Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пчелинцев, Строение конечно порожденных коммутативных альтернативных алгебр и специальных луп Муфанг, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 413–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:49:43

УДК 512.554.5

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ КОММУТАТИВНЫХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР И СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛУП МУФАНГ

С. В. Пчелинцев

Доказано, что коммутаторный идеал алгебры умножений свободной коммутативной альтернативной алгебры ранга n нильпотентен индекса $n - 1$. Отсюда в качестве следствия выводится теорема Брака для специальных коммутативных луп Муфанг.

Библиография: 6 названий.

Введение

В 1958 г. Р. Брак доказал знаменитую теорему о центральной нильпотентности коммутативной лупы Муфанг (КЛМ) конечного ранга [1]. Напомним определение центральной нильпотентности КЛМ E . Определим по индукции множества $E_1 = [E, E, E]$, $E_{t+1} = [E_t, E, E]$, где $[a, b, c]$ – ассоциатор в лупе E . Лупа E называется *центрально нильпотентной индекса s* , если $E_s = 1$, $E_{s-1} \neq 1$. Согласно теореме Брака индекс центральной нильпотентности КЛМ от n порождающих не превосходит $n - 1$.

Ю. И. Манин в монографии [2] отмечал, что метод доказательства Брака основан на очень сложном и остроумном индуктивном процессе и использует несколько сотен неассоциативных тождеств. В [2] был предложен новый подход к изучению КЛМ, опирающийся на связь между КЛМ и СН-квазигруппами. Однако получить на этом пути теорему Брака не удалось. Развивая идеи Манина и используя технику работы в нильпотентных группах, в 1978 г. Дж. Смит [3] доказал точность оценки на индекс центральной нильпотентности в теореме Брака.

Более простой подход к изучению КЛМ основан на использовании альтернативных алгебр. Напомним, что лупа Муфанг E называется *специальной*, если она вложима в лупу $U(A)$ обратимых элементов альтернативной алгебры A с единицей. И. П. Шестаков [4] доказал, что не всякая лупа Муфанг специальна. Однако проблема специальности для КЛМ остается открытой.

Данная работа посвящена доказательству следующего результата.

ТЕОРЕМА. *Коммутаторный идеал алгебры умножений свободной коммутативной альтернативной алгебры ранга n нильпотентен индекса $n - 1$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00111.

Из приведенной теоремы вытекают следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A – коммутативная альтернативная алгебра с единицей 1 ранга n . Тогда ее лупа обратимых элементов центрально нильпотентна индекса $\leq n - 1$ (оценка точная).

СЛЕДСТВИЕ 2 (теорема Брака для специальных КЛМ). Специальная КЛМ ранга n центрально нильпотентна индекса $\leq n - 1$ (оценка точная).

Данная работа состоит из трех параграфов. В §1 собраны необходимые предварительные результаты, §2 посвящен доказательству теоремы, а в §3 доказываются следствия.

Всюду в работе, если не оговорено противное, под “алгеброй” понимается коммутативная альтернативная алгебра над произвольным полем характеристики 3.

§ 1. Предварительные результаты

1.1. Основные определения и обозначения. В дальнейшем используются следующие обозначения:

- $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ – ассоциатор в алгебре A ;
- $[a, b, c] = (ab \cdot c) \cdot (a \cdot bc)^{-1}$ – ассоциатор в лупе E ;
- $A^\#$ – алгебра, полученная из A внешним присоединением единицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебра называется *альтернативной*, если ассоциатор в ней является кососимметрической функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Лупа называется *коммутативной лупой Муфанг* (КЛМ), если она удовлетворяет тождествам $xy = yx$, $(xy \cdot z)y = x(yz \cdot y)$.

1.2. Тождества альтернативных алгебр. Во всякой коммутативной альтернативной алгебре справедливы тождества Муфанг:

$$(ax \cdot y)x = a(xy \cdot x), \quad (1)$$

$$(a, x, xb) = (a, x, b)x, \quad (2)$$

$$(xy, a, b) = (x, a, b)y + x(y, a, b). \quad (3)$$

Напомним, что линейное отображение $'$ алгебры A в себя называется *дифференцированием*, если $(\forall x, y \in A)(xy)' = x'y + xy'$. Из тождества (3) вытекает, что оператор $R(a, b): x \rightarrow (x, a, b)$ является дифференцированием алгебры A .

