P_f(u) = \frac{TC^{-1/\gamma} H_\gamma}{\sqrt{2\pi}(u + m(u))^{1-2/\gamma}} \exp \left\{ -\frac{(u + m(u))^2}{2} \right\} (1 + o(1)).$$

Задача о пересечении уровня, когда среднее и дисперсия исследуемого гауссовского процесса не зависят от уровня, достаточно хорошо изучена. Точная асимптотика соответствующей вероятности в случае стационарного гауссовского процесса была найдена Дж. Пикандсом [2], а нестационарный гауссовский случай был рассмотрен в работе В. И. Питербарга и В. Присяжнюка [3].

Задачей о пересечении движущегося барьера занимались М. Лидбеттер, Дж. Крайер [4], и др. Важной работой является статья С. Бермана [5], где показано, что

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} X(t) - f(t) > u\right) = F'(0)\left(\frac{v}{w}\right)(2\pi)^{-1/2} \frac{e^{-u^2/2}}{u}, \quad u \rightarrow \infty,$$

для стационарного центрированного гауссовского процесса $X(t)$ с единичной дисперсией и ковариационной функцией $r(t)$. Здесь предполагается, что $r(t) \neq 1$ для $t > 0$ и правильно меняется в нуле с показателем $2 \geq \alpha > 0$; кроме того, существует предел $p = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)/(1 - r(t))^{1/2}$; $f(t)$ строго положительна при $t > 0$ и правильно меняется в нуле с показателем $\beta \geq \alpha/2$; v и w суть наибольшие решения уравнений $u^2(1 - r(1/v)) = 1$, $uf(1/w) = 1$. $F(x)$ – некоторая функция, которая выражается в явном виде через α , β , p .

Проблема нахождения вероятностей больших экстремумов гауссовского процесса с переменной дисперсией возникает в задачах аппроксимации [6], [7], задачах о разорении [8] и включает в себя задачу о пересечении движущегося барьера.

Данная работа представляет собой обобщение результатов Бермана, Питербарга и Присяжнюка.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. И. Питербаргу за постановку задачи и полезные обсуждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $u^2 f_2(u) \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow \infty$). Введем обозначение $\eta(t) = \xi_u(t)/\sigma_u(t)$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} P\left(\max_{[0,T]} \eta(t) \sqrt{1 - f(u,t)(1 + \varepsilon)} > u\right) &\leq P\left(\max_{[0,T]} \xi_u(t) > u\right) \\ &\leq P\left(\max_{[0,T]} \eta(t) \sqrt{1 - f(u,t)(1 - \varepsilon)} > u\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Возьмем $\beta = \alpha/(4(2 + \alpha))$ и положим $\delta = (u^2 f_2(u))^{-1/2+\beta}$. Обозначим $U = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $U^C = [0, T] \setminus U$. Так как

$$\begin{aligned} P\left(\max_{t \in U} \eta(t) \sqrt{1 - f(u,t)(1 \pm \varepsilon)} > u\right) &\leq P\left(\max_{t \in [0,T]} \eta(t) \sqrt{1 - f(u,t)(1 \pm \varepsilon)} > u\right) \\ &\leq P\left(\max_{t \in U} \eta(t) \sqrt{1 - f(u,t)(1 \pm \varepsilon)} > u\right) + P\left(\max_{t \in U^C} \eta(t) \sqrt{1 - f(u,t)(1 \pm \varepsilon)} > u\right) \end{aligned}$$

и согласно неравенству Питербарга [1] при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\max_{U^c} \eta(t) \sqrt{1 - f(u, t)(1 \pm \varepsilon)} > u\right) \\ & \leq G_0 u^{(2/\gamma)-1} \exp\{-u^2/2\} \exp\left\{-\frac{u^2 f_2(u) \delta^2 (1 \pm \varepsilon)(1 + o(1))}{2}\right\} \\ & = o(u^{(2/\gamma)-2} f_2(u)^{-1/2} \exp\{-u^2/2\}), \end{aligned}$$

достаточно оценивать вероятности из (1) на U .

