Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Филиппов, Возмущение тригонометрической системы в $L_1(0, \pi)$, *Матем. заметки*, 2006, том 80, выпуск 3, 429–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:34:09

ВОЗМУЩЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В $L_1(0, \pi)$

В. И. Филиппов

В работе изучается специальное возмущение функциональной системы, которая получается из ядра Фейера. Показано как это согласуется с устойчивостью базисов и полных систем, а также с устойчивостью тригонометрической системы. Дается алгоритм приближения по системам, полученным возмущением исходной системы.

Библиография: 9 названий.

В работе [1] с помощью ядра Фейера строится система вида

$$F_0(x) \equiv 1, \\ F_k^{(n)} = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \left(\frac{\sin 2^n(x - (2k-1)\pi/2^n)}{\sin \frac{1}{2}(x - (2k-1)\pi/2^n)} \right)^2 = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \frac{1 - \cos(2^{n+1}x)}{1 - \cos(x - (2k-1)\pi/2^n)}, \quad (1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, 2^n$, и устанавливается, что система (1) является диадическим интерполяционным базисом в пространстве непрерывных 2π -периодических функций. В данной работе мы рассматриваем возмущение системы (1), а, именно, систему (8) и возмущение тригонометрической системы в пространстве $L_1(0, \pi)$. Устойчивость полных систем в банаховых пространствах рассматривалась в работе [2], а возмущения полных минимальных систем рассматривались в работах [3]–[5].

Приведем теоремы А и В об устойчивости полных минимальных систем так, как они приводятся в работе [4].

ТЕОРЕМА А (М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман [3]). *Минимальная последовательность $X = \{x_k\}_1^\infty \subset S(B)$ устойчива в том смысле, что при любых $\{\varepsilon_k \geq 0\}_{k=1}^\infty$, для которых*

$$q = \sum_1^\infty \varepsilon_k \|x_k^*\| < 1, \quad (2)$$

любая последовательность $Y = \{y_k\}_1^\infty$, где $\|y_k - x_k\| \leq \varepsilon_k$, $k = 1, 2, \dots$, эквивалентна (и, более того, 0-изометрична) X и полнота X влечет полноту Y .

Тем самым, Y минимальна; более того, если X базисная, то и Y базисная, а если X безусловная базисная, то и Y безусловно базисная последовательность.

В том случае, если

$$\sum_1^\infty \varepsilon_k \|x_k^*\| < \infty,$$

указанные выше выводы также справедливы после удаления, быть может, конечного числа элементов из X и Y .

Назовем последовательность $U = \{u_k\}_1^\infty$ подчиненной $X = \{x_k\}_1^\infty$, если существует $C > 0$ такое, что при любых $\{a_k\}_1^\infty$ и $n = 1, 2, \dots$

$$\left\| \sum_1^n a_k u_k \right\| \leq C \left\| \sum_1^n a_k x_k \right\|. \quad (3)$$

Будем писать в этом случае $U \prec X$. Последовательность $\{x_k + u_k\}_1^\infty$ обозначим $X + U$, а $\{\varepsilon x_k\}_1^\infty$ обозначим εX .

ТЕОРЕМА В (Ю. Б. Тумаркин [5]). Пусть X – минимальная в B система и $U \prec X$ с некоторой константой C_0 в неравенствах (3). Тогда при любом $\varepsilon < \varepsilon_0 = 1/C_0$ последовательность $Y = X + \varepsilon U$ эквивалентна X и полнота X влечет полноту $X + \varepsilon U$.

СЛЕДСТВИЕ А [4]. Из теоремы В следует теорема А, так как условие (2) означает, что выполняется соотношение $Y - X = U \prec X$ с константой q в (3).

Действительно, пусть

$$x = \sum_1^n a_k x_k = \sum_1^n x_k^*(x) x_k.$$

Тогда

$$\left\| \sum_1^n a_k u_k \right\| = \left\| \sum_1^n x_k^*(x) (y_k - x_k) \right\| \leq \sum_1^n |x_k^*(x)| \|y_k - x_k\| \leq \left(\sum_1^n \|x_k^*\| \varepsilon_k \right) \|x\| \leq q \|x\|.$$

Приведем некоторые другие факты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система $\{f_n\} \subset L_p$, $0 < p < \infty$, называется *системой представления* в пространстве L_p , если для любой функции $f \in L_p$ существует ряд $\sum_{k=1}^\infty c_k f_k$ такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|_p = 0.$$

