Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Федоров, О. А. Рузакова, Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 4, 618–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 07:31:20

УДК 517.9

ОДНОМЕРНАЯ И ДВУМЕРНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ СОВОЛЕВСКОГО ТИПА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Е. Федоров, О. А. Рузакова

Для сингулярных линейных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых пространствах получены необходимые условия одномерной ε -управляемости. Это является обобщением аналогичных результатов для регулярных уравнений. Показано, что для рассматриваемого класса уравнений более естественным является понятие двумерной ε -управляемости, для которой аналогичные необходимые условия являются также и достаточными. С помощью абстрактных результатов получены достаточные условия двумерной ε -управляемости задачи Коши–Дирихле для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочинной.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (т.е. линейный непрерывный), $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейный замкнутый, плотно определенный в $\mathcal{X}$), функция $u(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, вектор $b \in \mathcal{Y}$. Рассмотрим задачу Коши $x(0) = x_0$ для уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + bu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Она представляет собой абстрактную форму многих задач, в том числе начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений математической физики с вырожденным оператором при старшей производной по времени [1], [2]. Систематически изучать такие задачи первым начал Соболев [3] (см. также [4]), поэтому уравнения вида (1) часто называют *уравнениями соболевского типа*. Обоснование использования такой терминологии см. в [5].

В теории дифференциальных уравнений очень важным является понятие *управляемости* уравнения [6], т.е. приведения траектории его решения в наперед заданную точку. В случае банаховых пространств речь может идти только о приведении траектории в ε -окрестность заданной точки. В работе [7] рассмотрено уравнение в банаховом пространстве

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \quad (2)$$

с линейным ограниченным оператором A , вектором $b \in \mathcal{X}$ и функцией $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, а также вопросы ε -управляемости для систем, описываемых такими уравнениями, т.е. так

Работа частично поддержана Государственной научной стипендией для молодых ученых.

называемой *одномерной ε -управляемости* (поскольку функция управления действует в одномерное пространство). Цель данной работы – на основе имеющихся результатов об ε -управляемости уравнения (2) исследовать одномерную ε -управляемость уравнения (1) с (L, σ) -ограниченным оператором M [1].

В данной работе показано, что для вырожденного уравнения (1) понятие ε -управляемости в нуль отличается от понятий ε -управляемости из нуля и ε -управляемости из любой точки в любую. В то же время последние два понятия эквивалентны. Кроме того, получены необходимые условия одномерной ε -управляемости уравнения (1).

Замечено, что для уравнений соболевского типа более естественно рассматривать задачу двумерной ε -управляемости, т.е. задачу ε -управляемости уравнения

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + b^0 u_0(t) + b^1 u_1(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

В работе получены необходимые и достаточные условия двумерной ε -управляемости этого уравнения.

В качестве примера рассмотрена задача Коши–Дирихле для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочинной, для которой получены достаточные условия двумерной ε -управляемости.

2. Относительно спектрально ограниченный оператор. Приведем необходимые для дальнейшего изложения вспомогательные результаты, доказательства которых можно найти в [1].

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов $A: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Если $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Множество линейных замкнутых операторов $A: \text{dom } A \rightarrow \mathcal{Y}$ с областями определения, плотными в пространстве $\mathcal{X}$, будем обозначать $\mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Множество операторов $\mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{X})$ обозначим через $\mathcal{Cl}(\mathcal{X})$.

В дальнейшем предполагаем $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Обозначим

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор M называется (L, σ) -ограниченным, если

$$\exists a > 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Возьмем (L, σ) -ограниченный оператор M , выберем в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ замкнутый контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R > a\}$. Тогда имеют смысл следующие интегралы:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L(\mu L - M)^{-1} d\mu.$$

Операторы P и Q являются проекторами. Положим $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$, $\mathcal{X}^1 = \text{im } P$, $\mathcal{Y}^1 = \text{im } Q$. Имеем

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1.$$

Через L_k (соответственно M_k) обозначим сужение оператора L (соответственно M) на $\mathcal{X}^k$ ($\text{dom } M_k = \text{dom } M \cap \mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$. Кроме того, через $\sigma_k^L(M)$ будем обозначать множество $\mathbb{C} \setminus \rho^{L_k}(M_k) - L_k$ -спектр оператора M_k .

