Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Куракин, Инварианты подобия матриц над коммутативным артиновым цепным кольцом, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 403–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 10:06:29

ИНВАРИАНТЫ ПОДОБИЯ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМ АРТИНОВЫМ ЦЕПНЫМ КОЛЬЦОМ

В. Л. Куракин

Квадратной матрице A порядка m над коммутативным артиновым цепным кольцом R ставятся в соответствие m идеалов в кольце многочленов над кольцом дискретного нормирования S , гомоморфным образом которого является R . Эти идеалы являются инвариантами подобия матриц над кольцом R , т.е. они совпадают для подобных матриц. Показывается, что новые инварианты сильнее инвариантов Фиттинга, и что их достаточно для решения задачи о подобии матриц второго порядка над R .

Библиография: 4 названия.

Квадратные матрицы $A, B \in R_m$ над коммутативным кольцом R с единицей называются *подобными*, если $C^{-1}AC = B$ для некоторой обратимой матрицы $C \in R_m^*$. При этом мы пишем $A \approx B$. *Фиттинговым инвариантом* матрицы A (или матрицы $Ex - A$) называется идеал $D_k(Ex - A)$, $1 \leq k \leq m$, в кольце многочленов $R[x]$, порожденный всеми минорами порядка k характеристической матрицы $Ex - A$ (см. [1], [2]). Известно и легко доказывается, что из подобия матриц A и B следует равенство их фиттинговых инвариантов: $D_k(Ex - A) = D_k(Ex - B)$, $1 \leq k \leq m$ (поэтому говорят, что фиттинговы инварианты являются инвариантами подобия матриц над кольцом R). Обратное утверждение справедливо для матриц над полем. Если R – поле, то матрица $Ex - A$ эквивалентна единственной канонической матрице

$$Ex - A \sim K(Ex - A) = \text{diag}(f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad f_i(x) \mid f_{i+1}(x),$$

где $f_i(x)$ – унитарные многочлены над полем R , при этом $D_k(Ex - A)$ – идеал, порожденный k -м инвариантным делителем $f_1(x) \cdots f_k(x)$ матрицы $Ex - A$. Для матриц над коммутативным кольцом R , и даже над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, неизвестно простого критерия подобия или аналога канонической формы полиномиальной матрицы.

В этой статье R – коммутативное артиново цепное кольцо, или, эквивалентно, коммутативное артиново локальное кольцо главных идеалов. Единственный максимальный идеал кольца R порождается некоторым элементом π , и решетка идеалов кольца R есть конечная цепь

$$R > \pi R > \pi^2 R > \dots > \pi^{n-1} R > \pi^n R = 0,$$

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ № МД-2452.2004.10 и № НШ-2358.2003.9.

где n – индекс нильпотентности идеала πR . Обозначим через $\overline{R} = R/\pi R$ поле вычетов кольца R .

Согласно [3] кольцо R является гомоморфным образом некоторого кольца дискретного нормирования S с полем вычетов, изоморфным полю $\overline{R}$. Кольцо S является коммутативным нетеровым локальным кольцом главных идеалов, его единственный максимальный идеал порождается некоторым элементом ω , решетка идеалов кольца S есть бесконечная цепь $S > \omega S > \omega^2 S > \dots$. Мы будем дополнительно предполагать, что $R \cong S/\omega^n S$, т.е. существует эпиморфизм, обладающий следующими свойствами:

$$\varphi: S \rightarrow R, \quad \varphi(\omega) = \pi, \quad \text{Ker } \varphi = \omega^n S.$$

Например, если $R = \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$, то в качестве S можно взять кольцо $\mathbb{Z}_{(p)}$ целых p -адических чисел, при этом $R \cong S/p^n S$. Если кольцо R конечно, то указанное выше условие о том, что $R \cong S/\omega^n S$, выполняется [4]. В дальнейшем элемент, порождающий максимальный идеал кольца S , будем обозначать той же буквой π (вместо ω), что и в кольце R . Это не будет приводить к двусмысленности, так как всегда будет ясно, в каком кольце, S или R , проводятся вычисления. При таком соглашении эпиморфизм φ можно назвать эпиморфизмом приведения по модулю π^n .

