Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Стороженко, Неравенство Никольского–Стечкина
для тригонометрических полиномов в L_0 , *Матем. за-
метки*, 2006, том 80, выпуск 3, 421–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:31:26

НЕРАВЕНСТВО НИКОЛЬСКОГО–СТЕЧКИНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В L_0

Э. А. Стороженко

В статье неравенство Никольского–Стечкина для тригонометрических полиномов обобщается на пространство L_0 . Полученные оценки окончательны.

Библиография: 11 названий.

1. Неравенство Никольского–Стечкина

$$\|T'_n\|_C \leq \frac{n}{2 \sin(nh/2)} \|T_n(x+h) - T_n(x)\|_C \quad (1)$$

для тригонометрических полиномов $T_n(x)$ (С.Б. Стечкин [1] с $0 < h < 2\pi/n$, С.М. Никольский [2] с $h = \pi/n$) является обобщением известной оценки С.Н. Бернштейна

$$\|T'_n\|_C \leq n \|T_n\|_C. \quad (2)$$

Оба неравенства (1) и (2) разными авторами обобщались на L_p с $0 < p < \infty$. Первые результаты были получены для $0 < p < 1$, когда при доказательстве сохранялся традиционный метод, правые части неравенств (1), (2) содержали коэффициенты C_p , неограниченно возрастающие при $p \rightarrow 0$ (см., например, [3]–[6]).

Дальнейшее продвижение в улучшении оценки (2) связано с новым методом рассуждений В.В. Арестова (см. [7]). Доказав сначала неравенство (2) для $p = 0$ с коэффициентом, равным единице, Арестов распространил (2) с тем же коэффициентом на все значения $p \in (0, 1)$. Относительно неравенства (1) неизвестным остается окончательный рост C_p при $0 < p < 1$ и сама оценка при $p = 0$. В настоящей статье как раз и рассматривается неравенство (1) в L_0 для тригонометрических полиномов степенного и общего вида.

2. Пусть $P_n(z)$ – алгебраический полином с комплексными коэффициентами; будем записывать его в виде $P_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k c_k z^k$. “Нулевая норма” или мера (по Малеру) полинома P_n определяется функционалом

$$\exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |P_n(e^{it})| dt \right) = \|P_n\|_0.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (ДФФД), грант № Ф7/329-2001.

Пусть еще $Q_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k a_k z^k$, $R_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k z^k$ и $a_k \cdot b_k = c_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Полином P_n называется (по Сегё) *композицией полиномов* Q_n и R_n и обозначается $P_n = Q_n \otimes R_n$.

При установлении связи между мерами полиномов P_n и Q_n удобно использовать одно соотношение Арестова (см. [8]):

$$\|P_n\|_0 \leq \|Q_n\|_0 \|R_n\|_0. \quad (3)$$

Тогда в этом неравенстве мера R_n играет роль коэффициента. Найти точное значение $\|R_n\|_0$ удастся в исключительных случаях; в остальных – приходится оценивать различными искусственными приемами. В нашем случае для этой цели была использована формула дополнения гамма-функции Эйлера

$$\begin{aligned} \Gamma(1-a)\Gamma(1+a) &= \frac{a\pi}{\sin a\pi} = \int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^a + x^{-a}}{(1+x)^2} dx, \quad |a| < 1 \end{aligned} \quad (4)$$

(см., например, [9; с. 158]).

Указанный выше способ рассуждений применяется для тригонометрических полиномов степенного вида. Переход к общим тригонометрическим полиномам

$$T_n(t) = A_0 + \sum_{k=-n}^n (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

основан на взаимно-однозначном соответствии между $T_n(t)$ и значениями алгебраического полинома $P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} c_k z^k$ на единичной окружности:

$$T_n(e^{it}) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}). \quad (5)$$

3. Сначала рассмотрим случай многочленов степенного вида.

ТЕОРЕМА 1. Для любого полинома $P_n(z)$ и его приращения вдоль дуги окружности

$$\Delta_h^1 P_n(z) = P_n(z) - P_n(ze^{ih})$$

выполняется неравенство

$$\|P'_n\|_0 \leq A_{n,h} \|\Delta_h^1 P_n\|_0, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{n}, \quad (6)$$

где

$$A_{n,h} = \left\| \frac{2\pi}{h^2} \int_0^1 [(1+xz)^{n-1} + (x+z)^{n-1} x^{-(n+1)}] \frac{x^{2\pi/h}}{(1+x^{2\pi/h})^2} dx \right\|_0. \quad (7)$$