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда действия операторов L и M расщепляются:

- (i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$;
- (iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$;
- (iv) $\sigma_0^L(M) = \emptyset$;
- (v) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$;
- (vi) существует аналитическая разрешающая группа $\{U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \in \mathbb{R}\}$ уравнения (1), причем $U^t = e^{tL_1^{-1}M_1}P$.

Введем обозначения

$$H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0), \quad S_1 = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1).$$

Для операторнозначной функции $(\mu L - M)^{-1}$ бесконечно удаленная точка является

- (i) устранимой особой точкой, если $H = \mathbb{O}$;
- (ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} = \mathbb{O}$;
- (iii) существенно особой точкой, если $\forall p \in \mathbb{N} \quad H^p \neq \mathbb{O}$.

Через $\mathbb{O}$ здесь обозначен нулевой оператор, определенный на подпространстве $\mathcal{X}^0$.

Бесконечность будем называть *несущественной особой точкой* порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, если она является устранимой особой точкой ($p = 0$) или полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а бесконечность – несущественная особая точка порядка p оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$. Тогда для любой функции $f(t) \in C^{p+1}([0; T]; \mathcal{Y})$ и для любого начального значения

$$x_0 \in \mathcal{P}_f = \left\{ x \in \mathcal{X} : (I - P)x = - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} (I - Q) f^{(k)}(0) \right\}$$

существует единственное решение $x(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{X})$ задачи Коши $x(0) = x_0$ для уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t)$, имеющее вид

$$x(t) = U^t x_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} (I - Q) f^{(k)}(t).$$

В основе доказательства теоремы 2 лежит используемая нами в дальнейшем редукция рассматриваемого уравнения к системе двух уравнений на подпространствах $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^0$ соответственно, которые в случае функции $f(t) = bu(t)$ имеют вид

$$\dot{x}^1(t) = S_1 x^1(t) + u(t) L_1^{-1} b^1 \quad (3)$$

на пространстве $\mathcal{X}^1$,

$$H \dot{x}^0(t) = x^0(t) + u(t) M_0^{-1} b^0 \quad (4)$$

на пространстве $\mathcal{X}^0$, где $b^1 = Qb$, $b^0 = (I - Q)b$. Действительно, уравнение (3) получается при действии на обе части уравнения (1) сначала проектором Q , а затем оператором L_1^{-1} . Поддействовав же на обе части уравнения (1) оператором $M_0^{-1}(I - Q)$, получим уравнение (4).

3. Определение ε -управляемости. Уравнение (3) имеет тот же вид, что и (2), его ε -управляемость исследована в [7]. Целью данной работы является исследование ε -управляемости уравнения (4) и системы (3), (4), т.е. уравнения (1).

Решение системы согласно теореме 2 имеет вид

$$x(t) = U^t x_0 + \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} b^1 u(s) ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} b^0 u^{(k)}(t), \quad (5)$$

где p – порядок полюса (либо нуль в случае устранимой особой точки). Поэтому будем использовать управление $u(t) \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R})$ с соответствующим p .

Заметим, что в выражении (5) сумма первых двух слагаемых является решением уравнения (3), а третье слагаемое – решение уравнения (4). Этот факт активно используется в дальнейшем.

Говоря об ε -управляемости системы, описываемой некоторым уравнением, через $x(T) = x(T; x_0; u(t))$ будем обозначать значение в момент времени T решения задачи Коши с начальным значением x_0 для соответствующего уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система называется ε -управляемой в нуль за время T , если для любых $x_0 \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ существует функция $u(t) \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R})$, для которой $\|x(T; x_0; u(t))\| \leq \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система называется ε -управляемой из нуля за время T , если для любых $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$ существует такая функция $u(t) \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R})$, что $\|x(T; 0; u(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система называется ε -управляемой из любой точки в любую за время T , если для любых точек $x_0 \in \mathcal{X}$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $u(t) \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R})$, что $\|x(T; x_0; u(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

ЛЕММА 1. Для уравнения (3) понятия ε -управляемости в нуль, из нуля и из любой точки в любую являются эквивалентными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства верхний индекс 1 будем опускать. То, что из ε -управляемости из любой точки в любую следуют ε -управляемость в нуль и ε -управляемость из нуля, очевидно.