Эпиморфизм φ индуцирует изоморфизм полей вычетов $\overline{\varphi}: \overline{R} \rightarrow \overline{S}$ (который без ограничения общности можно считать тождественным – иначе нужно выбрать другое кольцо S). Он также индуцирует гомоморфизмы колец многочленов и колец матриц, которые будем обозначать той же буквой φ :

$$\varphi: S[x] \rightarrow R[x], \quad \varphi: S_m \rightarrow R_m.$$

Если $A \in R_m$, то произвольную матрицу $A_1 \in S_m$ такую, что $\varphi(A_1) = A$, будем называть *продолжением* матрицы A на кольцо S . Для множества всех продолжений матрицы A будем использовать обозначения

$$[A] = \varphi^{-1}(A) = \{A_1 \in S_m : \varphi(A_1) = A\} = A_1 + \pi^n S_m,$$

где в правой части равенств A_1 – одно произвольное продолжение матрицы A .

Пусть $D_k(Ex - A)$ – фиттинговы инварианты матрицы $A \in R_m$ в кольце $R[x]$, $D_k^S(Ex - A_1)$ – фиттинговы инварианты матрицы $A_1 \in S_m$ в кольце $S[x]$. Последние, конечно, различны для различных продолжений $A_1 \in [A]$ матрицы A . Обозначим через $\widehat{D}_k(Ex - A)$ идеал кольца $S[x]$, порожденный идеалами $D_k^S(Ex - A_1)$ для всех продолжений A_1 матрицы A :

$$\widehat{D}_k(Ex - A) = (D_k^S(Ex - A_1) : A_1 \in [A]). \quad (1)$$

Это идеал в кольце $S[x]$, однозначно определенный матрицей $A \in R_m$. Очевидно,

$$\varphi(\widehat{D}_k(Ex - A)) = \varphi(D_k^S(Ex - A_1)) = D_k(Ex - A), \quad A_1 \in [A], \quad (2)$$

поэтому идеалы $\widehat{D}_k(Ex - A)$ являются продолжением (подъемом) фиттинговых инвариантов $D_k(Ex - A)$ на кольцо $S[x]$.

Следующая теорема показывает, что идеалы (1) являются инвариантами подобия матриц над кольцом R . В дальнейшем через $|C|$ обозначается определитель матрицы C .

ТЕОРЕМА 1. Если матрицы $A, B \in R_m$ подобны, то

$$\widehat{D}_k(Ex - A) = \widehat{D}_k(Ex - B), \quad 1 \leq k \leq m. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $C^{-1}AC = B$ для некоторой матрицы $C \in R_m^*$. Пусть $C_1 \in [C]$ – произвольное продолжение матрицы C на кольцо S . Так как C обратима над R , элемент $|C|$ обратим в R . Тогда элемент $|\overline{C}|$ обратим в поле $\overline{R}$, а значит, $|\overline{C}_1| = |\overline{C}|$ обратим в поле $\overline{S} = \overline{R}$. Следовательно, $C_1 \in S_m^*$.

Если $A_1 \in [A]$, то матрица $B_1 = C_1^{-1}A_1C_1$ принадлежит $[B]$. Так как матрицы A_1 и B_1 подобны над S , то их фиттинговы инварианты равны: $D_k^S(Ex - A_1) = D_k^S(Ex - B_1)$, $1 \leq k \leq m$. Поэтому из (1) следует, что

$$\widehat{D}_k(Ex - A) \subseteq \widehat{D}_k(Ex - B).$$

Ввиду обратимости матрицы C_1 верно и обратное включение.

Отметим, что доказательство теоремы, фактически, основано на том, что отображение $A_1 \rightarrow C_1^{-1}A_1C_1$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами $[A]$ и $[B]$.

В силу теоремы 1 идеалы $\widehat{D}_k(Ex - A)$, $1 \leq k \leq m$, можно называть *инвариантами подобия* матриц над кольцом R . Чтобы отличать их от фиттинговых инвариантов, мы будем называть их “новыми инвариантами”. Из равенства (2) видно, что фиттинговы инварианты восстанавливаются по новым инвариантам, поэтому новые инварианты не слабее фиттинговых. В дальнейшем (пример 1) будет показано, что в общем случае новые инварианты сильнее фиттинговых.

Нашей следующей задачей является построение эффективного метода вычисления новых инвариантов.