Здесь

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\min(1, 1/p)}, \quad 0 < p < \infty, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty.$$

Рассмотрим функциональную систему $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \in L_1(a, b)$ такую, что

$$\sup_n \sigma_n = \sigma < 1, \quad (4)$$

где

$$\sigma_n = \inf \left\{ \frac{1}{|Q|} \|\chi_Q(t) - \lambda \varphi_n(t)\|_1 : \lambda \in \mathbb{R}, Q \subset (a, b) \right\}.$$

Если $\varepsilon > 0$ такое, что $\sigma + \varepsilon = \sigma' < 1$, то существуют $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $Q_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} [a_i^n, b_i^n]$ такие, что

$$\sigma'_n = \frac{1}{|Q_n|} \|\chi_{Q_n}(t) - \lambda_n \cdot \varphi_n(t)\|_1 \leq \sigma + \varepsilon = \sigma' < 1 \quad (5)$$

и также $\sup_n \sigma'_n \leq \sigma' < 1$. Пусть система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \text{mes} \left\{ (a, b) \setminus \bigcup_{n=N}^{\infty} Q_n \right\} = 0. \quad (6)$$

Пусть $x_n = \min_i \{a_i^n\}$, $y_n = \max_i \{b_i^n\}$; обозначим $d(\varphi_n) = y_n - x_n$ и $\text{supp } \varphi_n = \{t : \varphi_n(t) \neq 0\}$. Пусть

$$d(\varphi_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad d(\varphi_n) \neq 0. \quad (7)$$

Ниже мы используем определение покрытия в смысле Витали [6; с. 30, 231].

ТЕОРЕМА С [7]. *Предположим, что система $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_1(a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, удовлетворяет условиям (5)–(7) и для каждого $N \in \mathbb{N}$ множество (a, b) покрывается в смысле Витали семейством $\{Q_n\}_{n=N}^{\infty}$. Тогда если $N \in \mathbb{N}$, то система $\{\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является системой представления в $L_1(a, b)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что доказательство теоремы С представляет собой конкретный алгоритм разложения элементов пространства L_1 по системам функций, удовлетворяющих условиям теоремы С.

ТЕОРЕМА D [8]. *Если система функций $\{f_n\}$ является системой представления в пространстве $L_q(0, \pi)$, $0 < q < \infty$, то система $\{f_n\}$ является системой представления и в пространствах $L_p(0, \pi)$ для всех p , $0 < p < 1$, $p \leq q$.*

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\varphi_{n,k} - \cos 2^{n+1}x}{1 - \cos(x - 2\pi(2k+1)/2^n)} \right| dx \leq 0.37, \quad n = 2, 3, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1.$$

Тогда существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что система

$$\frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1 - \varphi_{n,k}(x)}{1 - \cos(x - (2k+1)2\pi/2^n)} \right\}, \quad n = n_0 + 2, n_0 + 3, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1, \quad (8)$$

является системой представления в пространстве $L_p(0, \pi)$, $0 < p \leq 1$, и существует конкретный алгоритм приближения по системе (8) в этих пространствах.

Для доказательства теоремы 1 необходима

ЛЕММА 1. Ядро Фейера

$$\delta_{2^n}(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(\frac{\sin(2^n x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$$

удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right| dx \\ & \leq 0.62 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L^1(0, \pi)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ядро Фейера в виде

$$\delta_{2^n}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n - k}{2^n} \cos kx = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(\frac{\sin 2^{n-1}x}{\sin(x/2)} \right)^2.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Первый положительный нуль ядра Фейера есть $2\pi/2^n$. Вычислим

$$I_{2^n} = \int_0^{2\pi/2^n} \delta_{2^n}(x) dx = \frac{\pi}{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n - k}{k2^n} \sin \frac{2k\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \sin \frac{2k\pi}{2^n}.$$