Возьмем $\Delta = u^{-1} f_2(u)^{-1/4}$ и разобьем U на отрезки длины Δ . Обозначим через Δ_k k -й отрезок разбиения. Пусть t_k^+ – точка максимума $f(u, t)$ на Δ_k , а t_k^- – точка минимума. Имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\max_{t \in U} \eta(t) \sqrt{1 - f(u, t)(1 - \varepsilon)} > u\right) \\ & \leq \sum_{k=1}^{\delta/\Delta} \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1 - f(u, t_k^+)(1 - \varepsilon)}}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

По условию для любого $0,5 > \varepsilon_2 > 0$ и достаточно больших u на Δ_k

$$1 - |t - s|^\gamma (1 - 2\varepsilon_2)^\gamma \leq r_u(t, s) \leq 1 - |t - s|^\gamma (1 + 2\varepsilon_2)^\gamma,$$

а следовательно,

$$\exp\{-|t - s|^\gamma (1 - \varepsilon_2)^\gamma\} \leq r_u(t, s) \leq \exp\{-|t - s|^\gamma (1 + \varepsilon_2)^\gamma\}. \quad (3)$$

Обозначим гауссовские центрированные стационарные процессы с ковариационными функциями из (3) $X^{-\varepsilon_2}(t)$ и $X^{\varepsilon_2}(t)$ соответственно. Тогда согласно лемме Слепьяна [1]

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} X^{\varepsilon_2}(t) > \frac{u}{\sqrt{1 - f(u, t_k^+)(1 - \varepsilon)}}\right) & \leq \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1 - f(u, t_k^+)(1 - \varepsilon)}}\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} X^{-\varepsilon_2}(t) > \frac{u}{\sqrt{1 - f(u, t_k^+)(1 - \varepsilon)}}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Воспользовавшись теоремой D2 [1], получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\max_{t \in \sqrt{1 \pm \varepsilon_2} \Delta_k} X^{\pm \varepsilon_2}(t/\sqrt{1 \pm \varepsilon_2}) > \frac{u}{\sqrt{1 - f(u, t_k^+)(1 - \varepsilon)}}\right) \\ & = \frac{H_\gamma \sqrt{1 \pm \varepsilon_2}}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{2\pi}} \Delta \exp\{-u^2/2\} \exp\{-u^2 f(u, t_k^+)(1 - \varepsilon)/2\} \\ & \quad \times \exp\left\{-\frac{u^2 f(u, t_k^+)^2 (1 - \varepsilon)^2}{2(1 - f(u, t_k^+)(1 - \varepsilon))}\right\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что

$$\exp\left\{-\frac{u^2 f_0(u)^2 \delta^4 (1-\varepsilon)^2}{1-f_0(u)\delta(1-\varepsilon)}\right\} \leq \exp\left\{-\frac{u^2 f(u, t_k^+)^2 (1-\varepsilon)^2}{2(1-f(u, t_k^+)(1-\varepsilon))}\right\} \leq 1.$$

и, следовательно, в силу выбора δ

$$\exp\left\{-\frac{u^2 f(u, t_k^+)^2 (1-\varepsilon)^2}{2(1-f(u, t_k^+)(1-\varepsilon))}\right\} \rightarrow 1 \quad \text{при } u \rightarrow \infty.$$