ЛЕММА 1. Пусть $A \in R_m$, $A_1 \in [A]$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{D}_m(Ex - A) \subseteq D_m^S(Ex - A_1) + \pi^n D_{m-1}^S(Ex - A_1) + \pi^{2n} D_{m-2}^S(Ex - A_1) + \dots \\ + \pi^{(m-1)n} D_1^S(Ex - A_1) + \pi^{mn} S[x]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть доказываемого включения через T . Согласно определению (1) нужно доказать, что если $A_2 \in [A]$, то $D_m^S(Ex - A_2) \subseteq T$. Так как $D_m^S(Ex - A_2)$ – идеал, порожденный определителем матрицы $Ex - A_2$, достаточно проверить включение $|Ex - A_2| \in T$. Матрицу A_2 можно представить в виде $A_2 = A_1 - \pi^n C$, $C \in S_m$. Обозначим $B = Ex - A_1 \in S[x]_m$. Тогда $Ex - A_2 = B + \pi^n C$, и требуется доказать, что

$$\begin{aligned} |B + \pi^n C| \in T = D_m^S(B) + \pi^n D_{m-1}^S(B) + \pi^{2n} D_{m-2}^S(B) + \dots \\ + \pi^{(m-1)n} D_1^S(B) + \pi^{mn} S[x]. \end{aligned}$$

Запишем матрицы B и C по столбцам: $B = (B_1, \dots, B_m)$, $C = (C_1, \dots, C_m)$. Определитель матрицы, один из столбцов которой есть сумма двух столбцов, представляется известным образом как сумма двух определителей. Применяя это свойство,

получим разложение

$$\begin{aligned} |B + \pi^n C| &= \sum_{r=0}^m \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} |B_1, \dots, \pi^n C_{j_1}, \dots, \pi^n C_{j_r}, \dots, B_m| \\ &= \sum_{r=0}^m \pi^{rn} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} |B_1, \dots, C_{j_1}, \dots, C_{j_r}, \dots, B_m|. \end{aligned}$$

Во внутренней сумме разложим каждый определитель по столбцам $j_1, \dots, j_r$; при этом минор, стоящий в этих столбцах, совпадет с соответствующим минором матрицы C , а его алгебраическое дополнение – с соответствующим алгебраическим дополнением матрицы B :

$$|B + \pi^n C| = \sum_{r=0}^m \pi^{rn} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} M_C \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix} \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix}.$$

Так как

$$M_C \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix} \in S \subset S[x], \quad \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix} \in D_{m-r}^S(B),$$

то

$$|B + \pi^n C| \in \sum_{r=0}^m \pi^{rn} D_{m-r}^S(B) = T, \quad (4)$$

что и требовалось доказать.

Из доказательства леммы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для любых матриц $B, C \in S[x]_m$ выполняется соотношение (4).

ЛЕММА 2. Пусть $A \in R_m$, $A_1 \in [A]$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{D}_m(Ex - A) &= D_m^S(Ex - A_1) + \pi^n D_{m-1}^S(Ex - A_1) + \pi^{2n} D_{m-2}^S(Ex - A_1) + \dots \\ &\quad + \pi^{(m-1)n} D_1^S(Ex - A_1) + \pi^{mn} S[x]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\subseteq$ доказано в лемме 1. Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что для $0 \leq r \leq m$

$$\pi^{rn} D_{m-r}^S(Ex - A_1) \subseteq \widehat{D}_m(Ex - A) = (D_m^S(Ex - A_2) : A_2 \in [A]),$$

где $D_0^S(Ex - A_1)$ полагается равным $S[x]$. Обозначим $Ex - A_1 = B$ и будем считать, что $A_2 = A_1 - \pi^n C$, $C \in S_m$. Тогда доказываемое включение запишется в виде

$$\pi^{rn} D_{m-r}^S(B) \subseteq (|B + \pi^n C| : C \in S_m), \quad 0 \leq r \leq m. \quad (5)$$

Обозначим правую часть через Q и докажем включение индукцией по r .

Взяв $C = 0$, получим, что $|B| \in Q$, что доказывает базис индукции при $r = 0$.