Следуя Браку [1], введем в КЛМ функции

$$F_0(x, y, z) = [x, y, z], \quad F_1(x, y, z | b) = [F_0(x, y, b), b, z], \quad \dots, \\ F_n(x, y, z | a_1, \dots, a_{n-1}, b) = [F_{n-1}(x, y, b | a_1, \dots, a_{n-1}), b, z].$$

По аналогии рассмотрим соответствующие функции в алгебре:

$$f_0(x, y, z) = (x, y, z), \quad f_1(x, y, z | b) = (f_0(x, y, b), b, z), \quad \dots, \\ f_n(x, y, z | a_1, \dots, a_{n-1}, b) = (f_{n-1}(x, y, b | a_1, \dots, a_{n-1}), b, z).$$

Нам потребуются две леммы, которые совпадают с леммами 5.2 и 5.5 из [5].

ЛЕММА 1. Во всякой коммутативной альтернативной алгебре функция Брака $f_n(x, y, z \mid a_1, \dots, a_n)$ кососимметрична по x, y, z и симметрична по $a_1, \dots, a_n$.

ЛЕММА 2. Функции Брака f_n принимают ненулевые значения в свободной коммутативной альтернативной алгебре счетного ранга.

§ 2. Доказательство основной теоремы

2.1. Базисные ассоциаторы и их свойства. Пусть A – свободная коммутативная альтернативная алгебра ранга n (X_n – множество ее свободных порождающих). Положим $D_0(A) = A$ и определим по индукции $D_{s+1}(A) = (D_s(A), A, A)$. Элементы множества $D_s(A)$ ($s \geq 1$) назовем *базисными ассоциаторами веса s* . Заметим, что базисные ассоциаторы веса s имеют степень $\geq 2s + 1$. Для произведения базисных ассоциаторов введем его вес как сумму весов сомножителей.

ЛЕММА 3. Имеем $(D_i, D_j, D_k) \subseteq D_{i+j+k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представим в виде последовательности пунктов, при рассмотрении которых будем постоянно пользоваться дифференцированием $R(a, b)$.

1°. Допустим сначала, что $i = 0$. Если $j = 0$, то доказывать нечего. Пусть $j \geq 1$. Тогда индукцией по j получаем

$$\begin{aligned} (A, D_j, D_k) &= (A, (D_{j-1}, A, A), D_k) = (D_{j-1}, A, A)R(D_k, A) \\ &\subseteq (D_{j-1}R(D_k, A), A, A) + (D_{j-1}, AR(D_k, A), A) + (D_{j-1}, A, AR(D_k, A)) \\ &\subseteq ((D_{j-1}, D_k, A), A, A) + (D_{j-1}, (A, D_k, A), A) + (D_{j-1}, A, (A, D_k, A)) \\ &\subseteq (D_{j+k}, A, A) + (D_{j-1}, A, D_{k+1}) \subseteq D_{j+k+1}. \end{aligned}$$

2°. Теперь индукцией по i имеем

$$\begin{aligned} (D_i, D_j, D_k) &= (D_{i-1}, A, A)R(D_j, D_k) \\ &\subseteq (D_{i-1}R(D_j, D_k), A, A) + (D_{i-1}, AR(D_j, D_k), A) \\ &\subseteq (D_{i+j+k}, A, A) + (D_{i-1}, D_{j+k+1}, A) \subseteq D_{i+j+k+1}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Имеем $(D_{i-1}, a, b)(D_{j-1}, a, c) \subseteq D_{i+j}A^\#$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} (D_{i-1}, a, b)(D_{j-1}, a, c) &\subseteq (D_{i-1}, a(D_{j-1}, a, c), b) - (D_{i-1}, (D_{j-1}, a, c), b)a \\ &\subseteq 2(D_{i-1}, (D_{j-1}, a^2, c), b) - (D_{i-1}, (D_{j-1}, a, c), b)a \\ &\subseteq (D_{i-1}, D_j, A)A^\# \subseteq D_{i+j}A^\#. \end{aligned}$$

Обозначим через $W_{t,s}$ линейную оболочку произведений $q = q_1 \cdots q_k$ базисных ассоциаторов, $k \leq t$, веса $\text{wh}(q)$ не меньше s .