В силу произвольности ε_2 из (4), (5) одновременно для всех k имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1-f(u, t_k^+)(1-\varepsilon)}}\right) \\ &= \frac{H_\gamma}{\sqrt{2\pi} u^{1-2/\gamma}} \Delta \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \exp\left\{-u^2 f(u, t_k^+) \frac{(1-\varepsilon)}{2}\right\} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим (6) в (2), воспользовавшись тем, что равномерно по u выполнено $f(u, t_k^+) = f_2(u, t_k^+)^2 + O(\delta^{2+\alpha})$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\delta/\Delta} \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1-f(u, t_k^+)(1-\varepsilon)}}\right) \\ &= \frac{H_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{2\pi} u^2 f_2(u)(1-\varepsilon)} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \sum_{k=1}^{\delta/\Delta} \sqrt{u^2 f_2(u) \Delta^2 (1-\varepsilon)} \\ & \quad \times \exp\left\{-u^2 a(u) f_2(u) (t_k^+)^2 \frac{(1-\varepsilon)}{2}\right\} (1+o(1)) \\ &= \frac{H_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{u^2 f_2(u)(1-\varepsilon)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения нижней оценки воспользуемся следующим неравенством:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\max_{t \in U} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u\right) \geq \sum_{k=1}^{\delta/\Delta} \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1-f(u, t_k^-)(1+\varepsilon)}}\right) \\ & \quad - \sum_{i \neq j} \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_i} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u, \max_{t \in \Delta_j} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассуждениями, аналогичными выводу (7), получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\delta/\Delta} \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1-f(u, t_k^-)(1+\varepsilon)}}\right) \\ &= \frac{H_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{u^2 f_2(u)(1+\varepsilon)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим

$$P_{ij} = \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_i} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u, \max_{t \in \Delta_j} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u\right).$$

Представим двойную сумму из (8) в виде

$$\sum_{i \neq j} P_{ij} = 2 \sum_{i+1 < j} P_{ij} + 2 \sum_i P_{i,i+1} = 2(S_1 + S_2).$$

Для оценки S_1 воспользуемся неравенством Питербарга и тем, что для некоторого $\varepsilon_2 > 0$

$$\max_{t \in \Delta_i, s \in \Delta_j} \text{Var}(\eta(t) + \eta(s)) \leq 4 - 2 \min\{((j-i-1)\Delta)^2(1-\varepsilon), \varepsilon_2\}.$$

Итак, для $i < j-1$

$$\begin{aligned} P_{ij} &\leq \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_i, s \in \Delta_j} \eta(t) + \eta(s) > \frac{u}{\sqrt{1-f(u, t_j^-)(1+\varepsilon)}}\right) \\ &\leq G_1 u^{2/\gamma-1} \Delta^2 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \exp\{-u^2 \Delta^2\}, \end{aligned}$$

а в силу выбора Δ выполнено $\exp\{-u^2 \Delta^2\} \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Таким образом, $S_1 = o(u^{(2/\gamma)-2} f_2(u)^{-1/2} \exp\{-u^2/2\})$.

Для оценки S_2 заметим, что

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_i} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u\right) + \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_{i+1}} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u\right) \\ &\quad - \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_i \cup \Delta_{i+1}} \eta(t) \sqrt{1-f(u, t)(1+\varepsilon)} > u\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Воспользуемся (6) для нахождения асимптотики каждого из слагаемых. Затем, суммируя в (10) аналогично (7), получим

$$S_2 = o\left(\frac{H_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{u^2 f_2(u)(1+\varepsilon)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1+o(1))\right).$$

Таким образом, оценка (9) является нижней асимптотической оценкой. В силу произвольности ε получаем окончательную асимптотику

$$\mathbb{P}\left(\max_{t \in [0, T]} \xi_u(t) > u\right) = \frac{H_\gamma}{u^{2-2/\gamma} \sqrt{f_2(u)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1+o(1)).$$

В случае, когда $u^2 f(t, u) \rightarrow f_0(t)$ при $u \rightarrow \infty$ равномерно по t , положим $\delta = T$, $\Delta = u^{-1/2}$, $U = [0, T]$. Тогда остаются справедливыми (1), (2), (6), а (7) и (9) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\delta/\Delta} \mathbb{P}\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1-f(u, t_k^\pm)(1 \mp \varepsilon)}}\right) \\ &= \frac{H_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \sum_{k=1}^{\delta/\Delta} \Delta \exp\left\{-u^2 f(u, t_k^\pm) \frac{(1 \mp \varepsilon)}{2}\right\} (1+o(1)) \\ &= \frac{H_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} \left(\int_0^T \exp\left\{-f_0(t) \frac{(1 \mp \varepsilon)}{2}\right\} dt\right) (1+o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ε легко следует требуемая верхняя оценка:

$$P\left(\max_{t \in [0, T]} \xi_u(t) > u\right) \leq \frac{H_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{2\pi}} \left(\int_0^T \exp\left\{-\frac{f_0(t)}{2}\right\} dt \right) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1)).$$

Доказательство того, что нижняя оценка совпадает с верхней, повторяет соответствующие рассуждения для случая 1).