Пусть система ε -управляема в нуль за время T , тогда

$$\forall x_0 \in \mathcal{X}^1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists u(t) \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R}):$$

$$\|x(T; x_0; u(t))\| = \left\| U^T x_0 + \int_0^T U^{T-s} L_1^{-1} b^1 u(s) ds \right\| \leq \varepsilon.$$

Для произвольного $\tilde{x} \in \mathcal{X}^1$ возьмем вектор $x_0 = -U^{-T} \tilde{x} \in \mathcal{X}^1$ и получим

$$\|x(T; 0; u(t)) - \tilde{x}\| = \left\| \int_0^T U^{T-s} L_1^{-1} b^1 u(s) ds + U^T x_0 \right\| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, система ε -управляема из нуля за время T .

Обратно, для ε -управляемой из нуля за время T системы по произвольному $x_0 \in \mathcal{X}^1$ выберем $\tilde{x} = -U^T x_0$ и получим

$$\varepsilon \geq \|x(T; 0; u(t)) - \tilde{x}\| = \|x(T; x_0; u(t))\|.$$

Таким образом, система управляема в нуль.

Осталось показать, что из ε -управляемости в нуль за время T_1 и ε -управляемости из нуля за время T_2 следует ε -управляемость из любой точки в любую за время $T_1 + T_2$. Действительно, из любой точки x_0 мы за некоторое время T_1 можем попасть в нуль:

$$\|x(T_1)\| = \left\| U^{T_1} x_0 + \int_0^{T_1} U^{T_1-s} L_1^{-1} b^1 u(s) ds \right\| \leq \varepsilon \frac{e^{-T_2} \|S_1\|}{2\|P\|}.$$

Затем, из нуля за некоторое время T_2 мы попадем в наперед взятую точку $\tilde{x}$ с помощью функции управления $v(t)$:

$$\left\| \int_0^{T_2} U^{T_2-t} L_1^{-1} b^1 v(t) dt - \tilde{x} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Здесь $U^{T_2} = e^{T_2 S_1} P$, $S_1 = L_1^{-1} M_1$, поэтому $\|U^{T_2}\| \leq \|P\| e^{T_2 \|S_1\|}$. Пусть $t + T_1 = s$ — общее время движения, после выхода из точки x_0 , t — время движения после выхода из точки нуль, тогда, считая $u(T_1 + t) = v(t)$, $t \in [0, T_2]$, получим

$$\begin{aligned} \|x(T_1 + T_2) - \tilde{x}\| &= \left\| U^{T_1+T_2} x_0 + \int_0^{T_1+T_2} U^{T_1+T_2-s} L_1^{-1} b^1 u(s) ds - \tilde{x} \right\| \\ &= \left\| U^{T_2} \left(U^{T_1} x_0 + \int_0^{T_1} U^{T_1-s} L_1^{-1} b^1 u(s) ds \right) + \int_0^{T_2} U^{T_2-t} L_1^{-1} b^1 v(t) dt - \tilde{x} \right\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввиду леммы 1 в дальнейшем будем говорить просто об ε -управляемости за время T системы (3), подразумевая под этим все три ее разновидности, рассмотренные нами.

ЛЕММА 2. (i) Для системы (4) понятия ε -управляемости из нуля за время T и ε -управляемости из любой точки в любую за время T являются эквивалентными;
(ii) система (4) управляема в нуль за любое время T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно, поскольку решение уравнения (4) не зависит от значения x_0 .