Здесь I_{2^n} – это квадратурная формула для интегрального синуса

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1.4181515761326 \dots$$

Очевидно, что

$$|I_{2^n} - I| < \delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Пусть n_0 – настолько большое число, что для $n \geq n_0$ мы имеем $\delta_n \leq 1/100$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right| dx \\ &= \int_{2\pi 2k/2^n}^{2\pi 2(k+1)/2^n} \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1}} \int_{2\pi 2k/2^n}^{2\pi 2(k+1)/2^n} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2^{n-1}} \int_{(0,\pi) \setminus \left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) dx \\ &\leq \frac{2\pi}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{\pi}{2\pi} - \frac{2I_n}{\pi} \right) \leq \frac{2\pi}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{\pi}{2\pi} - \frac{2I}{\pi} + \frac{C_1}{2^{2n}2\pi} \right) \\ &\leq 0.62 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L^1(0,\pi)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x)$ является характеристической функцией интервала $\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)$, где $n = 2, 3, \dots$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$. Зафиксируем эти номера n и k . Теперь покажем, что существует $0 < \sigma_0 < 1$ такое, что имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1 - \varphi_{n,k}(x)}{1 - \cos(x - 2\pi(2k+1)/2^n)} \right\|_p \\ & < \sigma_0 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_p, \quad 0 < \sigma_0 < 1. \end{aligned}$$

Пусть $n \geq n_0$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2^{n-1}} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) - \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1 - \varphi_{n,k}(x)}{1 - \cos(x - (2k+1)2\pi/2^n)} \right\} \right\|_{L(0,\pi)} \\ & \leq \frac{2\pi}{2\pi 2^{n-1}} \int_0^\pi \left| \frac{\varphi_{n,k}(x) - \cos 2^{n+1}x}{1 - \cos(x - (2k+1)2\pi/2^n)} \right| dx \leq 0.37 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L(0,\pi)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому, используя лемму 1 и (10), получим

$$\begin{aligned} & \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1 - \varphi_{n,k}(x)}{1 - \cos(x - 2\pi(2k+1)/2^n)} \right\} \right\|_1 \\ & < \sigma_0 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_1, \quad 0 < \sigma_0 \leq 0.99 < 1. \end{aligned}$$

Из теоремы C следует, что система (8) является системой представления в пространстве $L_1(0, \pi)$, а из теоремы D следует, что и в пространствах L_p , $0 < p \leq 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть система 2π -периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty \in L_1(0, 2\pi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos kx - \varphi_k(x)| dx \leq \sigma_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{2^n - k}{2^n} \sigma_k \leq 0.37$$

для всех $n = 1, 2, \dots$, то система специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0, \pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0, \pi)$ по системе специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $n \geq n_0$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2^{n-1}} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) - \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \varphi_0 \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \varphi_j \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right) \right\|_{L(0,\pi)} \\ & \leq \frac{2\pi}{2^{n-1}} \left\| \frac{1}{4\pi} \left(1 - \varphi_0 \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \left(\cos j \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) - \varphi_j \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right) \right) \right\|_{L(0,\pi)} \\ & \leq \left(\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n - j}{2^n} \sigma_j \right) \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L(0,\pi)} \\ & \leq 0.37 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_{L(0,\pi)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Поэтому, используя лемму 1 и (11), получим

$$\begin{aligned} & \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \varphi_0 \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \varphi_j \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right) \right\|_1 \\ & < \sigma_0 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n}\right)}(x) \right\|_1, \quad 0 < \sigma_0 \leq 0.99 < 1. \end{aligned}$$

Из теоремы С следует, что система

$$\left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \varphi_0 \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \varphi_j \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right) \right\}, \quad (12)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1,$$

является системой представления в пространстве $L_1(0, \pi)$, а из теоремы D следует, что и в пространствах L_p , $0 < p \leq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть система 2π -периодических функций $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty \in L_1(0, 2\pi)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos kx - \varphi_k(x)| dx \leq \sigma_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если

$$\frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \leq 0.37,$$

то система специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ полна в пространстве $L_1(0, \pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0, \pi)$ по системе специальных сдвигов системы $\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть система функций $\varphi_0^1(x) \cup \{\varphi_n^i(x)\}_{n=1}^\infty \in L_1(0, \pi)$, $i = 1, 2$, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |\cos kx - \varphi_k^1(x)| dx \leq \sigma_k^1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |\sin kx - \varphi_k^2(x)| dx \leq \sigma_k^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Если

$$\frac{\sigma_0^1}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left[\sigma_j^1 \left| \cos \frac{j2\pi(2k+1)}{2^n} \right| + \sigma_j^2 \left| \sin \frac{j2\pi(2k+1)}{2^n} \right| \right] \leq 0.37$$