ЛЕММА 5. Пусть $p_t = d_1 d_2 \cdots d_t$ – произведение базисных ассоциаторов, $\text{wh}(p_t) = s$. Тогда если в выражение p_t вместо d_j подставить $d_j a$, то новое произведение сравнимо с элементом $p_t a$ по модулю $W_{t,s+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p_k = d_1 d_2 \cdots d_k$, то $p_k(da) = (p_k d)a - (p_k, d, a)$ и

$$(p_k, d, a) = (d_1 d_2 \cdots d_k, d, a) = \sum_{i \geq 1} d_1 \cdots d'_i \cdots d_k, \quad \text{где } d'_i = (d_i, d, a).$$

Кроме того, $(p_{k+1}a)d = (ap_{k+1})d = a(p_{k+1}d) + (a, p_{k+1}, d) = (p_{k+1}d)a + (p_{k+1}, d, a)$. Используя эти соотношения и лемму 3, индукцией по k получаем требуемое утверждение.

2.2. Почти муфанговы функции. Напомним, что функция $f(x, y)$ называется *муфанговой относительно x и y* , если она по этим переменным линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству $f(x, x \cdot y) = f(x, y) \cdot x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(x_1, \dots, x_{k-1} \mid x_k, \dots, x_n)$ – однородная функция, зависящая только от указанных переменных, причем по переменным, записанным до черты, она линейна, а по остальным переменным имеет степень 2. Переменные до черты $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ назовем *простыми*, а остальные переменные $x_k, \dots, x_n$ – *двойными*. Функцию f назовем *почти муфанговой*, если выполнены условия:

- (а) относительно простых переменных функция f муфангова;
- (б) функция f обращается в нуль, если вместо простой переменной подставить двойную переменную.

Примерами почти муфанговых функций являются функции Брака и аналог функции Филиппова (в [5] доказано, что эти функции различны на первичных коммутативных альтернативных алгебрах). Другие примеры можно найти в [6].

ЛЕММА 6. Во всякой коммутативной альтернативной алгебре ранга n верно равенство $D_{n-1}(A) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f_{n-2}(x, y, z \mid a_1, \dots, a_{n-2})$, где $a_i \in X_n$. Поскольку она является дифференцированием по каждой из переменных x, y, z , ее значения содержатся в идеале, порожденном значениями $f_{n-2}(x, y, z \mid a_1, \dots, a_{n-2})$, где $x, y, z \in X_n$. Функция f_{n-2} кососимметрична по переменным x, y, z , значит, одна из них входит в набор порождающих $a_1, \dots, a_{n-2}$, и указанная функция нулевая.

Введем в рассмотрение функцию

$$\langle x_0 y_0 x_1 y_1 \cdots x_{n-2} y_{n-2} x_{n-1} \rangle := x_0 R(y_0, x_1) R(y_1, x_2) \cdots R(y_{n-2}, x_{n-1}).$$

Переменные x_i назовем *нечетными*, а переменные y_i – *четными*. Ясно, что эта функция кососимметрична по переменным y_i и x_{i+1} , стоящим под одним оператором $R(y_i, x_{i+1})$.

Докажем, что указанная функция нулевая в алгебре ранга n . Для этого достаточно доказать, что нулевой будет функция $\langle x_0 y_0 x_1 y_1 \cdots x_{n-2} y_{n-2} x_{n-1} \rangle \varphi(i_1) \cdots \varphi(i_s)$, получаемая из исходной отождествлением четных и нечетных переменных с номерами $i_1, i_2, \dots, i_s$ (символ $\varphi(i)$ обозначает отождествление переменных x_i и y_i).

Проведем возвратную индукцию по числу s . Основание индукции при $s = n - 2$ доказано ранее. Сделав индуктивное предположение, рассмотрим функцию $\langle x_0 y_0 x_1 y_1 \cdots x_{n-2} y_{n-2} x_{n-1} \rangle \varphi(i_1) \cdots \varphi(i_s)$. Отождествленные переменные обозначим греческими буквами: $\xi_1 = x_{i_1} = y_{i_1}, \dots, \xi_s = x_{i_s} = y_{i_s}$, и назовем эти переменные *двойными*. Остальные переменные, обозначенные латинскими буквами, назовем *простыми*.