В утверждении (ii) речь идет о точной ($\varepsilon = 0$) управляемости. Чтобы показать ее, достаточно взять $u(t) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно утверждению (ii) леммы 2 понятие ε -управляемости в нуль для системы (4) является бессодержательным. Поэтому в дальнейшем под ε -управляемостью системы (4), а следовательно, и системы (1), будем подразумевать ε -управляемость из нуля или из любой точки в любую.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если система (1) ε -управляема за время T , то $b^0 \neq 0$ и $b^1 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в противном случае одно из уравнений (3) или (4) является однородным, а значит, не является ε -управляемым.

4. Одномерная ε -управляемость уравнения соболевского типа. Сначала приведем известные ранее факты о системе (3).

ТЕОРЕМА 3 [7]. Система (3) ε -управляема за время T в том и только том случае, когда линейная оболочка векторов

$$\{L_1^{-1}b^1, S_1L_1^{-1}b^1, \dots, S_1^mL_1^{-1}b^1, \dots\}$$

плотна в пространстве $\mathcal{X}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение сразу следует из теоремы 1 [7].

Последовательность векторов $\{e_m\}_{m=0}^\infty \subset \mathcal{X}$ назовем базисом в пространстве $\mathcal{X}$, если каждый элемент $x \in \mathcal{X}$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e_m,$$

где a_m – некоторые коэффициенты.

СЛЕДСТВИЕ 1 [7]. Система (3) ε -управляема за время T , если векторы

$$\{L_1^{-1}b^1, S_1L_1^{-1}b^1, \dots, S_1^mL_1^{-1}b^1, \dots\}$$

образуют базис в пространстве $\mathcal{X}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Точная ($\varepsilon = 0$) управляемость при этом, вообще говоря, не имеет места согласно теореме 2 [8].

Перейдем к рассмотрению системы (4).

ЛЕММА 3. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а бесконечность – несущественная особая точка порядка p оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$. Система (4) ε -управляема за время T тогда и только тогда, когда линейная оболочка векторов

$$\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^pM_0^{-1}b^0\}$$

плотна в пространстве $\mathcal{X}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое утверждение леммы сразу следует из вида решения

$$x(t) = - \sum_{k=0}^p u^{(k)}(t) H^k M_0^{-1} b^0.$$

Обратно, плотность линейной оболочки векторов

$$\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^pM_0^{-1}b^0\}$$

означает, что для любого $\tilde{x}^0$ и сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существуют константы c_k , $k = \overline{0, p}$, такие, что

$$\left\| \sum_{k=0}^p c_k H^k M_0^{-1} b^0 - \tilde{x}^0 \right\| \leq \varepsilon.$$

По ним построим искомую функцию управления

$$u(t) = - \sum_{k=0}^p \frac{c_k}{k!} (t - T)^k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из доказательства леммы видно, что из плотности линейной оболочки векторов $\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^p M_0^{-1}b^0\}$ следует ε -управляемость системы (4) за любое время T .

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а бесконечность – несущественная особая точка порядка p оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$. Система (4) ε -управляема тогда и только тогда, когда при некотором q , $0 \leq q \leq p$, пространство $\mathcal{X}^0$ $(q+1)$ -мерно, а система векторов $\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^q M_0^{-1}b^0\}$ является в нем базисом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть q – наименьшее число такое, что выполняется

$$H^q M_0^{-1}b^0 \neq 0, \quad H^{q+1} M_0^{-1}b^0 = 0.$$

Обозначим $H^k M_0^{-1}b^0 = z_k$, $k = \overline{0, p}$. Так как $z_{k+m} = H^m z_k$, то $z_k \neq 0$, $k = \overline{0, q}$, $z_l = 0$, $l = \overline{q+1, p}$. Пусть для некоторых c_k , $k = \overline{0, q}$,

$$\sum_{k=0}^q c_k z_k = 0.$$

Поддействуем на это равенство оператором H^q и получим $c_0 z_q = 0$. Отсюда $c_0 = 0$,

$$\sum_{k=1}^q c_k z_k = 0.$$

Поддействовав оператором H^{q-1} , получим $c_1 = 0$ и т. д. Таким образом, векторы z_k , $k = \overline{0, q}$, линейно независимы.