Если $u^2 f(t, u) \rightarrow 0$ равномерно по t , то для $\delta = T$, $\Delta = u^{-1/2}$, $U = [0, T]$ также остаются справедливыми (1), (2), (6), а (7) и (9) преобразуются в

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\delta/\Delta} P\left(\max_{t \in \Delta_k} \eta(t) > \frac{u}{\sqrt{1 - a(u)f(t_k^\pm)(1 \mp \varepsilon)}}\right) \\ &= \frac{TH_\gamma}{u^{1-2/\gamma} \sqrt{2\pi(1 \mp \varepsilon)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы для случая 1), получим справедливость теоремы для случая 3). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Обозначим $D = C^{-1/\gamma}$.

Рассмотрим случай $m(u) = 0$. Тогда $f(u, t) \geq 0$. Очевидно, выполнено равенство

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \xi_t - f(u, t) > u\right) = P\left(\max_{0 \leq t \leq TD^{-1}} \frac{u}{u + f(u, Dt)} \xi_{Dt} > u\right).$$

Дисперсия процесса $\frac{u}{u + f(u, Dt)} \xi_{Dt}$ равна

$$\sigma_u(t)^2 = 1 - 2 \frac{f(u, Dt)}{u} + O\left(\frac{f(u, Dt)}{u^2}\right).$$

Для корреляционной функции $r_u(t, s) = R(D(t - s))$ выполнены условия теоремы 1. Таким образом, в случае 1)

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \xi_t - f(u, t) > u\right) \\ &= \frac{H_\gamma}{\sqrt{2\pi} u^{1-2/\gamma}} \left(\int_0^{TC^{-1/\gamma}} \exp\{-2f_0(t)\} dt \right) \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1)); \end{aligned}$$

в случае 2)

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \xi_t - f(u, t) > u\right) = \frac{TC^{-1/\gamma} H_\gamma}{\sqrt{2\pi} u^{1-2/\gamma}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1));$$

в случае 3)

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \xi_t - f(u, t) > u\right) = \frac{H_\gamma C^{1/\gamma}}{u^{2-2/\gamma} \sqrt{2f_2(u)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} (1 + o(1)).$$

Откажемся от предположения о равенстве нулю $m(u)$. Тогда

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \xi_t - f(u, t) > u\right) = P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \xi_t - (f(u, t) - m(u)) > u + m(u)\right).$$

Так как $u + m(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$, задача сводится к уже рассмотренному случаю.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Питербарг, *Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [2] J. Pickands, III, "Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **145** (1969), 51–73.
- [3] В. И. Питербарг, В. Присяжнюк, "Асимптотическое поведение вероятности большого выброса для нестационарного гауссовского процесса", *Теория вероятн. и матем. статистика*, **18** (1978), 121–134.
- [4] M. R. Leadbetter, "On crossings of arbitrary curves by certain Gaussian processes", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 60–68.
- [5] С. Берман, "Выбросы стационарного гауссовского процесса за высокий движущийся барьер", *Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения*, Мир, М., 1978, 133–164.
- [6] V. Piterbarg, O. Seleznev, *Linear interpolation of random processes and extremes of a sequence of Gaussian non-stationary processes*, Proc. Tech. Rep., **446**, North Carolina Univ., Chapel Hill, Center Stoch., 1994.
- [7] J. Hüsler, V. Piterbarg, O. Seleznev, "On convergence of the uniform norms for Gaussian processes and linear approximation problems", *Ann. Appl. Probab.*, **13**:4 (2003), 1615–1653.
- [8] E. Hashorva, J. Husler, "Extremes of Gaussian processes with maximal variance near the boundary points", *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, **2**:3 (2000), 255–269.

С. Г. Кобельков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

14.01.2005