Докажем теперь, что в силу предположения индукции функция $h := \langle x_0 y_0 x_1 y_1 \cdots \xi_1^2 \cdots \xi_s^2 \cdots x_{n-2} y_{n-2} x_{n-1} \rangle$ ($1 \leq s \leq n-2$, наборы ξ_j^2 и ξ_{j+1}^2 двойных переменных могут быть разрезаны простыми переменными x_i) кососимметрична по простым переменным x_i и y_j . Действительно, в силу леммы 1 функция $\langle xy \xi_1^2 \xi_2^2 \cdots \xi_m^2 z \rangle$, содержащая только три простые переменные x , y и z , кососимметрична по ним; следовательно, функция $\langle x_0 y_0 x_1 y_1 \cdots \xi_1^2 \cdots \xi_s^2 \cdots x_{n-2} y_{n-2} x_{n-1} \rangle$ кососимметрична по простым переменным, между которыми находятся только двойные переменные. Кроме того, функция h кососимметрична по переменным x_i и y_i с одинаковыми индексами, поскольку отождествление этих переменных приводит по предположению индукции к нулевой функции. Наконец, очевидно, что функция h кососимметрична по y_i и x_{i+1} . Следовательно, функция h кососимметрична по всем простым переменным. Поскольку по последней переменной x_n функция h является дифференцированием, то по простым переменным она муфангова. Наконец, если простая переменная x совпадает с двойной переменной ξ , то, перемещая переменную x к переменной ξ , получим нулевое значение: поскольку они окажутся под одним оператором $R(x, \xi)$, который в силу альтернативности равен нулю. Следовательно, функция h является почти муфанговой.

Пусть полная степень функции h равна $2n-1$, число двойных переменных — s , число простых переменных — t . Без ограничения общности, можно считать, что двойные переменные являются свободными порождающими. По доказанному можно считать, что простые переменные функции h являются свободными порождающими.

Докажем, что хотя бы одна простая переменная должна совпадать с некоторой двойной переменной. От противного, пусть все переменные разные. Тогда $s+t+k=n$, $k \geq 0$, $t = (2n-1) - 2s$, откуда имеем $n-s-k = (2n-1) - 2s$, $s-k = n-1$, что невозможно, поскольку $s-k \leq s \leq n-2$. Итак, одна из простых переменных x совпадает с двойной переменной ξ ; противоречие.

ЛЕММА 7. *Всякое произведение базисных ассоциаторов веса $\geq n-1$ является тождеством коммутативной альтернативной алгебры ранга n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем первую индукцию по числу сомножителей. Основанием индукции является лемма 6. Рассмотрим произведение базисных ассоциаторов, состоящее из t сомножителей:

$$p := \langle x_0^{(1)} y_0^{(1)} x_1^{(1)} y_1^{(1)} \cdots x_{s_1}^{(1)} \rangle \cdots \langle x_0^{(t)} y_0^{(t)} x_1^{(t)} y_1^{(t)} \cdots x_{s_t}^{(t)} \rangle,$$

вес которого $\text{wh}(p)$ удовлетворяет условию $\text{wh}(p) = \sum_{i=1}^t s_i \geq n-1$.

Допустим, что для произведения базисных ассоциаторов, содержащего меньшее число сомножителей и имеющего вес $\geq n-1$, утверждение верно. В силу леммы 3 и предположения индукции скобки в этом произведении не играют роли. Следуя лемме 6, проведем отождествление некоторого набора соседних переменных вида $x_j^{(i)}$, $y_j^{(i)}$. Обозначим через h функцию $h := p\varphi_1 \cdots \varphi_m$, где φ_i — операторы отождествления соседних переменных. Отождествленные переменные, как и раньше, будем называть двойными, и обозначать греческими буквами. Остальные переменные обозначаются латинскими буквами и называются простыми.

Докажем возвратной индукцией по числу m , что функция h нулевая. Допустим, что мы отождествили максимально возможное число соседних переменных. Тогда

функция имеет вид

$$\langle x^{(1)}y^{(1)}\xi_1^{(1)} \dots \xi_{s_1-1}^{(1)}z^{(1)} \rangle \dots \langle x^{(t)}y^{(t)}\xi_1^{(t)} \dots \xi_{s_t-1}^{(t)}z^{(t)} \rangle.$$

В силу лемм 4, 5 и первого индуктивного предположения эта функция почти муфангова. Число переменных r , от которых она зависит, больше ранга алгебры, так как $r = (\sum_{i=1}^t (s_i - 1)) + 3t = \sum_{i=1}^t s_i + 2t \geq (n - 1) + 2 = n + 1 > n$; значит, эта функция нулевая. Тем самым, основание второй индукции верно.