Обозначим соответствующее $\varepsilon = 1/n$ управление $u(t) = u_n(t)$, его значения – $u_n^{(k)}(T) = \alpha_k^n$, $k = \overline{0, q}$, $n \in \mathbb{N}$. В новых обозначениях получаем

$$\forall \tilde{x}^0 \in \mathcal{X}^0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{k=0}^q \alpha_k^n z_k - \tilde{x}^0 \right\| < \frac{1}{n}.$$

Поэтому,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^q \alpha_k^n z_k = \tilde{x}^0 \quad \text{и} \quad \mathcal{X}^0 = \overline{\text{span}}\{z_0, z_1, \dots, z_q\}.$$

Обратно, согласно предположению для любого $\tilde{x}^0$ существуют константы c_k , $k = \overline{0, q}$, такие, что

$$\sum_{k=0}^q c_k H^k M_0^{-1}b^0 = \tilde{x}^0.$$

Построив по ним управление

$$u(t) = - \sum_{k=0}^q \frac{c_k}{k!} (t-T)^k,$$

получим даже точную управляемость системы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а бесконечность – несущественная особая точка порядка p оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$. Тогда ε -управляемость системы (4) равносильна ее точной управляемости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной управляемости с очевидностью следует ε -управляемость.

Согласно предыдущей теореме из ε -управляемости системы следует, что

$$\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^q M_0^{-1}b^0\}$$

– базис в пространстве $\mathcal{X}^0$. Используя доказательство теоремы 4, получим точную управляемость.

Теперь можно сформулировать основной результат об одномерной ε -управляемости уравнения (1).

ТЕОРЕМА 5. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а бесконечность – несущественная особая точка порядка p оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$. Пусть, кроме того, система (1) ε -управляема. Тогда при некотором q , $0 \leq q \leq p$, система векторов

$$\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^q M_0^{-1}b^0\}$$

является базисом в пространстве $\mathcal{X}^0$, а линейная оболочка векторов

$$\{L_1^{-1}b^1, S_1 L_1^{-1}b^1, \dots, S_1^m L_1^{-1}b^1, \dots\}$$

плотна в пространстве $\mathcal{X}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Справедливость утверждения, обратного к утверждению теоремы 5, остается под вопросом, поскольку системами (3) и (4) одновременно управляет одна и та же функция $u(t)$.

5. Двумерная управляемость уравнения соболевского типа. В силу замечания 5 в случае уравнений соболевского типа более естественным представляется рассматривать управляемость уравнения

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + b^0 u_0(t) + b^1 u_1(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

Здесь векторы $b^0 \in \mathcal{X}^0$, $b^1 \in \mathcal{X}^1$. Очевидно, что уравнение (6) также сводится к системе уравнений (3), (4) с функциями $u_0(t)$, $u_1(t)$ вместо $u(t)$ соответственно.

Согласно соображениям, изложенным в п. 3, для этой системы ограничимся одним определением ε -управляемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Систему (6) назовем ε -управляемой за время T , если для любых точек $x_0 \in \mathcal{X}$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие функции

$$u_0(t) \in C^{p+1}([0, T]; \mathbb{R}), \quad u_1(t) \in L_1([0, T]; \mathbb{R}),$$

что $\|x(T; x_0; u_1(t), u_0(t)) - \tilde{x}\| \leq \varepsilon$.

Здесь

$$x(T; x_0; u_1(t), u_0(t)) = U^T x_0 + \int_0^T U^{T-s} L_1^{-1} b^1 u_1(s) ds - \sum_{k=0}^p H^k M_0^{-1} b^0 u_0^{(k)}(T)$$

– решение задачи Коши $x(0) = x_0$ для уравнения (6).