Пусть $C = E_{ij}$ – матрица, у которой на пересечении i -й строки и j -го столбца находится единица, а остальные элементы равны нулю. Тогда

$$|B + \pi^n C| = |B + \pi^n E_{ij}| = |B| + \pi^n \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in Q.$$

Так как $|B| \in Q$ и Q – идеал, то $\pi^n \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \in Q$ для любых i, j . Следовательно, любой минор порядка $m-1$ матрицы B , умноженный на π^n , принадлежит Q . Это означает, что $\pi^n D_{m-1}(B) \subseteq Q$.

Возьмем теперь в качестве C матрицу, у которой подматрица размеров 2×2 , стоящая на пересечении строк i_1, i_2 и столбцов j_1, j_2 , есть единичная матрица, а остальные элементы равны нулю. Тогда

$$\begin{aligned} |B + \pi^n C| &= |\dots, B_{j_1} + \pi^n C_{j_1}, \dots, B_{j_2} + \pi^n C_{j_2}, \dots| \\ &= |B| + \pi^n |\dots C_{j_1} \dots B_{j_2} \dots| + \pi^n |\dots B_{j_1} \dots C_{j_2} \dots| + \pi^{2n} |\dots C_{j_1} \dots C_{j_2} \dots| \\ &= |B| + \pi^n \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} + \pi^n \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} + \pi^{2n} \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \in Q, \end{aligned}$$

где неуказанные столбцы являются столбцами матрицы B . С учетом уже доказанного $\pi^{2n} \overline{AM}_B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \in Q$. Поэтому все миноры порядка $m-2$ матрицы B , умноженные на π^{2n} , принадлежат Q . Следовательно, $\pi^{2n} D_{m-2}(B) \subseteq Q$.

Рассуждая аналогично, докажем включение (5) для $r = 3, \dots, m-1$. Наконец, полагая $C = E$ – единичной матрице, аналогично получим

$$|B + \pi^n C| = |B| + \dots + \pi^{mn} |C| = |B| + \dots + \pi^{mn} \in Q,$$

где слагаемые, обозначенные как $\dots$, принадлежат Q по уже доказанному. Отсюда $\pi^{mn} \in Q$, и мы получили включение (5) для $r = m$.

Из доказательства леммы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для любой матрицы $B \in S[x]_m$ выполняется соотношение (5).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in S_m$ и $1 \leq k \leq m$. Тогда для любой матрицы $A_1 \in [A]$

$$\begin{aligned} \widehat{D}_k(Ex - A) &= D_k^S(Ex - A_1) + \pi^n D_{k-1}^S(Ex - A_1) + \pi^{2n} D_{k-2}^S(Ex - A_1) + \dots \\ &\quad + \pi^{(k-1)n} D_1^S(Ex - A_1) + \pi^{kn} S[x]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = m$ теорема доказана в лемме 2. Докажем, что теорема верна для остальных k . Обозначим $Ex - A_1 = B \in S[x]_m$. Тогда

$$\widehat{D}_k(Ex - A) = (D_k^S(B + \pi^n C) : C \in S_m).$$

Правую часть доказываемого равенства обозначим T_k .

Чтобы доказать включение $\subseteq$, достаточно проверить, что для любой матрицы $C \in S_m$ любой минор порядка k матрицы $B + \pi^n C$ принадлежит T_k . Пусть $B', C' \in S[x]_k$ – соответствующие подматрицы матриц B и C , так что минор, о котором идет речь, равен $|B' + \pi^n C'|$. В силу следствия леммы 1, примененному к матрицам B' и C' ,

$$|B' + \pi^n C'| \in \sum_{r=0}^k \pi^{rn} D_{k-r}^S(B').$$

Так как, очевидно, $D_{k-r}^S(B') \subseteq D_{k-r}^S(B)$, то

$$|B' + \pi^n C'| \in \sum_{r=0}^k \pi^{rn} D_{k-r}^S(B) = T_k,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что

$$\pi^{rn} D_{k-r}^S(B) \subseteq \widehat{D}_k(Ex - A) = (D_k^S(B + \pi^n C) : C \in S_m)$$

для $0 \leq r \leq k$. Действительно, пусть B' – произвольная $k \times k$ подматрица матрицы B . В силу следствия леммы 2, примененного к матрице B' ,

$$\pi^{rn} D_{k-r}^S(B') \subseteq (|B' + \pi^n C'| : C' \in S_k)$$

для $0 \leq r \leq k$. Отсюда

$$\pi^{rn} D_{k-r}^S(B') \subseteq (D_k^S(B + \pi^n C) : C \in S_m).$$

Так как это включение выполняется для любой $k \times k$ подматрицы B' матрицы B , то

$$\pi^{rn} D_{k-r}^S(B) \subseteq (D_k^S(B + \pi^n C) : C \in S_m),$$

что и требовалось доказать.