Существуют полиномы, для которых в (6) имеет место знак равенства. Коэффициент $A_{n,h}$ оценивается неравенствами

$$A_{n,h} \leq \frac{n}{\sin(nh/2)} \left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} |1+tz|^{n-1} \right\|_0, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{n}, \quad (8)$$

$$\left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} |1+tz|^{n-1} \right\|_0 \leq 2^{2(n-1)/3} e^{-(2/\pi)L(\pi/3)(n-1)}. \quad (9)$$

Здесь

$$L(x) = - \int_0^x \ln \cos t \, dt$$

– функция Лобачевского. Табличные значения $L(x)$ приводят к приближенной оценке

$$\left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} |1 + tz|^{n-1} \right\|_0 \approx 2^{(n-1)/2}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба полинома $P'_n(z)$ и $P_n(z) - P_n(ze^{ih})$ не зависят от свободного члена $P_n(z)$; поэтому с самого начала свободный член можно считать равным нулю, что позволяет $P_n(z)$ записать в виде

$$P_n(z) = z \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_k z^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} P'_n(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_k (k+1) z^k, \\ \Delta_h^1 P_n(z) &= z \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a_k (1 - e^{i(k+1)h}) z^k \end{aligned}$$

и имеет место композиция

$$P'_n(z) = \frac{1}{z} \Delta_h^1 P_n(z) \otimes Q_{n-1}(z),$$

где

$$Q_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{k+1}{1 - e^{i(k+1)h}} z^k.$$

На основании неравенства (3) сразу получаем оценку (6)

$$\|P'_n\|_0 \leq A_{n,h} \|\Delta_h^1 P_n\|_0 \quad \text{с} \quad A_{n,h} = \|Q_{n-1}\|_0.$$

Легко убедиться в том, что когда

$$P_n(z) = z \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{z^k}{1 - e^{i(k+1)h}},$$

то левая и правая части (6) равны. В самом деле,

$$P'_n(z) = Q_{n-1}(z), \quad \Delta_h^1 P_n(z) = z(1+z)^{n-1},$$

и тогда

$$\|P'_n\|_0 = \|Q_{n-1}\|_0, \quad \|\Delta_h^1 P_n\|_0 = 1.$$

Поэтому полиномы $aP_n(z) + b$ являются экстремальными для неравенства (6).

Далее, полином $Q_{n-1}(z)$ заменим более простым

$$e^{-ih/2}Q_{n-1}(ze^{-ih/2}) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{(k+1)z^k}{\sin(k+1)h/2}$$

(меры их равны!) и оставим за последним то же самое обозначение Q_{n-1} . Преобразуем полином Q_{n-1} при помощи формулы (4), полагая $a\pi = (k+1)h/2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$Q_{n-1}(z) = -\frac{2\pi}{h^2} \int_0^1 [(1+xz)^{n-1} + (x+z)^{n-1}x^{-(n+1)}] \frac{x^{2\pi/h}}{(1+x^{2\pi/h})^2} dx. \quad (11)$$

В силу равенств $|1+xz| = |x+z|$, $z = e^{it}$ и (4) при $k=0$ и $k=n-1$, получаем

$$\begin{aligned} |Q_{n-1}(ze^{-ih/2})| &\leq \frac{2\pi}{h^2} \int_0^1 |1+xz|^{n-1} (1+x^{-(n+1)}) \frac{x^{2\pi/h}}{(1+x^{2\pi/h})^2} dx \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |1+xz|^{n-1} \frac{1}{h} \left[\frac{h/2}{\sin h/2} + \frac{nh/2}{\sin nh/2} \right] \\ &\leq \frac{n}{\sin nh/2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |1+xz|^{n-1} \end{aligned}$$

и тем самым (8) доказано.

Меру $\sup_{0 \leq t \leq 1} |1+tz|^{n-1}$ оцениваем при помощи неравенств

$$|1+te^{i\varphi}|^2 = \begin{cases} 1+t^2+2t\cos\varphi \leq 1, & \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \\ 2(1+\cos\varphi) - (1-t)(1+t-2\cos\varphi) \leq 4\cos^2\frac{\varphi}{2}, & 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln \sup_{0 \leq t \leq 1} |1+te^{i\varphi}|^{n-1} d\varphi &\leq (n-1) \left[\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/3} \ln \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi \right] \\ &= (n-1) \left[\frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{\pi} L\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

Теорема 1 полностью доказана.