ТЕОРЕМА 6. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а бесконечность – несущественная особая точка порядка p оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$. Система (6) ε -управляема тогда и только тогда, когда при некотором q , $0 \leq q \leq p$, система векторов

$$\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^q M_0^{-1}b^0\}$$

является базисом в пространстве $\mathcal{X}^0$, а линейная оболочка векторов

$$\{L_1^{-1}b^1, S_1 L_1^{-1}b^1, \dots, S_1^m L_1^{-1}b^1, \dots\}$$

плотна в пространстве $\mathcal{X}^1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а бесконечность – несущественная особая точка порядка p оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$. Если при некотором q , $0 \leq q \leq p$, система векторов

$$\{M_0^{-1}b^0, HM_0^{-1}b^0, \dots, H^q M_0^{-1}b^0, L_1^{-1}b^1, S_1 L_1^{-1}b^1, \dots, S_1^m L_1^{-1}b^1, \dots\}$$

образует базис в пространстве $\mathcal{X}$, то система (6) ε -управляема.

6. Пример. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \quad (8)$$

для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочинной [9]

$$(\lambda - \Delta)v_t(x, t) = \alpha \Delta v(x, t) + b(x)u(t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (9)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, моделирующего фильтрацию жидкости в трещиновато-пористой среде. Функция $u(t)$ скалярная.

Положим

$$\mathcal{X} = \{v \in W_p^{k+2} : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{Y} = W_p^k,$$

либо

$$\mathcal{X} = \{v \in C_p^{k+2+\nu} : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}, \quad \mathcal{Y} = C^{k+\nu},$$

где $W_p^l = W_p^l(\Omega)$ – пространство Соболева, $1 < p < \infty$, $C^{l+\nu} = C^{l+\nu}(\Omega)$ – пространство Гёльдера, $0 < \nu < 1$, $l = 0, 1, \dots$. В качестве операторов L и M возьмем $\lambda - \Delta$ и $\alpha \Delta$ соответственно. Функция $b(x) \in W_p^k$ или $b(x) \in C^{k+\nu}$.

В [1] показано, что при любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор M (L, σ) -ограничен, причем ∞ – устранимая особая точка L -резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M .

Пусть $\{\varphi_k : k = 1, 2, \dots\}$ – множество собственных векторов задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ , занумерованное по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k = 1, 2, \dots\}$ с учетом их кратности, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

В случае $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ оператор L непрерывно обратим и рассматриваемый случай тривиален, поскольку уравнение приводится к виду (2). Поэтому, в дальнейшем будем считать, что $\lambda \in \sigma(\Delta)$.

Для рассматриваемой системы имеют место равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^0 &= \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}, & \mathcal{X}^1 &= \overline{\text{span}}\{\varphi_k : \lambda_k \neq \lambda\}, \\ M_0^{-1}b^0 &= \frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{\lambda_k=\lambda} \langle b, \varphi_k \rangle \varphi_k, & S_1^m L_1^{-1}b^1 &= \alpha^m \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \frac{\lambda_k^m \langle b, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\lambda - \lambda_k)^{m+1}},\end{aligned}$$

где $m = 0, 1, \dots$. Системы (3) и (4) в данной ситуации сводятся к системам

$$\begin{aligned}\langle v(\cdot, 0), \varphi_k(\cdot) \rangle &= \langle v_0(\cdot), \varphi_k(\cdot) \rangle, \\ \langle v_t(\cdot, t), \varphi_k(\cdot) \rangle &= \frac{\alpha \lambda_k \langle v(\cdot, t), \varphi_k(\cdot) \rangle}{\lambda - \lambda_k} + u(t) \frac{\langle b(\cdot), \varphi_k(\cdot) \rangle}{\lambda - \lambda_k}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}\quad (10)$$

$$k \in \mathbb{N} : \lambda_k \neq \lambda,$$

$$\begin{aligned}\langle v(\cdot, 0), \varphi_k(\cdot) \rangle &= \langle v_0(\cdot), \varphi_k(\cdot) \rangle, \\ 0 &= \alpha \lambda \langle v(\cdot, t), \varphi_k(\cdot) \rangle + u(t) \langle b(\cdot), \varphi_k(\cdot) \rangle, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}\quad (11)$$

$$k \in \mathbb{N} : \lambda_k = \lambda,$$

соответственно.