Приведем примеры вычисления новых инвариантов $\widehat{D}_k(Ex - A)$ с помощью теоремы 2. Следующий пример показывает, что новые инварианты сильнее фиттинговых.

ПРИМЕР 1. Приведем пример матриц A и B таких, что их фиттинговые инварианты совпадают, а новые инварианты различны. Рассмотрим матрицы 2×2 над кольцом $R = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Ex - A = \begin{pmatrix} x & -p \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad Ex - B = \begin{pmatrix} x & -p \\ -p & x \end{pmatrix}.$$

Фиттинговые инварианты матриц A и B над кольцом R совпадают:

$$\begin{aligned} D_1(Ex - A) &= (x, p), & D_2(Ex - A) &= (x^2), \\ D_1(Ex - B) &= (x, p), & D_2(Ex - B) &= (x^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Над кольцом $S = \mathbb{Z}_{(p)}$ целых p -адических чисел рассмотрим продолжения A_1 и B_1 матриц A и B :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix}.$$

Внешне эти матрицы совпадают с матрицами A и B , но теперь элементы этих матриц принадлежат кольцу S , так что $p^2 \neq 0$. Фиттинговые инварианты матриц A_1 и B_1 над кольцом S следующие:

$$\begin{aligned} D_1^S(Ex - A_1) &= (x, p), & D_2^S(Ex - A_1) &= (x^2), \\ D_1^S(Ex - B_1) &= (x, p), & D_2^S(Ex - B_1) &= (x^2 - p^2). \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что эти идеалы являются инвариантами подобия матриц A_1 и B_1 над кольцом S , но не матриц A и B над кольцом R . Теперь с помощью теоремы 2 находим новые инварианты матриц A и B :

$$\begin{aligned}\widehat{D}_1(Ex - A) &= (x, p) + (p^2) = (x, p), \\ \widehat{D}_2(Ex - A) &= (x^2) + p^2(x, p) + (p^4) = (x^2, p^2x, p^3), \\ \widehat{D}_1(Ex - B) &= (x, p) + (p^2) = (x, p), \\ \widehat{D}_2(Ex - B) &= (x^2 + p^2) + p^2(x, p) + (p^4) = (x^2 + p^2, p^2x, p^3).\end{aligned}$$

Таким образом, новые инварианты матриц A и B различны, в то время как фиттинговы инварианты совпадают. По теореме 1 матрицы A и B над кольцом R не подобны. Данный пример говорит о том, что новые инварианты сильнее фиттинговых инвариантов.

Из примера можно увидеть, за счет чего новые инварианты оказываются сильнее фиттинговых. Сравнивая соотношения (6) и (7), мы получаем, что в кольце R минор $|Ex - B|$ равен $x^2 - p^2 = x^2$, т.е. слагаемое p^2 исчезает. При переходе к кольцу S это слагаемое остается, так что $|Ex - B_1| = x^2 - p^2 \neq x^2$.

В приведенном примере матрицы A и B вырожденные, и даже нулевые по модулю p . Аналогичный пример можно привести и для невырожденных, например, рассмотрев матрицы

$$E + A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E + B = \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

Как показывает следующий пример, новые инварианты не образуют полную систему инвариантов подобия матриц над кольцом R .

ПРИМЕР 2. Существуют матрицы, не являющиеся подобными, новые инварианты которых совпадают. Возьмем кольцо $R = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Над кольцом $S = \mathbb{Z}_{(p)}$ рассмотрим продолжения A_1 и B_1 матриц A и B :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Ex - A_1 = \begin{pmatrix} x & -p & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x - p \end{pmatrix}, \quad Ex - B_1 = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -p & 0 & x - p \end{pmatrix}.$$

Фиттинговы инварианты этих матриц над кольцом S таковы:

$$\begin{aligned}D_1^S(Ex - A_1) &= (1), \quad D_2^S(Ex - A_1) = (x, p), \quad D_3^S(Ex - A_1) = (\chi_{A_1}(x)) = (x^3 - px^2), \\ D_1^S(Ex - B_1) &= (1), \quad D_2^S(Ex - B_1) = (x, p), \quad D_3^S(Ex - B_1) = (\chi_{B_1}(x)) = (x^3 - px^2).\end{aligned}$$