для всех $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$, то система $\varphi_0^1(x) \cup \{\varphi_n^i(x)\}_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$, полна в пространстве $L_1(0, \pi)$ и существует конкретный алгоритм приближения в пространстве $L_1(0, \pi)$ по системе $\varphi_0^1(x) \cup \{\varphi_n^i(x)\}_{n=1}^\infty$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \geq n_0$, $k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \cos j \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left[\cos jx \cos \left(j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) + \sin jx \sin \left(j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right] \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2^{n-1}} \delta_{2^n} \left(x - (2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) - \frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{1}{2} \varphi_0^1(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left(\varphi_j^1(x) \cos j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} + \varphi_j^2(x) \sin j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right) \right] \right\|_{L(0, \pi)} \\ &\leq \frac{2\pi}{2^{n-1}} \left\| \frac{1}{4\pi} (1 - \varphi_0^1(x)) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left[\cos(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} (\cos jx - \varphi_j^1(x)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} (\sin jx - \varphi_j^2(x)) \right] \right\|_{L(0, \pi)} \\ &\leq \frac{\sigma_0^1}{2} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left[\sigma_j^1 \left| \cos j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right| \right. \\ &\quad \left. + \sigma_j^2 \left| \sin j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right| \right] \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n} \right)}(x) \right\|_{L(0, \pi)} \\ &\leq 0.37 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n} \right)}(x) \right\|_{L(0, \pi)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Используя лемму 1 и (13), получим

$$\begin{aligned} &\left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n} \right)}(x) - \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \varphi_0^1(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left[\varphi_j^1(x) \cos j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} + \varphi_j^2(x) \sin j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right] \right) \right\|_1 \\ &< \sigma_0 \left\| \chi_{\left(\frac{2\pi 2k}{2^n}, \frac{2\pi 2(k+1)}{2^n} \right)}(x) \right\|_1, \quad 0 < \sigma_0 \leq 0.99 < 1. \end{aligned}$$

Из теоремы C следует, что система

$$\left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{2} \varphi_0^1(x) + \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2^n-j}{2^n} \left[\varphi_j^1(x) \cos j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} + \varphi_j^2(x) \sin j(2k+1) \frac{2\pi}{2^n} \right] \right) \right\},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, 2^{n-2} - 1, \tag{14}$$

является системой представления в пространстве $L_1(0, \pi)$, а из теоремы D следует, что и в пространствах L_p , $0 < p \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теоремах А и В приводятся результаты об устойчивости полных минимальных систем. В теореме 1 рассматривается специальное возмущение системы (1), при этом системы (1) и (8), очевидно, не являются минимальными, а в теореме 3 более слабое возмущение, чем в теоремах А и В, но приводится алгоритм представления по новой, полученной возмущением, системе, что пока не представляется возможным сделать для всех систем при использовании теорем А и В в пространстве L_1 (так как процесс ортогонализации в L_1 не применим).

Заметим, что в работе [9] приводится более сильное возмущение в пространстве L_1 системы Хаара, чем в теореме А (ряд $\sum_1^\infty \varepsilon_k \|x_k^*\|$ расходится), но свойство полноты остается устойчивым, при этом приводится алгоритм приближения по новой, полученной возмущением, системе.

Автор выражает благодарность профессору В. Г. Кротову, профессору А. М. Седлецкому и профессору Ю. Престину за полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Бочкарев, “Построение интерполяционного диадического базиса в пространстве непрерывных функций на основе ядер Фейера”, *Тр. МИАН*, **172** (1985), 29–59.
- [2] А. М. Олевский, “Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34** (1970), 803–826.
- [3] М. Г. Крейн, Д. П. Мильман, М. А. Рутман, “Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха”, *Записки матем. общества. Харьков* (4), **16** (1940), 106–110.
- [4] В. Д. Мильман, “Геометрическая теория пространств Банаха”, *УМН*, **25:3** (153) (1970), 113–174.
- [5] Ю. Б. Тумаркин, “Устойчивость базисов в B -пространствах и других классах ЛВП”, *Теория функций, функцион. анализ и его прилож.*, 1971, № 14, 26–35.
- [6] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.
- [7] V. I. Filippov, “On the completeness and other properties of some function systems in L^p , $0 < p < \infty$ ”, *J. Approx. Theory*, **94** (1998), 42–53.
- [8] V. I. Filippov, “Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ ”, *Anal. Math.*, **27:4** (2001), 239–260.
- [9] В. И. Филиппов, “О сильных возмущениях системы Хаара в пространствах $L_1(0, 1)$ ”, *Матем. заметки*, **66:4** (1999), 596–602.

В. И. Филиппов

Саратовский государственный социально-экономический
университет
E-mail: filippov@ssea.runnet.ru

Поступило

23.04.2003

Исправленный вариант

15.03.2006