Сделав второе индуктивное предположение, допустим, что мы отождествили меньшее число соседних переменных. Тогда аналогично предыдущему можно проверить, что функция h является почти муфанговой. Поскольку число переменных функции h заведомо больше ранга алгебры, то $h = 0$.

2.3. Завершение доказательства теоремы. Пусть A^* – алгебра линейных операторов, действующих на линейном пространстве A ; $R(A)$ – ее подалгебра, порожденная тождественным отображением и операторами правого умножения R_a ($xR_a := xa$). Через $R(A)'$ обозначим коммутаторный идеал алгебры умножений $R(A)$. Поскольку $[R_a, R_b] = 2R(a, b)$, то $R(A)'$ совпадает с идеалом алгебры $R(A)$, порожденным множеством Δ дифференцирований вида $R(a, b)$. В силу лемм 6 и 7 имеем $(x_1\delta_1^{(1)} \dots \delta_{s_1}^{(1)}) \dots (x_t\delta_1^{(t)} \dots \delta_{s_t}^{(t)}) = 0$, если $\delta_i^j \in \Delta$, $\sum_{i=1}^t s_i = n - 1$.

На самом деле, верно более сильное утверждение:

$$(x_1\delta_1^{(1)} \dots \delta_{s_1}^{(1)}\rho_1) \dots (x_t\delta_1^{(t)} \dots \delta_{s_t}^{(t)}\rho_t) = 0, \quad \text{если } \delta_i^j \in \Delta, \quad (4)$$

$$\rho \in R(A), \quad \sum_{i=1}^t s_i = n - 1.$$

Прежде всего, можно считать, что ρ_i является оператором правого умножения, поскольку $R(A)$ линейно порождается элементами вида $\delta_1 \dots \delta_m R_a$, где $\delta \in \Delta$, $a \in A$. Далее, можно рассуждать индукцией по числу операторов ρ_i . Поскольку во всякой коммутативной альтернативной алгебре справедлива следующая переработка произведений:

$$\begin{aligned} (uc)(vb) &= -(u(vb))c + 2u((vb)c) \\ &= (u, v, b)c - ((uv)b)c + 2u(v(bc)) + 2u(v, b, c) \\ &= (u, v, b)c - (uv, b, c) - (uv)(bc) + 2u(v(bc)) + 2u(v, b, c) \\ &= (u, v, b)c - (uv, b, c) + (uv)(bc) - 2(u, v, bc) + 2u(v, b, c) \\ &= (u, v, b)c - u(v, b, c) - (u, b, c)v + (uv)(bc) - 2(u, v, bc) + 2u(v, b, c) \\ &= (u, v, b)c + (v, b, c)u - (u, b, c)v + (uv)(bc) - 2(u, v, bc), \end{aligned}$$

в силу леммы 3 и предположения индукции получаем равенство (4), из которого очевидным образом и вытекает теорема.

2.4. Точность оценки. Имеем в силу леммы 2

$$\begin{aligned} x_1 R(x_2, x_3) R(x_3, x_4) \dots R(x_{n-2}, x_{n-1}) R(x_{n-1}, x_n) \\ = f_{n-2}(x_1, x_2, x_n \mid x_3, x_4, \dots, x_{n-1}) \neq 0; \end{aligned}$$

значит, $(n - 2)$ -я степень коммутанта алгебры умножений свободной коммутативной альтернативной алгебры ранга n отлична от нуля.

§ 3. Доказательство следствий

Сначала докажем следствие 1. Пусть A – коммутативная альтернативная алгебра с единицей 1 ранга n ; $a_1, \dots, a_n$ – ее порождающие; E – лупа ее обратимых элементов.

Ассоциаторы элементов a, b, c , вычисленные в лупе E и алгебре A , связаны соотношениями $[a, b, c] = (ab \cdot c)(a \cdot bc)^{-1} = (a \cdot bc + (a, b, c))(a \cdot bc)^{-1} = 1 + (a, b, c) \cdot v$, $v \in A$. Итак,

$$[a, b, c] = 1 + (a, b, c) \cdot v \quad \text{для некоторого } v \in A.$$

Докажем индукцией по t , что $E_t \subseteq 1 + A \cdot \rho^t$, где ρ – коммутант алгебры $R(A)$. Основанием индукции служит предыдущее равенство. Сделав индуктивное предположение, на основании последнего равенства получаем

$$E_{t+1} = [E_t, E, E] \subseteq 1 + (E_t, E, E)A \subseteq 1 + (A \cdot \rho^t, A, A)A \subseteq 1 + A \cdot \rho^{t+1}.$$

Отсюда в силу теоремы получаем $E_{n-1} = 1$, т.е. лупа E центрально нильпотентна индекса не выше $n - 1$.