Таким образом, $D_k^S(Ex - A_1) = D_k^S(Ex - B_1)$, $k = 1, 2, 3$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что

$$\widehat{D}_k^S(Ex - A_1) = \widehat{D}_k^S(Ex - B_1), \quad k = 1, 2, 3,$$

т.е. новые инварианты матриц A и B совпадают. С другой стороны, матрицы A и B над кольцом R не подобны. Действительно, предположим, что $C^{-1}AC = B$ для некоторой матрицы $C \in R_3^*$. Обозначим

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство $AC = CB$ запишется в виде

$$\begin{pmatrix} pd & pe & pf \\ g & h & i \\ pg & ph & pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pc & 0 & b + pc \\ pf & 0 & e + pf \\ pi & 0 & h + pi \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $p \mid b$, $pe = 0$, $h = 0$. Следовательно, $\bar{b} = \bar{e} = \bar{h} = \bar{0}$, и матрица C не обратима; противоречие.

Как показывает следующая теорема, аналогичный пример нельзя построить для матриц размеров 2×2 . Если $G(x) = x^m - c_{m-1}x^{m-1} - \dots - c_1x - c_0 \in R[x]$ – унитарный многочлен, то обозначим через $S(G)$ сопровождающую матрицу многочлена $G(x)$:

$$S(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & c_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & c_{m-1} \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Новых инвариантов достаточно для решения задачи подобия матриц второго порядка над кольцом R . Другими словами, матрицы $A, B \in R_2$ подобны тогда и только тогда, когда*

$$\widehat{D}_k(Ex - A) = \widehat{D}_k(Ex - B), \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проблема подобия матриц над кольцом R сводится к проблеме подобия матриц A со свойством $\bar{A} \neq \bar{0}$, поскольку если $A = \pi A'$, $B = \pi B'$, то $A \approx B$ над R тогда и только тогда, когда $A' \approx B'$ над кольцом $R/\pi^{n-1}R$ (см. [2; с. 97]). Поэтому можно считать, что $A, B \in R_2$, $\bar{A} \neq \bar{0}$, $\bar{B} \neq \bar{0}$. Так как необходимость следует из теоремы 1, нужно доказать лишь достаточность. Итак, пусть выполняется условие (8). Требуется доказать, что $A \approx B$.

Согласно [2; теорема 10] матрица A подобна одной из следующих матриц:

- I) $A \approx S(\chi_A(x))$;
- II) $A = rE$, $r \in R$;
- III) $A \approx rE + \pi^k S(G)$, $0 < k < n$, $G(x) = x^2 - ax - b$.

Фиттинговы инварианты этих матриц следующие:

- I) $D_1(Ex - A) = (1)$, $D_2(Ex - A) = (\chi_A(x))$;

$$\text{II)} \quad D_1(Ex - A) = (x - r), \quad D_2(Ex - A) = ((x - r)^2);$$

$$\text{III)} \quad D_1(Ex - A) = (x - r, \pi^k), \quad D_2(Ex - A) = ((x - r)^2 - \pi^k a(x - r) - \pi^{2k} b).$$

Первый фиттингов инвариант однозначно определяет группу I, II или III, к которой принадлежит матрица A . Внутри групп I и II второй фиттингов инвариант однозначно определяет матрицу A с точностью до подобия. В этих случаях из равенства фиттинговых инвариантов (и тем более из равенства новых инвариантов) следует подобие матриц.

Пусть теперь матрицы A и B принадлежат группе III. Можно считать, что

$$A = rE + \pi^k S(x^2 - ax - b), \quad B = r'E + \pi^{k'} S(x^2 - a'x - b').$$

Так как выполняются условия (8), то $D_1(Ex - A) = D_1(Ex - B)$, т.е. $(x - r, \pi^k) = (x - r', \pi^{k'})$. Отсюда

$$k' = k, \quad r' = r + \pi^k s, \quad s \in R.$$

Следовательно,

$$A = rE + \pi^k S(x^2 - ax - b), \quad B = (r + \pi^k s)E + \pi^k S(x^2 - a'x - b'). \quad (9)$$