4. Приведем некоторые замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 доказана при условии $h < 2\pi/n$, обеспечивающем сходимость интегралов в (4) и (7). Если предположить, что $h = 2\pi/(n+1)$, то возможно уменьшить порядок относительно n коэффициента $A_{n,h}$. С этой целью запишем Q_{n-1} для значения $h = 2\pi/(n+1)$ (см. (11)) и в оценке $|Q_{n-1}|$ второе из неравенств в (12) заменим двумя

$$|1+te^{i\varphi}|^2 \leq \begin{cases} 2(1+t)\cos^2\varphi/2, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2; \\ 4\cos^2\varphi/2, & \pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi/3. \end{cases}$$

Тогда

$$|Q_{n-1}| \leq \frac{(n+1)^2}{2\pi} \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{n+1} \cos^{n-1} \varphi/2, & 0 \leq \varphi \leq \pi/2; \\ 2^{n-1} \cos^{n-1} \varphi/2, & \pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi/3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_{n,2\pi/(n+1)} &\leq \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln |Q_{n-1}| d\varphi\right) \\ &\leq \frac{1}{\pi} (n+1)^{3/2} 2^{2(n-1)/3} e^{-(2/\pi)L(\pi/3)(n-1)} = \frac{1}{\pi} (n+1)^{3/2} \lambda_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Если воспользоваться общим результатом (8), (9), то

$$A_{n,h} \leq \frac{n(n+1)}{2} \lambda_n,$$

т.е. оценка (13) лучше, полученной ранее (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с наличием в двух оценках (9) и (13) возрастающего множителя λ_n возникает вопрос об окончательном характере роста λ_n . Чтобы дать частичный ответ, сначала напомним еще одно неравенство с λ_n в правой части (см. [10]):

$$\|(1+z)^n - 1\|_0 = \prod_{n/6 \leq k \leq 5n/6} 2 \sin \frac{\pi k}{n} \leq \lambda_n$$

и рассмотрим теорему 1 на примере полинома

$$R_n(z) = (1+z)^{n+1} - 1 - z^{n+1}.$$

(Между прочим, полином

$$R_n(z) = nz \int_0^1 (1+tz)^{n-1} + (t+z)^{n-1} dt$$

и близок к экстремальному $P_n(z)$ из доказательства теоремы 1 после преобразования его по формуле Эйлера). Очевидно, что

$$\|R'_n\|_0 = (n+1)\|(1+z)^n - z^n\|_0 = (n+1)\|(1+z)^n - 1\|_0,$$

а мера $\Delta_{2\pi/(n+1)}^1 R$, подсчитанная нами в статье [11], равна

$$\|\Delta_{2\pi/(n+1)}^1 R\|_0 = \begin{cases} 2n \cos \frac{\pi}{2(n+1)}, & n \text{ нечетное;} \\ 2n, & n \text{ четное.} \end{cases}$$

Поэтому неравенство

$$\|R'_n\|_0 \leq A_n \|\Delta_{2\pi/(n+1)}^1 R_n\|_0$$

оказывается верным, если $A_n \geq \frac{1}{2} \|(1+z)^n - 1\|_0$. Следовательно, рост коэффициента $A_{n,h}$ не может быть меньше, чем $\|(1+z)^n - 1\|_0$.

5. Перейдем к общим тригонометрическим полиномам $T_n(t)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого полинома $T_n(t)$ и его приращения

$$\Delta_h^1 T_n(t) = T_n(t+h) - T_n(t)$$

выполняется неравенство

$$\|T'_n\|_0 \leq B_{n,h} \|\Delta_h^1 T_n\|_0, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{n}, \quad (14)$$

где

$$B_{n,h} = \left\| \frac{2\pi}{h^2} \int_0^1 [(1+xz)^{2n} + (x+z)^{2n}] \frac{x^{-(n+1)+2\pi/h}}{(1+x^{2\pi/h})^2} dx \right\|_0. \quad (15)$$

Неравенство (14) точное; существуют полиномы, на которых (14) обращается в равенство. Для коэффициента $B_{n,h}$ справедлива оценка

$$B_{n,h} \leq \frac{n}{2 \sin(nh/2)} \left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} |1+tz|^{2n} \right\|_0, \quad 0 < h < \frac{2\pi}{n}, \quad (16)$$

и

$$\left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} |1+tz|^{2n} \right\|_0 \leq 2^{4/3} e^{-(4n/\pi)L(\pi/3)} \approx 2^n. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сохраняя схему доказательства теоремы 1, опустим некоторые детали. Если

$$T_n(t) = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k e^{ikt} = e^{-int} P_{2n}(z), \quad z = e^{it},$$