ЛЕММА 4. Система (11) управляема тогда и только тогда, когда λ является собственным значением оператора Лапласа кратности 1, а функция $b(x)$ не ортогональна соответствующей собственной функции в смысле $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в данном случае бесконечность – устранимая особая точка оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, то порядок особенности в бесконечности равен 1 и по теореме 4 пространство $\mathcal{X}^0$ должно быть одномерно. Это не так, если кратность λ больше единицы. Осталось сослаться на предложение 1.

Собственные функции оператора Лапласа, образующие базис в $\mathcal{X}^1$, переобозначим как $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots\}$, соответствующие им λ_k также перенумеруем. Обозначим также для $w \in \mathcal{X}^1$ $w_k = \langle w, \psi_k \rangle$, $b_k = \langle b, \psi_k \rangle$, $k = 0, 1, \dots$.

ЛЕММА 5. Если оператор $\Lambda: l^2 \rightarrow l^2$, имеющий вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{b_0}{\lambda - \lambda_0} & \frac{\alpha \lambda_0 b_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} & \cdots & \frac{\alpha^k \lambda_0^k b_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} & \cdots \\ \frac{b_1}{\lambda - \lambda_1} & \frac{\alpha \lambda_1 b_1}{(\lambda - \lambda_1)^2} & \cdots & \frac{\alpha^k \lambda_1^k b_1}{(\lambda - \lambda_1)^{k+1}} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{b_m}{\lambda - \lambda_m} & \frac{\alpha \lambda_m b_m}{(\lambda - \lambda_m)^2} & \cdots & \frac{\alpha^k \lambda_m^k b_m}{(\lambda - \lambda_m)^{k+1}} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

сюръективен на своей области определения, то система (10) ε -управляема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, тогда для любой функции $w \in \mathcal{X}^1$ найдется последовательность чисел $\{c_0, c_1, c_2, \dots\}$ такая, что

$$w_k = b_k \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{\alpha^m \lambda_k^m}{(\lambda - \lambda_k)^{m+1}},$$

что означает равенство

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} c_m S_1^m L_1^{-1} b^1.$$

Из него согласно теореме 3 следует ε -управляемость системы (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Очевидно, что достаточное условие ε -управляемости системы (10), сформулированное в лемме 5, очень жесткое. Оно исключает возможность существования кратных собственных значений и возможность ортогональности функции $b(x)$ хотя бы одной из функций ψ_k .

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta)v_t(x, t) = \alpha \Delta v(x, t) + u_0(t) \sum_{\lambda_k = \lambda} \langle b(\cdot), \varphi_k(\cdot) \rangle \varphi_k(x) \\ + u_1(t) \sum_{\lambda_k \neq \lambda} \langle b(\cdot), \varphi_k(\cdot) \rangle \varphi_k(x), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (12)$$

На основе лемм 4, 5 мы сможем дать достаточные условия для ε -управляемости системы (7), (8), (12), но не системы (7)–(9).

ТЕОРЕМА 7. Пусть λ является собственным значением оператора Лапласа кратности 1, функция $b(x)$ не ортогональна соответствующей собственной функции в смысле $L_2(\Omega)$, а оператор $\Lambda: l^2 \rightarrow l^2$ сюръективен на своей области определения. Тогда система (7), (8), (12) ε -управляема.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
- [2] Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
- [3] Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. С. 3–50.
- [4] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
- [5] Свиридюк Г. А. Задача Коши для линейного сингулярного операторного уравнения типа Соболева // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2168–2171.
- [6] Шолохович Ф. А. Об управляемости линейных динамических систем // Изв. УрГУ. 1998. Т. 10. № 1. С. 103–126.
- [7] Куржанский А. Б. К управляемости в банаховых пространствах // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 9. С. 1715–1718.
- [8] Шолохович Ф. А. Об управляемости в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 3. С. 479–484.
- [9] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // ПММ. 1960. Т. 24. № 5. С. 58–73.

Челябинский государственный университет
E-mail: (Федоров В. Е.) kar@csu.ru
(Рузакова О. А.) amber@csu.ac.ru

Поступило
15.01.2002
Исправленный вариант
19.09.2002