Над кольцом дискретного нормирования S рассмотрим продолжения A_1 и B_1 матриц A и B вида

$$A_1 = rE + \pi^k S(x^2 - ax - b), \quad B_1 = (r + \pi^k s)E + \pi^k S(x^2 - a'x - b').$$

Тогда

$$\begin{aligned} Ex - A_1 &= \begin{pmatrix} x - r & -\pi^k b \\ -\pi^k & x - r - \pi^k a \end{pmatrix}, \\ Ex - B_1 &= \begin{pmatrix} x - r - \pi^k s & -\pi^k b' \\ -\pi^k & x - r - \pi^k s - \pi^k a' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Фиттинговы инварианты этих матриц над кольцом S следующие:

$$D_1^S(Ex - A_1) = (x - r, \pi^k),$$

$$D_2^S(Ex - A_1) = (\chi_{A_1}(x)) = ((x - r)^2 - \pi^k a(x - r) - \pi^{2k} b),$$

$$D_1^S(Ex - B_1) = (x - r, \pi^k),$$

$$D_2^S(Ex - B_1) = (\chi_{B_1}(x)) = ((x - r)^2 - \pi^k(a' + 2s)(x - r) - \pi^{2k}(b' - s(a' + s))).$$

С помощью теоремы 2 находим новые инварианты матриц A и B над кольцом S :

$$\widehat{D}_1(Ex - A) = (x - r, \pi^k),$$

$$\widehat{D}_2(Ex - A) = ((x - r)^2 - \pi^k a(x - r) - \pi^{2k} b, \pi^n(x - r), \pi^{n+k}),$$

$$\widehat{D}_1(Ex - B) = (x - r, \pi^k),$$

$$\widehat{D}_2(Ex - B) = ((x - r)^2 - \pi^k(a' + 2s)(x - r) - \pi^{2k}(b' - s(a' + s)), \pi^n(x - r), \pi^{n+k}).$$

Из равенства $\widehat{D}_2(Ex - A) = \widehat{D}_2(Ex - B)$ получаем, что многочлен $F(x) = \chi_{A_1}(x) - \chi_{B_1}(x)$ принадлежит $\widehat{D}_2(Ex - A)$. Так как степень многочлена $F(x)$ равна 1, то $F(x) \in (\pi^n(x - r), \pi^{n+k})$ или

$$F(x) = \pi^k(a' - a + 2s)(x - r) + \pi^{2k}(b' - b - s(a' + s)) \in (\pi^n(x - r), \pi^{n+k}).$$

Это равносильно тому, что

$$a' - a + 2s \in (\pi^{n-k}), \quad b' - b - s(a' + s) \in (\pi^{n-k}),$$

т.е.

$$a' = a - 2s + \pi^{n-k}\alpha, \quad b' = b + s(a - s) + \pi^{n-k}\beta,$$

где $\alpha, \beta \in S$. Вернемся теперь к матрицам A и B над кольцом R из соотношения (9). В силу доказанного, эти матрицы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} r & \pi^k b \\ \pi^k & r + \pi^k a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r + \pi^k s & \pi^k b + \pi^k s(a - s) \\ \pi^k & r + \pi^k a - \pi^k s \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $C^{-1}AC = B$, где

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрицы A и B над кольцом R подобны.

Таким образом, новые инварианты сильнее инвариантов Фиттинга. Их достаточно для решения задачи о подобии матриц порядка 2, но недостаточно – для матриц порядка 3.

Автор признателен рецензенту за полезные замечания по тексту статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Fitting, “Die Determinantenideale eines Modulus”, *Jahresber. Deutch. Math.-Verein.*, **46** (1936), 195–228.
- [2] А. А. Нечаев, “О подобии матриц над коммутативным локальным артиновым кольцом”, *Тр. семинара им. И. Г. Петровского*, **9** (1983), 81–101.
- [3] I. S. Cohen, “On the structure and ideal theory of complete local rings”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59**:1 (1946), 54–106.
- [4] А. А. Нечаев, “О строении конечных коммутативных колец с единицей”, *Матем. заметки*, **10**:6 (1971), 679–688.

В. Л. Куракин

Институт криптографии, связи и информации

Академии ФСБ России

E-mail: kurakin@do.tochka.ru

Поступило

13.05.2005

Исправленный вариант

24.01.2006