то связь между полиномами $T'_n(t)$, $\Delta_h^1 T_n(t)$ с $P_{2n}(z)$ выражается равенствами

$$\begin{aligned} T'_n(t) &= ie^{-int} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k (k-n) z^k, \\ \Delta_h^1 T_n(t) &= e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k (e^{i(k-n)h} - 1) z^k, \quad z = e^{it}. \end{aligned}$$

Тогда композиция

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k (k-n) z^k = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k (e^{i(k-n)h} - 1) z^k \otimes \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{k-n}{e^{i(k-n)h} - 1} z^k$$

приводит к неравенству (14) с

$$B_{n,h} = \left\| \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{k-n}{e^{i(k-n)h} - 1} z^k \right\|_0 = \|U_{2n}\|_0.$$

Заметим, что в указанной композиции коэффициент у U_{2n} при $k=n$ может быть каким угодно; будем считать его равным 1 (это в соответствии с правой частью (4) при $a=0$).

Экстремальный полином $T_n(t)$ удобно задавать его производной. Пусть

$$T'_n(t) = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \frac{k-n}{e^{i(k-n)h} - 1} e^{ikt}.$$

Мера $T'_n(t)$ как раз совпадает с $\|U_{2n}\|_0$. Приращение

$$\Delta_h^1 T_n(t) = \int_t^{t+h} T'_n(\varphi) d\varphi = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(k-n)t}$$

и

$$\|\Delta_h^1 T_n(t)\|_0 = \left\| e^{-i(n+1)t} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(k+1)t} \right\|_0 = \left\| z \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k z^k \right\| = 1.$$

Остальное ясно.

Дальнейшие действия связаны с преобразованием полинома $U_{2n}(z)$, аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1 относительно полинома Q_{n-1} . В случае тригонометрических полиномов важно, что равенство (4) справедливо не только для положительных значений a , но и для отрицательных. Опустим все подробно, в результате получим равенство (15), а вместе с ним и оценку (16). Остается воспользоваться неравенствами (9) и (10) с заменой $n-1$ на $2n$.

Теорема 2 доказана.

6. Рассмотрим еще одну близкую по смыслу задачу, когда приращение полинома $P_n(z)$ берется вдоль радиуса единичной окружности: $\Delta_{1-r}^1 P_n = P_n(z) - P_n(rz)$, $0 < r < 1$.

Результат выглядит так:

$$\begin{aligned} \|P'_n\|_0 &\leq \left\| \sum_{k=0}^n C_{n-1}^k (k+1) \frac{z^k}{1-r^{k+1}} \right\|_0 \|\Delta_{1-r}^1 P_n\|_0 \\ &\leq \frac{n}{1-r} \left\| \sup_{0 \leq t \leq 1} |1+tz|^{n-1} \right\|_0; \end{aligned} \quad (18)$$

с дальнейшим учетом оценок (9) и (10) очевидно, что для полинома

$$S_n(z) = z \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{z^k}{1-r^{k+1}}$$

в неравенстве (18) обе части равны.

Принцип доказательства оценки коэффициента тот же, что и в предыдущих теоремах, но без привлечения формулы Эйлера (4).

Более точный подсчет коэффициента в (18) на основании оценок в замечании 1 дает возможность заменить множитель n на $\sqrt{n}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.Б. Стечкин, “Обобщение некоторых неравенств С.Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60:9** (1948), 1511–1514.

- [2] С. М. Никольский, “Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60**:9 (1948), 1507–1510.
- [3] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, “Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **98 (140)** (1975), 395–415.
- [4] В. И. Иванов, “Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ ”, *Матем. заметки*, **18**:5 (1975), 641–658.
- [5] П. Освальд, “Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов в метрике L^p , $0 < p < 1$ ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1976, № 7, 65–75.
- [6] Э. А. Стороженко, *Приближение функций и теоремы вложения в пространствах H^p и L^p* , Дисс. ... д.ф.-м.н., ОГУ, Одесса, 1978.
- [7] В. В. Арестов, “Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 3–22.
- [8] В. В. Арестов, “Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности”, *Матем. заметки*, **48**:4 (1990), 7–18.
- [9] И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИТТЛ, М.–Л., 1951.
- [10] Э. А. Стороженко, “К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной”, *Матем. сб.*, **187**:5 (1996), 111–120.
- [11] Э. А. Стороженко, “Разностные неравенства для полиномов в L_0 ”, *Матем. студії*, **22**:1 (2004), 27–34.

Э. А. Стороженко

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

E-mail: jurish@te.net.ua

Поступило

23.08.2005