Докажем теперь следствие 2. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – обратимые элементы коммутативной альтернативной алгебры A с единицей 1. Обозначим через E подлупу в $U(A)$, порожденную элементами $e_1, \dots, e_n$. Кроме того, рассмотрим подалгебры $\overline{E}$ и $\overline{E}_0$ в A , порожденные лупой E и элементами $e_1, \dots, e_n$ соответственно. Поскольку $a^3 \in Z(A)$ для любого $a \in A$, то $\overline{E} \subseteq \overline{E}_0 \cdot Z(A)$. Значит, для доказательства центральной нильпотентности индекса $\leq n - 1$ лупы E достаточно доказать центральную нильпотентность индекса $\leq n - 1$ алгебры $\overline{E}$. Учитывая, что ввиду теоремы алгебра $\overline{E}_0$ центрально нильпотентна индекса $\leq n - 1$, получаем центральную нильпотентность индекса $\leq n - 1$ алгебры $\overline{E}$. Тем самым, доказана центральная нильпотентность индекса $\leq n - 1$ специальной КЛМ E .

Точность оценки немедленно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 8. *Функции Брака F_n в свободной специальной КЛМ счетного ранга отличны от единицы 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свободную коммутативную альтернативную алгебру A с единицей и множеством $X = \{x, y, z, a_1, \dots, a_n\}$ свободных порождающих. Обозначим через I подпространство в алгебре A , порожденное словами над множеством X длины $\geq 2n + 4$ (степень рассматриваемой функции равна $2n + 3$); ясно, что I – идеал A . Тогда в факторалгебре A/I элементы $1 + (x + I)$, $x \in X$, обратимы, а лупа E , порожденная этими элементами, является КЛМ. В дальнейшем для сокращения записи будем писать $1 + x$ вместо $1 + (x + I)$.

Если a, b, c – многочлены (без свободного члена) над X , то легко проверить, что ассоциатор $[1 + a, 1 + b, 1 + c]$ в лупе E имеет вид

$$[1 + a, 1 + b, 1 + c] = 1 + (a, b, c) + g,$$

где g – сумма одночленов, степень каждого из которых больше, чем степень d любого из одночленов, входящих в правую часть равенства $abc = \sum_i v_i$ с ненулевым коэффициентом. Действительно, считая $p = a + b + c + ab + ac + bc$, и используя

сравнение по модулю пространства, порожденного одночленами степени большей, чем d , имеем

$$\begin{aligned}
 [1+a, 1+b, 1+c] &= [(1+a)(1+b) \cdot (1+c)][(1+a) \cdot (1+b)(1+c)]^{-1} \\
 &= [1+p+(ab)c][1+p+a(bc)]^{-1} \\
 &= [1+p+(ab)c][1-(p+a(bc)) + (p+a(bc))^2 - (p+a(bc))^3 + \dots] \\
 &\equiv [1+p+(ab)c][(1-p+p^2-p^3+\dots) - a(bc)] \\
 &\equiv 1+(ab)c - a(bc) \equiv 1+(a, b, c).
 \end{aligned}$$

Следовательно, $F_n(1+x, 1+y, 1+z \mid 1+a_1, \dots, 1+a_n) = 1 + f_n(x, y, z \mid a_1, \dots, a_n)$, откуда в силу леммы 2 и получается требуемое утверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Springer, Berlin, 1958.
- [2] Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972.
- [3] J. D. H. Smith, “On the nilpotence class of commutative Moufang loops”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **84**:3 (1978), 387–404.
- [4] I. P. Shestakov, “Moufang loops and alternative algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:2 (2004), 313–316.
- [5] С. В. Пчелинцев, “Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 183–206.
- [6] С. В. Пчелинцев, “О тождествах свободных конечно порожденных альтернативных алгебр над полем характеристики 3”, *Матем. сб.*, **192**:9 (2001), 109–124.

С. В. Пчелинцев

Финансовая академия

при правительстве Российской Федерации,
г. Москва

Поступило

17.05.2005

Исправленный вариант

12.01.2006